(a) $\sup\limits_{n,\alpha} \| |x-\alpha|^{\mu} (H_0+i) g_\alpha(P) f_\alpha(x) \eta_n \| < \infty$. Это следует из того, что равномерно ограничена норма $\| |x-\alpha|^{\mu} f_\alpha \|_\infty$ и равномерно ограничены производные от $(k^2+i) g_\alpha$.

(b) Пусть $C_\alpha(t) = \{\alpha + vt \mid v \in \operatorname{supp} g_\alpha(k) \cap \{^1/_2\sqrt{a} \leqslant |k| \leqslant 2\sqrt{b} + {}^1/_2\sqrt{a}\}\}$. Тогда для x, α, t, таких же, как выше,

$$\operatorname{dist}(x, C_\alpha(t)) \geqslant \delta(1+|\alpha|+n+|t|), \tag{331}$$

коль скоро δ достаточно мало. Иначе говоря, для $t \geqslant 0$, $|\alpha| \geqslant {}^3/_4 n$, $|x_0| \leqslant \delta n$, $|w| \leqslant \delta$ и

$$v \in V_0 \equiv \operatorname{supp} g_\alpha \cap \{^1/_2\sqrt{a} < |k| \leqslant 2\sqrt{b} + {}^1/_2\sqrt{a}\}$$

имеем $\operatorname{dist}(x_0 + wt, \alpha + vt) \geqslant c(1+|\alpha|+n+t)$. Предположим, можно доказать, что это расстояние всегда отлично от нуля, когда α заменено на $(1-\varepsilon)\alpha$ Тогда, сжимая δ, можно интересующее нас расстояние оценить снизу величиной $2c(1+|\alpha|+t)$, а пользуясь тем, что $|\alpha| \geqslant {}^3/_4 n$, найти искомую оценку. То, что это расстояние не обращается в нуль, означает, что частица, начиная движение из точки $\alpha - x_0$ со скоростью $v-w$, не попадает в начало координат, а это очевидно.

Из (300) для показателя степени $l+\nu/2$ немедленно получаем, что при $t>0$ и $|\alpha| \geqslant {}^3/_4 n$

$$F(|x| \leqslant \delta n + a\delta|t|)(H_0+i) e^{-itH_0} \eta_{n;\, \alpha.\, \mathrm{out}} \| \leqslant C_l'(1+|\alpha|+n+|t|)^{-l},$$

а тогда для $t \geqslant 0$

$$\| F(|x| \leqslant \delta n + a\delta|t|)(H_0+i) e^{-itH_0} \varphi_{n;\, \mathrm{out}} \| \leqslant C_l''(1+n+|t|)^{-2}. \tag{332}$$

Это неравенство, его аналог для $t \leqslant 0$ с заменой out на in, а также (320) влекут за собой (322). Предельное равенство (323) получается путем доказательства аналога (322) без дополнительного множителя (H_0+i). ∎

Дополнение к § XI.17. Теорема РАГЭ

В этом дополнении мы докажем теорему Винера о L^2-средних преобразования Фурье меры, а также еще один результат в том же духе, который мы называем теоремой РАГЭ в соответствии с вкладом, который внесли в него Рюэль, Амрейн, Георгеску и Энсс.

Напомним, что конечная (положительная) бэрова мера μ на локально компактном пространстве X обладает таким свойством: $\mu(\{x\})=0$ для всех, за исключением не более чем счетного множества точек x, и что $\sum\limits_{x \in X} \mu(\{x\}) \leqslant \mu(X) < \infty$, а потому $\sum\limits_{x \in X} |(\mu(\{x\}))|^2$ — конечное число.

Теорема XI.114 (теорема Винера). Пусть μ — конечная бэрова мера на $\mathbb{R}$, и пусть

$$F(t) = \int e^{-ixt}\, d\mu(x)$$

— ее фурье-образ (с точностью до множителя $(2\pi)^{-1/2}$). Тогда

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |F(t)|^2\, dt = \sum_{x \in \mathbb{R}} |\mu(\{x\})|^2. \tag{333}$$

В частности, если μ не имеет чистых точек, то этот предел равен нулю.

Доказательство. В силу формулы для F и теоремы Фубини (мера $d\mu \otimes d\mu \otimes (2T)^{-1}\, dt$ на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-T, T]$ конечна),

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |F(t)|^2\, dt = \int d\mu(x) \int d\mu(y) \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-i(x-y)t}\, dt =$$

$$= \int d\mu(x)\, H(T, x),$$

где

$$H(T, x) = \int d\mu(y) [T(x-y)]^{-1} \sin(T(x-y)).$$

Подынтегральное выражение в H поточечно ограничено единицей и сходится к 0 (соответственно 1) при $T \to \infty$, если $y \neq x$ (соответственно $y = x$). Применяя теорему о мажорированной сходимости, получаем, что

$$\lim_{T \to \infty} H(T, x) = \mu(\{x\}) \quad \text{и} \quad |H(T, x)| \leqslant \mu(\mathbb{R}).$$

Снова применяя теорему о мажорированной сходимости, имеем

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |F(t)|^2\, dt = \int d\mu(x)\, \mu(\{x\}) = \sum_{x \in \mathbb{R}} |\mu(\{x\})|^2. \blacksquare$$

Заметим, что эта теорема и ее доказательство обобщаются до утверждения, что

$$\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |F(n)|^2 \to \sum_{x \in \mathbb{R}} |\mu(\{x\})|^2,$$

а отсюда в свою очередь следует теорема VII.14b (которую мы без доказательства привели в т. 1), см. задачу 148.

Определение. Пусть A — самосопряженный оператор. Обозначим через $P_{\text{cont}}(A)$ проектор на множество всех векторов φ, спектральная мера которых не имеет чистых точек, т. е. проектор на ортогональное дополнение к множеству собственных векторов оператора A.

Теорема XI.115 (теорема РАГЭ). Пусть A — самосопряженный оператор, и пусть C — ограниченный оператор, так что оператор $C(A+i)^{-1}$ компактен. Тогда:

(a) для всех $\varphi \in P_{\text{cont}}(A)\mathcal{H}$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|Ce^{-itA}\varphi\|^2\,dt \to 0 \quad \text{при } T \to \infty; \tag{334}$$

(b) для некоторого $\varepsilon(T)$, стремящегося к нулю, когда $T \to \infty$, имеем для всех $\varphi \in D(A)$

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|Ce^{-itA}P_{\text{cont}}(A)\varphi\|^2\,dt \leqslant \varepsilon(T)\,\|(A+i)\varphi\|^2; \tag{335}$$

(c) утверждение (334) справедливо и без степени 2; кроме того, имеет место неравенство

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|Ce^{-itA}P_{\text{cont}}(A)\varphi\|\,dt \leqslant \varepsilon(T)^{1/2}\|(A+i)\varphi\|. \tag{336}$$

Доказательство. (a) следует из (b) в силу простого соображения, основанного на плотности, поскольку область $D(A) \cap \operatorname{Ran} P_{\text{cont}}(A)$ плотна в $\operatorname{Ran} P_{\text{cont}}(A)$ и

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|Ce^{-itA}\varphi\|^2\,dt \leqslant \|C\|^2\,\|\varphi\|^2. \tag{337}$$

(c) следует из (a), (b) и неравенства Шварца. Записывая

$$\|Ce^{-itA}P_{\text{cont}}(A)\varphi\|^2 = \|C(A+i)^{-1}e^{-itA}P_{\text{cont}}(A)(A+i)\varphi\|^2,$$

видим, что достаточно доказать аналог (335), когда оператор C компактен, а $\varepsilon(T)\|(A+i)\varphi\|^2$ заменено на $\varepsilon(T)\|\varphi\|^2$.

Для любых C и T положим

$$\varepsilon_C(T) = \sup_{\varphi \neq 0} \|\varphi\|^{-2}(2T)^{-1}\int_{-T}^{T} \|Ce^{-itA}P_{\text{cont}}(A)\varphi\|^2\,dt.$$

Тогда, в силу (337), $\varepsilon_C(T) \leqslant \|C\|^2$, а поскольку $\|a+b\|^2 \leqslant \leqslant 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$, то

$$\varepsilon_{C+D}(T) \leqslant 2\varepsilon_C(T) + 2\varepsilon_D(T).$$

Итак, чтобы показать, что $\varepsilon_C(T) \to 0$ для компактного оператора C, достаточно доказать это для оператора C конечного ранга, а тем самым и для оператора C ранга 1. Поскольку $P_{\text{cont}}(A)$ коммутирует с e^{-iAt}, нужно показать лишь, что для $\psi \in \operatorname{Ran} P_{\text{cont}}(A)$ и всех φ

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |(\psi, e^{-itA}\varphi)|^2 \, dt \leqslant \varepsilon(T) \|\varphi\|^2,$$

где $\varepsilon(T) \to 0$ при $T \to \infty$.

Как при доказательстве леммы 1 перед теоремой XI.7, можно перейти к спектральному представлению, так что

$$(\psi, e^{-itA}\varphi) = \int e^{-itx} h(x) \, d\mu(x),$$

где $d\mu$ — спектральная мера для ψ и $\int |h(x)|^2 \, d\mu(x) \leqslant \|\varphi\|^2$. Как и при доказательстве теоремы Винера, имеем

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |(\psi, e^{-itA}\varphi)|^2 \, dt = \int h(x) \, d\mu(x) \int \overline{h(y)} \frac{\sin((x-y)T)}{(x-y)T} \, d\mu(y).$$

Применяя неравенство Шварца, получим

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |(\psi, e^{-itA}\varphi)|^2 \, dt \leqslant \|\varphi\|^2 \delta(T),$$

где

$$\delta(T) = \left[\int d\mu(x) \, d\mu(y) \left| \frac{\sin((x-y)T)}{(x-y)T} \right|^2 \right]^{1/2}.$$

Как при доказательстве теоремы Винера, $\delta(T) \to 0$ при $T \to \infty$, поскольку μ не имеет чистых точек. ■

Следствие. Пусть A — самосопряженный оператор на сепарабельном гильбертовом пространстве, не имеющий точечного спектра. Тогда существует последовательность $t_n \to \infty$, такая, что $e^{-it_nA} \to 0$ слабо при $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис. Тогда оператор $C = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k/\cdot} (\varphi_k, \cdot)\varphi_k$ компактен, так что по предыдущему доказательству,

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|Ce^{-itA}\psi\|^2\,dt\leqslant\varepsilon(T)\|\psi\|^2$$

с $\varepsilon(T)\to 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\sum_{k,m}2^{-k-m}|(\varphi_k, e^{-itA}\varphi_m)|^2\right]dt\leqslant\varepsilon(T).$$

Поскольку функция g, обозначающая выражение, стоящее в квадратных скобках, положительна и стремится к нулю в среднем, должна найтись такая последовательность $t_n\to\infty$, что $g(t_n)\to 0$ (очевидно, существует T_n с $\varepsilon(T_n)\leqslant 2^{-n}$, и тогда $t_n\in$ $\in(^1/_2 T_n, T_n)$, причем $g(t_n)\leqslant 4(2^{-n})$). Но если сумма стремится к нулю, то каждое скалярное произведение $(\varphi_k, e^{-it_nA}\varphi_m)\to 0$ при $n\to\infty$, что и означает слабую сходимость. ▮

Если A обладает сингулярным спектром, то может случиться, что e^{-itA} не стремится слабо к нулю при $t\to\infty$ (задача 149).

В *нашем* изложении теории Лакса—Филлипса мы априори предполагали отсутствие сингулярного спектра. Идеи, заложенные в теореме РАГЭ, позволяют избежать этого (см. задачу 150).

Мы завершаем это дополнение, приведя один результат типа теоремы РАГЭ, который, возможно, будет полезен при рассмотрении многочастичного рассеяния.

Теорема XI.116. Пусть A—самосопряженный оператор с пустым сингулярным спектром. Пусть C и D—два ограниченных оператора, таких, что $(A+i)^{-1}C$ и $D(A+i)^{-1}$ компактны. Тогда для любого ε можно найти проектор P на *конечное* число собственных векторов A и некоторое $T\geqslant 0$, такие, что при $t>T$

$$\|D(A+i)^{-2}e^{-iAt}(1-P)C\|\leqslant\varepsilon.$$

Прежде чем доказывать эту теорему, опишем один ее частный случай. Предположим, что $C=D=F(|x|\leqslant n)$, а $A=-\Delta+V$, где V—локальный потенциал Энсса. Тогда теорема утверждает, что если в исходный момент времени φ сосредоточено в области $|x|\leqslant n$, т. е. $F(|x|\leqslant n)\varphi=\varphi$, то φ можно разбить на две части: $P\varphi+(1-P)\varphi$. Здесь $P\varphi$—линейная комбинация имеющихся в системе связанных состояний. Другая часть обладает тем свойством, что если ждать достаточно долгое время, то она «покинет область взаимодействия» и не вернется, т. е.

$$\|F(|x|\leqslant n)e^{-itH}(1-P)\varphi\|\leqslant\varepsilon\|(H+i)^2\varphi\|\qquad\text{для всех } t>T_0.$$

Доказательство теоремы XI.116. Как и при доказательстве теоремы РАГЭ, нам нужно лишь найти такие T и P, что при

$t>T$

$$\|Q_1 e^{-itA}(1-P)Q_2\| \leqslant \varepsilon,$$

где Q_1 и Q_2 — два оператора ранга 1. Пусть P_{ac} — проектор на абсолютно непрерывное пространство оператора A, пусть φ_1, φ_2, ... — собственные векторы A, и пусть P_n — ортогональный проектор на линейную оболочку векторов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Наконец, пусть $P_\infty = \text{s-lim}\, P_n = 1 - P_{ac}$. По лемме Римана—Лебега (см. § IX.2), $\|Q_1 e^{-iAt} P_{ac} Q_2\| \to 0$ при $t \to \infty$, поэтому мы можем выбрать T так, чтобы эта норма была меньше $\varepsilon/2$ при $t > T$. Поскольку Q_2 имеет ранг 1, $\|(P_\infty - P_n) Q_2\| \to 0$ при $n \to \infty$ и, значит, можно выбрать n так, чтобы $\|(P_\infty - P_n) Q_2\| \leqslant (\varepsilon/2)\|Q_1\|$. Выбирая $P = P_n$, получаем, что при $t > T$

$$\|Q_1 e^{-iAt}(1-P)Q_2\| \leqslant \|Q_1 e^{-iAt} P_{ac} Q_2\| + \|Q_1 e^{-itA}(P_\infty - P_n) Q_2\| \leqslant \varepsilon. \blacksquare$$

ЗАМЕЧАНИЯ

§ XI.1. Геометрические идеи, упомянутые в третьем абзаце этого раздела, определяют часть данных рассеяния без обращения к сравнению со свободной динамикой. По существу, для определения сечения рассеяния не требуется ничего, кроме этих геометрических идей, но для определения задержки во времени их уже недостаточно. Дальнейшее обсуждение см. в статье Девиса—Саймона, цитированной в замечаниях к § 4, а также статьи: J. Dollard, Scattering into cones, I. Potential Scattering. — *Commun. Math. Phys.* **12** (1969), 193—203, и J. M. Jauch, R. Lavine, R. G. Newton, Scattering into cones. — *Helv. Phys. Acta* 45 (1972), 325—330. Многие авторы формулировали предположения о том, что квантовое состояние есть «состояние рассеяния» или лежит в $\mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sing}$, на геометрическом языке; см. D. Ruelle, A remark on bound states in potential scattering theory. — *Nuovo Cimento A* **61** (1969), 655—662; C. Wilcox, Scattering states and wave operators in the abstract theory of scattering. — *J. Funct. Anal.* **12** (1973), 257—274; W. Amrein, V. Georgescu, On the characterization of bound states and scattering states in quantum mechanics. — *Helv. Phys. Acta* **46** (1973), 635—658; J. Dollard, On the definition of scattering subspace in non-relativistic quantum mechanics. — *J. Math. Phys.* **18** (1977), 229—232; K. B. Sinha, On the absolutely and singularly continuous subspaces in scattering theory. — *Ann. Inst. H. Poincaré, Sect A* **26** (1977), 263—277. Идеи Рюэля существенным образом входят в работу Энсса, которая рассматривается в § 17. См. § 17, дополнение к нему и соответствующее место в Замечаниях.

S-преобразование, которое мы определили как $S = (\Omega^-)^{-1}\Omega^+$, иногда называют S-матрицей ЭБФМ в честь Экштейна (O. Ekstein, Theory of time dependent scattering for multichannel processes. — *Phys. Rev.* **101** (1956), 880—889) и Ф. Березина, Л. Фаддеева, Р. Минлоса (см. их статью в: Тр. 4-го Всесоюзного матем. съезда. Т. 2 — Л., 1964, с. 532—544). S'-преобразование называют S-матрицей Яуха в честь Яуха (J. Jauch, Theory of the scattering operator I, II. — *Helv. Phys. Acta* **31** (1958), 127—158, 661—684). Можно выразить различие между этими двумя преобразованиями, записав двухчастичное рассеяние в формальных обозначениях, употребляемых физиками. Функцию $(2\pi)^{-3/2}\psi(\cdot, k)$, которая рассматривалась в § 6 и 7, запишем как $|k, \text{in}\rangle$, а аналогичное состояние $(2\pi)^{-3/2}\psi(\cdot, -k)$, которое асимптотически в будущем переходит в плоскую волну, как $|k, \text{out}\rangle$. Наконец, состояние $(2\pi)^{-3/2}e^{ik\cdot x}$