$t>T$

$$\|Q_1e^{-itA}(1-P)Q_2\|\leqslant\varepsilon,$$

где $Q_1$ и $Q_2$ — два оператора ранга 1. Пусть $P_{ac}$ — проектор на абсолютно непрерывное пространство оператора $A$, пусть $\varphi_1$, $\varphi_2$, ... — собственные векторы $A$, и пусть $P_n$ — ортогональный проектор на линейную оболочку векторов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Наконец, пусть $P_\infty = \text{s-lim}\, P_n = 1 - P_{ac}$. По лемме Римана—Лебега (см. § IX.2), $\|Q_1e^{-iAt}P_{ac}Q_2\|\to 0$ при $t\to\infty$, поэтому мы можем выбрать $T$ так, чтобы эта норма была меньше $\varepsilon/2$ при $t>T$. Поскольку $Q_2$ имеет ранг 1, $\|(P_\infty-P_n)Q_2\|\to 0$ при $n\to\infty$ и, значит, можно выбрать $n$ так, чтобы $\|(P_\infty-P_n)Q_2\|\leqslant(\varepsilon/2)\|Q_1\|$. Выбирая $P=P_n$, получаем, что при $t>T$

$$\|Q_1e^{-iAt}(1-P)Q_2\|\leqslant\|Q_1e^{-iAt}P_{ac}Q_2\|+\|Q_1e^{-itA}(P_\infty-P_n)Q_2\|\leqslant\varepsilon. \blacksquare$$

## ЗАМЕЧАНИЯ

*§ XI.1.* Геометрические идеи, упомянутые в третьем абзаце этого раздела, определяют часть данных рассеяния без обращения к сравнению со свободной динамикой. По существу, для определения сечения рассеяния не требуется ничего, кроме этих геометрических идей, но для определения задержки во времени их уже недостаточно. Дальнейшее обсуждение см. в статье Девиса—Саймона, цитированной в замечаниях к § 4, а также статьи: J. Dollard, Scattering into cones, I. Potential Scattering. — *Commun. Math. Phys.* **12** (1969), 193—203, и J. M. Jauch, R. Lavine, R. G. Newton, Scattering into cones. — *Helv. Phys. Acta* 45 (1972), 325—330. Многие авторы формулировали предположения о том, что квантовое состояние есть «состояние рассеяния» или лежит в $\mathcal{H}_{ac}\oplus\mathcal{H}_{sing}$, на геометрическом языке; см. D. Ruelle, A remark on bound states in potential scattering theory. — *Nuovo Cimento A* **61** (1969), 655—662; C. Wilcox, Scattering states and wave operators in the abstract theory of scattering. — *J. Funct. Anal.* **12** (1973), 257—274; W. Amrein, V. Georgescu, On the characterization of bound states and scattering states in quantum mechanics. — *Helv. Phys. Acta* **46** (1973), 635—658; J. Dollard, On the definition of scattering subspace in non-relativistic quantum mechanics. — *J. Math. Phys.* **18** (1977), 229—232; K. B. Sinha, On the absolutely and singularly continuous subspaces in scattering theory. — *Ann. Inst. H. Poincaré, Sect A* **26** (1977), 263—277. Идеи Рюэля существенным образом входят в работу Энсса, которая рассматривается в § 17. См. § 17, дополнение к нему и соответствующее место в Замечаниях.

$S$-преобразование, которое мы определили как $S=(\Omega^-)^{-1}\Omega^+$, иногда называют $S$-матрицей ЭБФМ в честь Экштейна (O. Ekstein, Theory of time dependent scattering for multichannel processes. — *Phys. Rev.* **101** (1956), 880—889) и Ф. Березина, Л. Фаддеева, Р. Минлоса (см. их статью в: Тр. 4-го Всесоюзного матем. съезда. Т. 2 — Л., 1964, с. 532—544). $S'$-преобразование называют $S$-матрицей Яуха в честь Яуха (J. Jauch, Theory of the scattering operator I, II. — *Helv. Phys. Acta* **31** (1958), 127—158, 661—684). Можно выразить различие между этими двумя преобразованиями, записав двухчастичное рассеяние в формальных обозначениях, употребляемых физиками. Функцию $(2\pi)^{-3/2}\psi(\cdot, k)$, которая рассматривалась в § 6 и 7, запишем как $|k, \text{in}\rangle$, а аналогичное состояние $(2\pi)^{-3/2}\psi(\cdot, -k)$, которое асимптотически в будущем переходит в плоскую волну, как $|k, \text{out}\rangle$. Наконец, состояние $(2\pi)^{-3/2}e^{ik\cdot x}$

запишем как $|k, \text{free}\rangle$. Величина, представляющая физический интерес, есть $S(k, k') = \langle k, \text{out} | k', \text{in}\rangle$; $S$ и $S'$ формально определяются формулами

$$S(k, k') = \langle k, \text{free} | S | k', \text{free}\rangle = \langle k, \text{in} | S' | k', \text{in}\rangle.$$

Отсюда видно, что $S$ и $S'$ связаны преобразованием подобия $\Omega^+$: $|k, \text{free}\rangle \longmapsto |k, \text{in}\rangle$.

§ *XI.2*. Большая часть этого раздела и, в частности, теоремы XI.1, XI.2 и XI.3 взяты из работы Саймона: B. Simon, Wave operators for classical particle scattering.—*Commun. Math. Phys.* **23** (1971), 37—48. Подобные результаты в несколько другой постановке были получены Куком, Хунцикером и Проссером: J Cook, Banach algebras and asymptotic mechanics. In: Cargese Lectures in Theoretical Physics (F. Lurchit, ed.). New York: Gordon and Breach, 1967; W. Hunziker, The $S$-matrix in classical mechanics.—*Commun. Math. Phys.* **8** (1968), 282—299; R. Prosser, On the asymptotic behavior of certain dynamical systems.—*J. Math. Phys.* **13** (1972), 186—196. Кук, Хунцикер и Проссер работали в $L^2(\Sigma, d^6x)$ и определяли унитарные операторы формулами $(U_t^{(0)} f)(w) = f(T_t^{(0)} w)$ и $(U_t f)(w) = f(T_t w)$. Затем они строили волновые операторы в виде $\underset{t\to\pm\infty}{\text{s-lim}}\, U_{-t} U_t^{(0)}$, пользуясь методами квантовой теории. Нам кажется более естественным работать непосредственно в фазовом пространстве.

Красивое рассуждение, с помощью которого в теореме XI.3 доказывалось, что $\mu(N_+ \triangle N_-) = 0$, появилось впервые у Литтльвуда (J. E. Littlewood, On the problem of $n$ bodies.—*Comm. Sem. Math. Lund*, tome supp. dédié à M. Riesz (1952), 143—151) и у Зигеля (C. L. Siegel. Vorlesungen über Himmelsmechanik.—New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1956). Оно было переоткрыто Хунцикером в цитированной выше работе. Литтльвуд рассматривал также некоторые случаи с кулоновыми силами.

Рассеяние на центральном потенциале, т. е. формула (7), рассматривается во многих учебниках; см., например, Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теоретическая физика. Т. 1. Механика.—М.: Физматгиз, 1958, или Р. Ньютон, Теория рассеяния волн и частиц. Пер. с англ.—М.: Мир, 1969.

Использование формулы $\ddot{I} = \mathbf{r}^2 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{F}$ в теореме XI.3 тесно связано с теоремой вириала (см. книгу Ландау и Лифшица). В центральном случае вместо нее можно воспользоваться законами сохранения энергии и момента количества движения (см. задачу 14).

§ *XI.3*. Многие понятия абстрактной нестационарной теории рассеяния были введены в связи с двухчастичными квантовыми системами, описываемыми в § 4. Волновые операторы были впервые формализованы Мёллером (C. Møller, General properties of the characteristic matrix in the theory of elementary particles, I.—*Danske Vid. Selsk. Mat-Fys. Medd.* **23** (1945), 1—48). Но у него не было ясного представления о том, каким понятием предела следует пользоваться. К. Фридрихс в своей работе: K. Friedrichs, On the perturbation of continuous spectra.—*Comm. Pure Appl. Math.* **1** (1948), 361—406, ввел волновые операторы для класса моделей, где $V$—интегральный оператор с «малым» гладким ядром. Эта статья Фридрихса содержала также идеи, из которых выросла теория возмущений для погруженных собственных значений, описанная в § XII.5 и XII.6. Однако высказанные в этой работе идеи лежали без движения вплоть до работы Яуха (цитированной в замечаниях к § 1), работ Кука и Като (цитируемых ниже) и работы Ладыженской и Фаддеева (О. А. Ладыженская, Л. Д. Фаддеев, О возмущениях непрерывного спектра.—ДАН СССР **120** (1958), 1187—1190), появившихся в 1957—1958 гг. Дальнейшее развитие идей, связанных с моделями, рассмотренными Фридрихсом, см. в работе Л. Д. Фаддеева, О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра.—Тр. МИАН им. В. А. Стеклова **73** (1964), 292—313, в которой снимается условие «малости».

Метод Кука (теорема XI.4) был сформулирован в его работе: J. Cook, Convergence of the Møller wave matrix.—*J. Math. and Phys.* **36** (1957), 82—87, для конкретной ситуации $\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R}^3)$, $V\in L^2$, $A=-\Delta+V$, $B=-\Delta$. Теорема XI.5 есть абстрактное оформление идеи Купша и Сандаса: J. Kupsch and W. Sandhas, Møller operators for scattering on singular potentials.—*Commun. Math. Phys.* **2** (1966), 147—154. До недавнего времени единственный способ обращения с волновыми операторами, если $A-B$ задается как квадратичная форма, состоял в использовании более глубоких и сложных методов, чем метод Кука, таких, как теория Като—Бирмана. Более сильная теорема, чем XI.6, была доказана Шехтером (M. Schechter, A new criterion for scattering theory.—*Duke. Math. J.* **44** (1977), 863—877), который пользовался стационарными методами, а не методом Кука. В своей статье, подсказанной работой Шехтера, Саймон нашел то доказательство теоремы XI.6, которое приведено в тексте (B. Simon, Scattering theory and quadratic forms: On a theorem of Schechter.—*Commun. Math. Phys.* **53** (1977), 151—153). Эта теорема была распространена Шехтером на случай двух гильбертовых пространств: M. Schechter, Wave operators for pairs of spaces and the Klein—Gordon equation.—*Aequationes Mathematicae* **18** (1978), 398—399.

Одно из следствий теории Като—Бирмана—это теорема об инвариантности для абсолютно непрерывного спектра при предположениях о возмущении, не зависящих от возмущаемого оператора. Подобного рода теорема есть и для существенного спектра; см. § XIII.4. К сожалению, никакой такой теоремы для сингулярного спектра быть не может. В самом деле, можно найти самосопряженный оператор $A$ и возмущение единичного ранга $C$, такие, что $A$ не имеет сингулярного спектра, но $A+C$ имеет. Этот пример рассмотрен в § XIII.6. Значит, любая теорема об инвариантности для сингулярного спектра должна включать условия, связывающие невозмущенный оператор и возмущение.

То что мы назвали теорией Като—Бирмана, имеет сложную историю. Като ввел понятие обобщенных волновых операторов и доказал, что $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны, если $A-B$ имеет конечный ранг (T. Kato, On finite dimensional perturbations of self-adjoint operators.—*J. Math. Soc. Japan* **9** (1957), 239—249). Этот результат был распространен на случай $A-B\in\mathscr{I}_1$ с чисто абсолютно непрерывными $A$ и $B$ (M. Rosenblum, Perturbations of continuous spectrum and unitary equivalence.—*Pacific J. Math.* 7 (1957), 997—1010), а затем на общий случай операторов со следом (теорема XI.8) (T. Kato, Perturbation of continuous spectra by trace class operators.—*Proc. Japan. Acad.* **33** (1957), 260—264). Эти результаты были получены в основном методами, характерными для стационарной задачи; полное доказательство в рамках нестационарной задачи было предложено Т. Като в его книге «Теория возмущений линейных операторов» (Пер. с англ.—М.: Мир, 1972).

Идея воспользоваться резольвентами чтобы распространить теорему Като-Розенблюма на случаи, когда $A-B$ не ограничен, принадлежит Путнаму (R. Putnam, Continuous spectra and unitary equivalence.—*Pac. J. Math.* 7 (1957), 993—995). Курода доказал ослабленный вариант теоремы XI.9, а именно: если $B-A$ относительно $B$-ограничен и $(A+i)^{-1}=(B+i)^{-1}+(A+i)^{-1}C^*D(B+i)^{-1}$, причем оба оператора $C(B+i)^{-1}$ и $D(A+i)^{-1}$ являются операторами Гильберта—Шмидта, то $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны (S. Kuroda, Perturbations of continuous spectra by unbounded operators, I, II.—*J. Math. Soc. Japan* **11** (1959), 247—262; **12** (1960), 243—257). Теорема XI.9 в том случае, когда операторы $A$ и $B$ ограничены снизу, доказана М. Бирманом в статье: Условия существования волновых операторов.—*ДАН СССР* **143** (1962), 506—509. Общий случай рассмотрен де Бранжем (L. de Branges, Perturbation of selfadjoint transformations.—*Amer. J. Math.* **84** (1962), 543—580), Бирманом и Крейном (М. Бирман, М. Г. Крейн, О теории волновых операторов и операторов рассеяния.—*ДАН СССР* **144** (1962), 475—478) и Бирманом (М. Бирман, Критерий существования волновых операторов.—*Изв. АН СССР*, сер. матем. 27 (1963), 883— 906).

Теорема XI.10 принадлежит Бирману (М. Бирман, Локальный критерий существования волновых операторов. — *Изв. АН СССР*, сер. матем. **32** (1968), 914—942), причем его доказательство считается очень трудным.

Оригинальные доказательства в теории Като—Бирмана были заметно труднее, чем приведенное у нас доказательство теоремы XI.7. Пирсон сначала высказал основную идею этого доказательства (D. B. Pearson, General theory of potential scattering with absorption at local singularities. — *Helv. Phys. Acta* **47** (1974), 249—264), а затем, следуя предложениям Жинибра и Като, представил полное доказательство (D. B. Pearson, A generalization of Birman's trace theorem. — *J. Funct. Anal.* **28** (1978), 182—186). Пирсон сформулировал эту теорему с дополнительным множителем $J$ (более ранние доказательства тоже можно расширить таким образом), что привело к унифицированному подходу, который мы излагаем. Приведенное нами доказательство теоремы XI.9 и доказательство в задаче 25, по-видимому, являются новыми. Доказательство в таком контексте теоремы XI.10 принадлежит Жинибру и Пирсону, а доказательство теоремы XI.13 — Дейфту (P. Deift, Classical Scattering Theory with a Trace Condition. — Princeton Series in Physics. Princeton Univ. Press, 1979). Литературные ссылки, относящиеся к теореме XI.13, приведены в замечаниях к § 10. Теорема XI.12 принадлежит Д. Яфаеву (Замечание о теории рассеяния для возмущенного полигармонического оператора. — *Матем. заметки* **15** (1974), 445—454). Мы приводим доказательства Рида и Саймона, которые переоткрыли результат Яфаева в статье, цитированной в замечаниях к § 10. Часть утверждения теоремы XI.12, касающаяся операторов $\Omega^{\pm}(A, B)$, следует непосредственно из теоремы Бирмана.

Теория Като—Бирмана была распространена Девисом на некоторые пары $\langle A, B\rangle$, где $A$ самосопряжен, а $V$ предполагается только таким, что $iB$ m-аккретивен (E. B. Davies, Two Channel Hamiltonians and the Optical Model of Nuclear Scattering. Preprint. — Oxford Univ. Press, 1978).

Принцип инвариантности (теорема XI.11) доказан в последовательно усложнявшихся условиях Бирманом в цитированных выше статьях 1962 и 1963 гг. и Като (T. Kato, Wave operators and unitary equivalence. — *Pacific J. Math.* **15** (1965), 171—180).

Общий принцип инвариантности — теорема XI.23 — принадлежит Чандлеру и Гибсону (C. Chandler and A. Gibson, Invariance principle for scattering with long-range (and other) potentials. — *Indiana Univ. Math. J.* **25** (1976), 443—460). Мы следуем их доказательству. Более ранние результаты были слабее, потому что там требовалось, чтобы $|t|^{\alpha}\|w'(t)\|\in L^1$ с некоторым $\alpha>1/2$ или по меньшей мере чтобы $\|w(t)-\Omega^{\pm}u\|=O(t^{-1/2})$ при $t\to\mp\infty$. Это не то, чтобы в точности слабее, но слабее для большинства практических приложений. Более ранние результаты появлялись в следующих работах: Л. А. Сахнович, Принцип инвариантности обобщенных волновых операторов. — *Функц. анализ и прилож.* **5** (1971), 61—68; В. Б. Матвеев, Принцип инвариантности для обобщенных волновых операторов. В сб.. Проблемы матем. физики **5** (1972), 77—85, и *Теор. и матем. физ.* **8** (1971), 49—54; J. A. Donaldson, A. G. Gibson, R. Hirsh. On the invariance principle of scattering theory. — *J. Funct. Anal.* **14** (1973), 131—145. Результат Чандлера и Гибсона сформулирован для более широкого класса функций $\varphi$ и применим к волновым операторам, модифицированным для дальнодействующих потенциалов (см. § 9) и для теории двух гильбертовых пространств.

Другие общие результаты об инвариантности волновых операторов были получены Волленбергом и Оберманом (M. Wollenberg The invariance principle for wave operators. — *Pacific J. Math.* **59** (1975), 303; P. Obermann, M. Wollenberg, Abel Wave Operators, I: General theory. — *Math Nachr.* **85** (1978), 141—159; II: Wave operators for functions of operators. — *J. Funct. Anal.* **30** (1978), 48—59). В последних работах показано, что если пользоваться более слабым понятием волнового оператора, то принцип инвариантности выполняется *всегда*.

Вообще говоря, неверно, что если $\varphi(A)-\varphi(B)$ принадлежит классу операторов со следом, то $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют. Возьмем, например, $\varphi(x)=x^2$ и $A$ = умножение на $x$, $B$ = умножение на $|x|$ в $L^2(\mathbb{R})$. Однако если функция $\varphi$ имеет обратную, это всегда верно, и, более общо, если для каждого $r$ существует допустимая функция $\varphi_r$, такая, что $\varphi_r(A)-\varphi_r(B)$ принадлежит классу операторов со следом и $\varphi_r$ взаимно однозначна на $(-r, r)$, то $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны. Этот результат обсуждается в книгах Като и Дейфта, цитированных выше. В качестве его типичного применения приведем такое доказательство теоремы XI.9: из того, что $(A+i)^{-1}-(B+i)^{-1}\in\mathfrak{I}_1$, следует, что $(A+ir)^{-1}-(B+ir)^{-1}\in\mathfrak{I}_1$ при всех $r\neq 0$, откуда вытекает, что вещественная часть $\varphi_r(A)-\varphi_r(B)$ принадлежит $\mathfrak{I}_1$, где $\varphi_r(x)=\operatorname{Re}(x+ir)^{-1}=x(x^2+r^2)^{-1}$. Это $\varphi_r$ удовлетворяет всем условиям теоремы, и, следовательно, $\Omega^{\pm}(A, B)$ существуют и полны.

Теорема XI.8 не выполняется, если $A-B$ — всего только оператор Гильберта—Шмидта, ибо, как доказал фон Нейман (J. von Neumann, Characterisierung des Spectrums eines Integral-Operators. — *Actualités Sci. Indust.* **229** (1935), 38—55), для любого данного самосопряженного $B$ существует $A$ с чисто точечным спектром, такой, что $A-B$ — оператор Гильберта—Шмидта. Этот результат был распространен на идеалы $\mathfrak{I}_p$ с $p>1$ в работе: S. Kuroda, On a theorem of Weyl — von Neumann. — *Proc. Japan Acad.* **34** (1958), 11—15.

Теория Като — Бирмана применялась ко многим проблемам, которые не отражены в этой книге. Существуют приложения к теории спектров операторов Теплица (M. Rosenblum, The absolute continuity of Toeplitz's matrices. — *Pacific J. Math.* **10** (1960), 987—996) и к рассеянию нейтронов (Y. Shizuta, On the fundamental equations of spatially independent problems of neutron thermalization theory. — *Progr. Theor. Phys.* **32** (1964), 489—511).

История формулировки теории рассеяния в двух гильбертовых пространствах будет подробнее рассказана в замечаниях к § 10. Отметим пока, что кинематика (предложения 4 и 5) была систематически развита в работе Като (T. Kato, Scattering theory with two Hilbert spaces. — *J. Funct. Anal.* **1** (1967), 342—369) и что теорема XI.13 принадлежит Белопольскому и Бирману (А. Белопольский, М. Бирман, Существование волновых операторов в теории рассеяния для пары пространств. — *Изв. АН СССР*, сер. матем. **32** (1968), 1162—1175.

Важность метода стационарной фазы для теории рассеяния была отмечена уже, во всяком случае, в статье Бренига и Хаага (W. Brenig, R. Haag, General quantum theory of collision processes. — *Fortschr. Phys.* **7** (1959), 183—242). Этот метод применен во многих работах о рассеянии на дальнодействующих потенциалах, например в статье Буслаева и Матвеева, и поднят на уровень высокого искусства в статье Л. Хёрмандера (обе они цитируются в замечаниях к § 9). Мы близко следуем Хёрмандеру в изложении теорем XI.14, XI.15 и XI.16. Теорема XI.17 существенна для теории рассеяния Хаага—Рюэля; об этом написано в замечаниях к § 16.

Теорема XI.20 появилась у Зейлера и Саймона (E. Seiler, B. Simon, Bounds in the Yukawa$_2$ quantum field theory: Upper bound on the pressure, Hamiltonian bound and linear lower bound. — *Commun. Math. Phys.* **45** (1975), 99—114). Теоремы, утверждающие, что $f(X)g(-i\nabla)$ принадлежит классу операторов со следом при соответствующих $f$ и $g$, восходят к Стайнспрингу (W. Stinespring, A sufficient condition for an integral operator to have a trace. — *J. Reine Angew. Math.* **200** (1958), 200—207). Его результаты позволяют брать $f$ такого вида, как в теореме XI.21, но сильно ограничивают $g$. Теорема XI.21 — это специальный случай результата Бирмана и Соломяка (М. Ш. Бирман и М. З. Соломяк, Об оценках сингулярных чисел интегральных операторов, III. Операторы в ограниченных областях. — *Вестник ЛГУ*, сер. мат., мех., астр. **24** (1969), 35—48). Они вводят норму

$$\|f\|_{\mathrm{BS}}=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\Big(\int_{0\leqslant x_i\leqslant 1}|f(x-m)|^2\,dx\Big)^{1/2}$$

и показывают, что если $\| f \|_{BS}$ конечна и $g \in L^2_\delta$, то $f(x) g(-i\nabla)$ имеет след. Так как легко показать, что $\| f \|_{BS} \leqslant C \| f \|_{L^2_\delta}$, из их результата вытекает теорема XI.21. На самом деле можно показать (задача 37), что достаточно, чтобы $\| f \|_{BS}$ и $\| g \|_{BS}$ были конечны. Обратно, если $f$ и $g$ ненулевые, то это условие является также необходимым, см. книгу Саймона: B. Simon, Trace Ideal Methods. — London Math. Soc. Lecture Notes, London and New York: Cambridge Univ. Press, 1979. Като независимо доказал теоремы XI.20 и XI.21 (не опубликовано). Мы следуем доказательству Като теоремы XI.21. Теорема XI.22 принадлежит Цвикелю: M. Cwickel, Weak type estimates for singular values and the number of bound states of Schrödinger operators. — *Ann. Math.* **106** (1977), 93—102. Ранее Саймон доказал этот результат при более сильных предположениях: $g = L^{q'}_w(\mathbb{R}^n)$, $q' = q/(q-1)$ и $f \in L^{q-\varepsilon} \cap L^{q'-\varepsilon}$ с некоторым $\varepsilon > 0$ (B. Simon, Analysis with weak trace ideals and the number of bound states of Schrödinger operators. — *Trans. Amer. Math. Soc.* **224** (1977), 367—380). Есть также теорема типа теоремы XI.22 для случая $1 < q < 2$ с нормами, связанными с $\| \cdot \|_{BS}$; см. книгу Саймона.

Соотношение $H^2_D - m^2 = 2m(1 \otimes H_S)$, использованное при обсуждении примера 2 в третьем дополнении, восходит по крайней мере к Джонсону и Липпману: M. H. Johnson, B. A. Lippman, Motion in a constant magnetic field. — *Phys. Rev.* **76** (1949), 828—832. Соответствующая инвариантность рассеяния «очевидна» для физика, представляющего себе задачу в стационарной постановке; см. замечания о принципе инвариантности в третьем дополнении к § 8. На первый взгляд может показаться странным, что удается доказать существование $\Omega^{\pm}(H_S(A), H_S(0))$, не предполагая ничего о $B$ и делая предположения лишь об $A$. Заметим, что $B = \operatorname{rot} A$ может убывать на бесконечности медленнее, чем $A$, если $A$ очень быстро осциллирует. Таким образом, упомянутое выше явление связано с идеями дополнения 2 к § 8 и указанной в замечаниях к этому разделу литературой. Фактически можно доказать многие из упоминаемых там результатов Комбескюра—Жинибра на основе тождества $H^2_D - m^2 = 2m(1 \otimes H_S)$.

*§ XI.4.* Теорема XI.24 была впервые доказана для случая $V \in L^2$ Куком в его основной статье, цитированной в замечаниях к предыдущему разделу. Распространение на случай потенциалов с убыванием вида $|x|^{-1-\varepsilon}$ принадлежит Хаку (M. Hack, On the convergence to the Møller wave operators. — *Nuovo Cimento* **9** (1958), 731—733). Примерно в то же время Курода доказал близкий результат (S. Kuroda, On the existence and unitarity property of the scattering operator. — *Nuovo Cimento* **12** (1959), 431—454). Расширение на $n$ измерений рассмотрено Браунелом (F Brownell, A note on Cook's wave matrix theorem. — *Pacific J. Math.* **12** (1962), 47—52). Для центральных потенциалов этот результат улучшен Лундквистом (E. Lundquist, On the existence of the scattering operator. — *Ark. Mat.* **7** (1967), 145—157). Результаты Лундквиста вытекают из теоремы XI.31, однако он пользовался лишь методом Кука. Расширение метода Кука, включающее магнитные поля, можно найти у Икэбе и Тайоси (T. Ikebe, T. Tayoshi, Wave and scattering operators for second order elliptic operators in $\mathbb{R}^3$. — *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto* **A4** (1968), 483—496).

Обобщения теоремы Хака—Кука на $-\Delta + V$, где $V$ не обязательно оператор умножения, содержится в работах: K. Jörgens, J. Weidmann, Zur Existenz der Wellenoperatoren. — *Math. Z.* **131** (1973), 141—151; K. Veselič, J. Weidmann, Zur Existenz der Wellenoperatoren für eine allgemeine Klasse von Operatoren. — *Math. Z.* **134** (1973), 255—274; Asymptotic estimates of wave functions and the existence of wave operators. — *J. Funct. Anal.* **17** (1974), 61—77; C. Wilcox, Scattering states and wave operators in the abstract theory of scattering. — *J. Funct. Anal.* **12** (1973), 257—274; A. M. Berthier, P. Collet, Existence and completeness of the wave operators in scattering theory with momentum dependent potentials. — *J. Funct. Anal.* **26** (1977), 1—15.

Теорема XI.25 содержится в статье Купша и Сандаса, а теорема XI.26 есть в сущности в статье Шехтера. Обе эти статьи цитировались в замечаниях к § 3. Теорема XI.27 принадлежит Аврону и Хербсту (J. Avron, I. Herbst, Spectral and scattering theory of Schrödinger operators related to the Stark effect. — *Commun. Math. Phys.* 52 (1977), 239—254). Дальнейшее обсуждение теоремы XI.25 можно найти у Робинсона (D. Robinson, Scattering, theory with singular potentials I. The two-body problem. — *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A* 21 (1974), 185—216). Теоремы типа XI.30 при $n \leqslant 3$ появились в цитированной выше статье Куроды. Теорема XI.31 тоже принадлежит Куроде (S. Kuroda, On a theorem of Green and Lanford. — *J. Math. Phys.* **3** (1962), **933—935**).

Соотношение $\overline{S\psi(x)} = (S^*\overline{\psi})(x)$ называется «инвариантностью относительно отражения времени» вследствие одной фундаментальной симметрии гамильтониана, которую мы сейчас рассмотрим. Обозначим отображение $\psi \mapsto \overline{\psi}$ через $T$. Это антилинейное отображение и $TH_0 = H_0T$, $TV = VT$. Следовательно, $Te^{iH_0t} = e^{-iH_0t}T$ и $Te^{iHt} = e^{-iHt}T$. Вследствие этого изменения знака $T$ называется отражением времени. Легко видеть, что $T\Omega^{\pm} = \Omega^{\mp}T$, так что $T(\Omega^-)^*\Omega^+ = (\Omega^+)^*\Omega^-T = [(\Omega^-)^*\Omega^+]^*T$, откуда $\overline{S\psi} = S^*\overline{\psi}$. Для частиц со спином отражение времени сложнее. Значение отражения времени в квантовой теории впервые было выявлено Вигнером (E. P. Wigner, Über die Operation der Zeitumkehr in der Quantenmechanik. — *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Mat.-Phys. Kl. II* (1931), 546—559).

Теоремы типа XI.32 получены Дейфтом и Саймсном (P. Deift, B. Simon, On the decoupling of finite singularities from the question of asymptotic completeness in two-body quantum systems. *J. Funct. Anal.* 23 (1976), 218—238). Дейфт и Саймон опирались на отделение граничных условий Дирихле (см. § XIII.15) и оценки. связанные с фейнмановыми интегралами по траекториям. Их результаты были существенно обобщены и улучшены Комбескюром и Жинибром (M. Combescure, J. Ginibre, Scattering and local absorption for the Schrödinger operator. — *J. Funct. Anal.* 29 (1978), 54—73), которые воспользовались гладким обрезанием $J$, как и в приведенном нами доказательстве. Наш вывод построен по их образцу. Обе статьи появились как результат попыток понять пример Пирсона. Контрпример Пирсона появился в статье: D. Pearson, An example in potential scattering illustrating the breakdown of asymptotic completeness. — *Commun. Math. Phys.* 40 (1975), 125—146, где можно найти все относящиеся к нему подробности. До статьи Пирсона было известно несколько примеров с $\operatorname{Ran}\Omega^+ \neq \operatorname{Ran}\Omega^-$, но всем им было свойственно патологическое поведение на $\infty$; см.: T. Kato. S. Kuroda, A remark on the unitarity property of the scattering operator. — *Nuovo Cimento* 14 (1959), 1102—1107; The abstract theory of scattering. — *Rocky Mountain J. Math.* **1** (1971), 127—171.

Литература о кластерных свойствах дана в замечаниях к следующему разделу.

Существует обширная литература по теории рассеяния на зависящих от времени потенциалах: E. Davies, Time-dependent scattering theory. — *Math. Ann.* 210 (1974), 149—162; J. Goldstein, Temporally inhomogeneous scattering theory. In: *Analyse fonctionnelle et applications* (L. Nachbin, ed.), pp. 125—132. — Paris: Hermann, 1975; J. Goldstein, C. Monlezun, Temporally inhomogeneous scattering theory, II; approximation theory and second order equations. — *SIAM J. Math. Anal.* 7 (1976), 276—290; J. Hendrickson. Temporally inhomogeneous scattering theory for modified wave operators. — *J. Math. Phys.* 16 (1975), 768—771; $N$-body scattering into cones with long-range time-dependent potentials. — *J. Math. Phys.* 17 (1976), 729—733; J. Howland, Stationary scattering theory for time-dependent Hamiltonians. — *Math. Ann.* 207 (1974), 315—

335; A. Inoue, An example of temporally inhomogeneous scattering.—*Proc. Japan Acad.* **49** (1973), 407—410; Wave and scattering operators for an evolving system $d/dt-iA(t)$.—*J. Math. Soc. Japan* **26** (1974), 608—624; C. Monlezun, Temporally inhomogeneous scattering theory.—*J. Math. Anal. Appl.* **47** (1974), 133—152; E. Schmidt, On scattering by time-dependent perturbations.—*Indiana Univ. Math. J.* **24** (1975) 925—935; K. Yajima, Scattering theory for Schrödinger equations with potentials periodic in time.—*J. Math. Soc. Japan* **29**, (4) (1977), 729—743. S. T. Kuroda, H. Morita, An estimate for solutions of Schrödinger equations with time-dependent potentials and the associated scattering theory.—*J. Fac. Sci. Tokyo* 24 (1977), 459—475; J. Howland, Scattering theory for Hamiltonians periodic in time.—*Indiana Univ. Math. J.* 28 (1979), 471—494.

Пример 3 рассмотрен Девисом в работе: E. B. Devies, Scattering from infinite sheets.—*Proc. Cambridge Philos. Soc.* 82 (1977), 327—334, где можно найти детали доказательства того, что $\mathrm{Ran}\,\Omega^+=\mathrm{Ran}\,\Omega^-$. Девис доказал также результат, интересный для физической интерпретации рассеяния одной ячейкой. А именно: если $|W(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-\alpha}$ и

$$V_L(x)=\sum_{n_2,\,n_3\in\mathbb{Z}} W(x_1,\ x_2-n_2L,\ x_3-n_3L),$$

то волновые операторы $\Omega^\pm(-\Delta+V_L,\ -\Delta)$ сильно сходятся к $\Omega^\pm(-\Delta+W,\ -\Delta)$ при $L\to\infty$ Этот результат следует из общей теоремы о сходимости (задача 16).

Пример 4 рассмотрен Девисом и Саймоном (E. B. Davies, B. Simon, Scattering theory for systems with different spatial asymptotics on the left and right.—*Commun. Math. Phys.* **63** (1978), 277—301). Более ранние упоминания о рассеянии на потенциалах $V(x)$, у которых пределы при $x\to\infty$ и $x\to-\infty$ различны, можно найти, например, в работах: P. Alsholm, T. Kato, Scattering theory with long range potentials.—*Proc. Amer. Math. Soc. Institute on Partial Defferential Equations* 1971. pp. 393—399 (см. замечание (4) на стр. 394), и S. Ruijsenaars, P. Bongaarts, Scattering theory for one-dimensional step potentials.—*Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A* **26** (1977), 1—17. См. § 17, где развит другой подход к вопросу о полноте в двухчастичных системах.

*§ XI. 5.* Дополнительное обсуждение $N$-частичных квантовых систем см. в § XI.17, XIII.2, XIII.3, XIII.5, XIII.10, XIII.11 и XIII.13. Многие вопросы и, в частности, теория рассеяния кратко и хорошо изложены в книге: W. Hunziker, Mathematical Theory of Multi-particle Quantum Systems.—Lectures in Theoretical Physics, vol. X (A. Barut, W. Britten, eds.).—New York: Gordon and Breach, 1968.

Формальные основы $N$-частичного рассеяния с применением волнового оператора и, в частности, ортогональность каналов впервые рассматривались Яухом во второй из серии работ, указанных в замечаниях к § 1. Теорема Хака (теорема XI.34) опубликована в его работе: M. Hack, Wave operators in multichannel scattering.—*Nuovo Cimento ser. X* **13** (1959), 231—236. Обобщение теоремы Хака на потенциалы с локальными особенностями определенного вида (по существу, $n$-частичный аналог теоремы XI.25) получено в работе: W. Hunziker, Time-dependent scattering theory for singular potentials.—*Helv. Phys. Acta.* **40** (1967), 1052—1062. См. также P. Ferrerro, O. de Pazzis, D. Robinson, Scattering theory with singular potentials, II. The $N$-body problem and hard cores.—*Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A* **21** (1974), 217—232.

Наиболее исчерпывающие результаты о полноте в $N$-частичной задаче до сих пор были получены в случае $N=3$. Основная идея, математическая техника и самые первые результаты принадлежат здесь Л. Д. Фаддееву (см. его монографию Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц.—Труды МИАН им. В. А. Стеклова, вып. 69, 1963). Существенные технические усовершенствования и обобщения этих результатов даны

Томасом (L. Thomas, Asymptotic completeness in two and three particle quantum mechanical scattering. — *Ann. Phys.* **90** (1975), 127—165), Жинибром и Муленом (J. Ginibre, M. Moulin, Hilbert space approach to the quantum mechanical three body problem. — *Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A* 21 (1974), 97—145; в частности, в этой работе доказана теорема XI.37), а также Д. Р. Яфаевым (О сингулярном спектре в системе трех частиц. — *Матем. сб.* **106** (1978), 622—640; К теории многоканального рассеяния в паре пространств. — *ТМФ* **37** (1978), 48—57) и Ядзимой (K. Yajima, An abstract stationary approach to three body scattering. — *J. Fac. Sci. Tokyo* **25** (1978), 109—132).

Было много попыток распространить программу Фаддеева на системы $N$ тел. Аналоги основных интегральных уравнений Фаддеева выведены в работах О. А. Якубовского (Об интегральных уравнениях в теории $N$-частичного рассеяния. — *Яд. физика* 5 (1967), 937—942) и Ф. А. Березина (Асимптотика собственных функций многочастичного уравнения Шредингера. — *ДАН СССР* 163 (1965), 795—798). Некоторая часть этих исследований обобщена на основе уравнений Якубовского Хеппом (K. Hepp, On the quantum mechanical $N$-body problem. — *Helv. Phys. Acta* **42** (1969), 425—458) и на основе уравнений Березина И. М. Сигалом (Асимптотическая полнота систем многих частиц. — *ДАН СССР* **204** (1972), 795—798). Ни то, ни другое обобщение не полно, поскольку налагается дополнительное условие: определенные интегральные уравнения в некоторых вспомогательных банаховых пространствах не должны обладать решениями. В случае $N=3$ Фаддеев сумел преодолеть эту трудность и полностью завершить свой анализ, опираясь на известные результаты о двухчастичных системах. Абстрактная переформулировка программы Фаддеева в рамках теории разложений по собственным функциям Като — Куроды (см. замечания к § 6) дана в работе: J. Howland, Abstract stationary theory of multichannel scattering. — *J. Funct. Anal.* 22 (1976), 250—282.

Для некоторых специальных многоканальных систем с числом частиц больше трех утверждения об асимптотической полноте делались в работах Хагедорна (G. Hagedorn, Asymptotic completeness for a class of four particle Schrödinger operators. — *Bull. Amer. Math. Soc.* 84 (1978), 155—156) и Сигала (I. Sigal, On quantum mechanics of many-body systems with dilation analytic potentials. — *Bull. Amer. Math. Soc.* 84 (1978), 152—154).

Другой подход, отличающийся от подхода Фаддеева, был выдвинут Дейфтом и Саймоном (P. Deift, B. Simon, A time dependent approach to the completeness of multiparticle quantum systems. — *Comm. Pure Appl. Math.* **30** (1977), 573—583). Ими был доказан некоторый аналог предложения 3 из § 3.

Кластерные свойства многоканальных волновых операторов и операторов рассеяния впервые были установлены в работе Хунцикера (W. Hunziker, Cluster properties of multiparticle systems. — *J. Math. Phys.* **6** (1965), 6—10). Аналогичные кластерные свойства по отношению к трансляциям по времени выведены Тэйлором (J. R. Taylor, Timelike cluster properties in nonrelativistic scattering. — *J. Math. Phys.* 8 (1967), 2131—2137). Изучение этих свойств мотивировалось соображениями о кластерных свойствах релятивистской $S$-матрицы, высказанными в работе: E. H. Wichmann, J. H. Crichton, Cluster decomposition properties of the $S$-matrix. — *Phys. Rev.* **132** (1963), 2788—2799. Для квантовой теории поля, подчиняющейся аксиомам Вайтмана и обладающей массовой щелью, кластерные свойства $S$-матрицы доказаны Хеппом (K. Hepp, Spatial cluster decomposition properties of the $S$-matrix. — *Helv. Phys. Acta* **37** (1964), 659—662; One-particle singularities of the $S$-matrix in quantum field theory. — *J. Math. Phys.* **6** (1965), 1762—1767). Одно важное следствие кластерных свойств заключается в том, что рассеяние заряженных частиц полностью определяется состояниями рассеяния с зарядом нуль. Например, электрон-электронное рассеяние можно изучать, рассматривая состояния с двумя электронами и двумя сильно удаленными позитронами. В силу кластерного свойства, электрон-электронная амплитуда рассеяния может быть получена в пределе при удалении позитронов на бесконечность.

Теория Като—Бирмана применялась для доказательства полноты $N$-частичного рассеяния в области энергий, где невозможен развал системы на три или более кластеров. Указанный результат принадлежит Комбу (J. M. Combes, Time dependent approach to nonrelativistic multichannel scattering.— *Nuovo Cimento A* 64 (1969), 111—144); см. также B. Simon, Geometric methods in multiparticle quantum systems.— *Commun. Math. Phys.* 55 (1977), 259—274; $N$-body scattering in the two-cluster region.— *Commun. Math. Phys.* 58 (1978), 205—210.

Ссылки для дальнейшего изучения аналитических свойств амплитуды рассеяния в случае двух частиц приводятся в замечаниях к § 7. В случае $N$ частиц аналитические свойства отчасти затрагивались в указанных выше работах Фаддеева и Хеппа; более полно они обсуждаются в работах: P. Federbush, Results on the analyticity of many-body scattering amplitudes in perturbation theory.— *J. Math. Phys.* 8 (1967), 2415—2419; M. Rubin, R. Sugar, G. Tiktopoulos, Dispersion relations for 3 particle scattering amplitudes. I, II.— *Phys. Rev.* 146 (1966), 1130—1149; 159 (1967), 1348—1362; F. Riahi, On the analyticity properties of the $N$-body scattering amplitude in non-relativistic quantum mechanics.— *Helv. Phys. Acta* 42 (1969), 299—329.

Существует обширная физическая литература о многих очень интересных аспектах $N$-частичного квантового рассеяния помимо существования и полноты. В качестве введения к этой литературе читатель может обратиться к монографии Ньютона, указанной в замечаниях к § 2, и к книгам М. Л. Голдбергера и К. М. Ватсона, Теория столкновений. Пер. с англ.— М.: Мир, 1967, и Нэттолла и Ватсона (J. Nuttall, K. Watson, Topics in Several Particle Dynamics.— San Francisco: Holden-Day, 1967).

*§ IX.6.* Технические детали доказательства теоремы XI.41 можно найти в монографии Саймона (B. Simon, Quantum Mechanics for Hamiltonians Defined as Quadratic Forms.— Princeton Univ. Press, 1971). В основном это доказательство содержится в § IV.5 этой монографии, хотя для леммы 1 требуется § II.9, для леммы 2—§ III.4, для леммы 5—§ V.3, а лемма 6 находится в § V.4. Детали, касающиеся теоремы XI.42, можно найти в § V.5 указанной монографии. По поводу теоремы о нулях функции, аналитической в открытой верхней полуплоскости и непрерывной в ее замыкании, читателю следует обратиться к книге: К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций. Пер. с англ.— М.: Мир, 1963.

Разложения по собственным функциям непрерывного спектра такого типа, как в теореме XI.41, были впервые установлены для обыкновенных дифференциальных уравнений К. Кодаирой и Э. Титчмаршем в 1940-х гг., хотя общая идея разложения по собственным функциям восходит еще к трудам Д. Бернулли и Ж. Фурье. Исторический обзор и многочисленные ссылки можно найти у Данфорда и Шварца, т. II, стр. 747 русского перевода. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений применима к операторам Шредингера в $\mathbb{R}^3$ со сферически симметричными потенциалами, поскольку такие операторы являются прямыми суммами обыкновенных дифференциальных операторов (см. дополнение к § X.1). Этот подход и возникающие в его рамках разложения по собственным функциям были предложены Грином и Ланфордом (T. Green, O. Lanford III, Rigorous derivation of the phase shift formula for the Hilbert space scattering operator of a single particle.— *J. Math. Phys.* 1 (1960), 131—140), а также Вейдманом (J. Weidmann, Zur Spectraltheorie von Sturm—Liouville Operatoren.— *Math. Z.* 98 (1967), 268—302). См. дополнение 3 к § 8.

Наиболее раннее изучение разложений по собственным функциям непрерывного спектра, связанных с дифференциальными операторами в частных производных, проведено А. Я. Повзнером в его работе: О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta u+cu$.— *Матем. сб.* 32 (1953), 109—156. Связь с теорией рассеяния впервые была указана в другой его работе: О разложениях по собственным функциям, являющимся решениями задачи рассеяния.— *ДАН СССР* **104** (1955), 360—363; см. также: T. Ikebe, Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operators and their application to scattering theory.— *Arch. Rational Mech. Anal.* **5** (1960), 1—34 (Erratum: Remarks on the orthogonality of eigenfunctions for the Schrödinger operator on $\mathbb{R}^n$.— *J. Fac. Sci. Tokyo Univ., Sect. I*, **17** (1970), 355—361).

Л. Д. Фаддеев в работе: О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора Шредингера.— *Вестник ЛГУ* **7** (1957), 164—172, доказал равномерную сходимость разложений по собственным функциям. Другой подход к разложениям по собственным функциям, отличный от подхода Повзнера—Икэбе, был развит Д. М. Эйдусом в работе: Принцип предельной амплитуды.— *УМН* **24** (1969), 91—156.

Главная идея нашего доказательства теоремы XI.41, состоящая в том, что связь между функцией Грина и собственными функциями при помощи формулы Стоуна приводит к (82e′), заимствована у Икэбе. Изложение Икэбе отличается от нашего главным образом в двух родственных направлениях. Во-первых, налагаются другие условия на потенциал $V$: требуется лишь $V(r) = O(r^{-2-\varepsilon})$ вместо $V \in L^1$, однако потенциалы должны быть непрерывными по Гёльдеру всюду, за исключением конечного множества точек. Во-вторых, Икэбе вводит вспомогательное банахово пространство, содержащее неизмененную функцию Липпмана—Швингера $\varphi(x, k)$. Для решения уравнения Липпмана—Швингера он вынужден опираться на теорию компактных операторов в произвольных банаховых пространствах, и при изучении ядра вместо критерия Гильберта — Шмидта используются соображения равностепенной непрерывности. Прием факторизации потенциала в виде $V = |V|^{1/2} V^{1/2}$ и перехода к модифицированному уравнению Липпмана—Швингера независимо был предложен Рольником (H. Rollnik, Streumaxima und gebundene Zustände.— *Z. Phys.* **145** (1956), 639—653), Гроссманом и Ву (см. замечания к § 7) и Дж. Шварцем (J. Schwartz, Some non-self-adjoint operators.— *Comm. Pure Appl. Math.* **13** (1960), 609—639). При факторизации $V = |V|^a V^{1-a}$, где $1/4 < a < 3/4$, получается модифицированное уравнение Липпмана—Швингера, ядро которого принадлежит классу Гильберта—Шмидта при условии $\int |V(x)|^{2a} |V(y)|^{2-2a} |x-y|^{-2} dx\, dy < \infty$, а неоднородный член лежит в $L^2$, если $\int |V(x)|^{2-} dx < \infty$. В силу неравенства Соболева эти интегралы конечны, если $V \in L^{3/2}$. С учетом этих соображений можно использовать методы данного раздела для рассмотрения потенциалов с поведением $O(r^{-2-\varepsilon})$ на бесконечности (задача 57).

Метод Икэбе применялся для изучения операторов Шредингера в пространстве с числом измерений $n \neq 3$ в работе: D. Thoe, Eigenfunction expansions associated with Schrödinger operators in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 4$.— *Arch. Rational Mech. Anal.* **26** (1967), 335—356, и для изучения нелокальных потенциалов в работе: M. Bertero, G. Talenti, G. A. Viano, Eigenfunction expansions associated with Schrödinger two-particle operators.— *Nuovo Cimento A* **62** (1969), 27—87. Построения, аналогичные проведенным Икэбе и Тое, но с использованием других условий, можно найти в работе: P. Alsholm, G. Schmidt, Spectral and scattering theory for Schrödinger operators.— *Arch. Rational Mech. Anal.* **40** (1971), 281—311.

Обсуждаемое в этом разделе разложение по собственным функциям Повзнера—Икэбе следует отличать от разложения по собственным функциям Гординга и Гельфанда которое рассмотрено в книге: K. Maurin, General Eigenfunction Expansions and Unitary Representations of Topological Groups.— Warszawa: PWN, 1968. Это последнее разложение является абстрактным и сопоставляется любому оператору. Факт его существования не дает никакой информации о спектре; в нем не содержится почти ничего, кроме некоей удобной формы записи спектральной теоремы. С другой стороны, разложения Повзнера—Икэбе говорят о связи с теорией рассеяния асимптотической полноте и отсутствии сингулярного спектра.

Обобщения разложений Повзнера — Икэбе на более абстрактную постановку задачи, включая некоторые другие эллиптические дифференциальные операторы, обсуждались в серии работ Куроды (S. Kuroda Stationary theory of scattering and eigenfunction expansions I, II.— *Sûgaku* 18 (1966), 74—85, 135—144; Perturbation of eigenfunction expansions.— *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 57 (1967), 1213—1217, а также (главная статья этой серии) An abstract stationary approach to perturbation of continuous spectra and scattering theory.— *J. Analyse Math.* **20** (1967), 57—117). Идеи и методы Куроды тесно связаны со «стационарными методами» Фридрихса, которые мы обсуждаем здесь, а также с методами Агмона, Куроды и Лавина, которые мы рассматриваем в § XIII.8. Отметим еще раз, что разделение между «теорией рассеяния» и «спектральными свойствами» содержит элемент произвола. Указанные работы предшествовали абстрактной теории Като — Куроды, которую мы обсуждаем в конце замечаний к данному разделу.

Наше обсуждение истории разложений по собственным функциям будет неполным, если мы не попытаемся дать общую характеристику «стационарных методов». Во многих отношениях «старомодная» наивная теория рассеяния, описываемая ниже в замечаниях к данному разделу, является стационарной картиной, однако «современная» стационарная теория в физике, вообще говоря, основана на следующих двух важных работах: B. A. Lippmann, J. Schwinger, Variational principles for scattering processes I.— *Phys. Rev.* 79 (1950), 469—480; M. Gell'Mann, M. L. Goldberger, The formal theory of scattering.— *Phys. Rev.* **91** (1953), 398—408. Уравнение Липпмана — Швингера появилось в первой из этих работ. В статье Гелл-Манна и Голдбергера было предложено использовать «абелевы пределы», т. е. $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon t} f'(t)\,dt$ вместо $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ (дискретный вариант такого предела восходит к Абелю), и приводилась формула $S = 1 - 2\pi i\delta(E-E')\,T(k, k')$. Эти стационарные методы, т. е. методы, не использующие прямо предела *по времени*, в последние 25 лет настолько доминировали в физической литературе, что более естественная зависящая от времени картина рассеяния нередко совершенно упускалась из вида! Пример, в котором абелев предел для волновых операторов существует и является унитарным, хотя обычные волновые операторы не существуют, приводится в работе Хауленда (J. Howland, Banach space techniques in the perturbation theory of self-adjoint operators with continuous spectrum.— *J. Math. Anal. Appl.* **20** (1967), 22—47).

В работе: T. Ikebe, On the phase shift formula for the scattering operator.— *Pacific J. Math.* 15 (1965), 511—523, Т. Икэбе доказал теорему XI.42 для класса потенциалов, подчиняющихся его форме разложения по собственным функциям.

В математической литературе под названием «стационарных методов» фигурирует другая система идей. Сам метод и многочисленные ссылки на литературу можно найти в § X.5 книги Като (указанной в замечаниях к § 3). Многие идеи этого метода восходят к работе Фридрихса 1948 г. (см. замечания к § 3). Основным уравнением теории служит интегральное уравнение, используемое в книге Като при доказательстве теоремы Като — Бирмана. Допустим для простоты, что $H_0$ и $V$ ограничены, $H = H_0 + V$ и $H_0$ имеет только абсолютно непрерывный спектр. Тогда, если существует $\Omega^-(H, H_0)$, то

$$\Omega^- = I + i\int\limits_0^\infty e^{itH_0} V \Omega^- e^{-itH_0}\,dt.$$

Введем символ $\Gamma^+$ для операции $T \longrightarrow \Gamma^+(T) = i\int\limits^{\infty} e^{itH_0} T e^{-itH_0}\,dt$, в том случае когда этот интеграл существует (со сходимостью в сильной топологии); получим уравнение Фридрихса

$$\Omega^- = I + \Gamma^+ (V\Omega^-). \qquad (338)$$

Здесь важно, что $\Gamma^+(T)$ обладает двумя абстрактными свойствами: (a) $T = \Gamma^+(T) H_0 - H_0 \Gamma^+(T)$; (b) $\Gamma^+(T) e^{itH_0} \longrightarrow 0$ в сильном смысле при $t \longrightarrow \infty$. Поэтому $\Gamma^+(\cdot)$ можно рассматривать как операцию, «обратную» к $[H_0, \cdot]$ и подчиняющуюся «граничному условию» (b). Абстрактные свойства (a) и (b) полностью характеризуют $\Gamma^+(T)$. Используя эту характеризацию $\Gamma^+$, иногда возможно решить уравнение (338) с помощью итераций, по крайней мере если потенциал $V$ в некотором смысле «мал». Опять-таки и здесь существует связь со спектральным анализом. Весьма близкую технику мы будем рассматривать в § XIII.7.

Теорема XI.43 (a) появилась в работах: Л. Д. Фаддеев, Единственность решения обратной задачи рассеяния.— *Вестник ЛГУ* **7** (1956), 126—130; C. Zemach, A. Klein, The Born expansion in nonrelativistic quantum theory I.— *Nuovo Cimento* **10** (1958), 1078—1087. Обобщение на $n$ измерений обсуждается в работах: W. Faris, Perturbations of non-normalizable eigenvectors.— *Helv. Phys. Acta* **44** (1971), 930—936; Time decay and the Born series.— *Rocky Mountain J. Math.* **1** (1971), 637—648. Теорема XI.43 (b) доказана в работе: M. Scadron, S. Weinberg, J. Wright, Functional analysis and scattering theory.— *Phys. Rev.* **135** (1964), B202—B207. Родственные результаты по теории рассеяния при малых константах связи обсуждаются в § XIII.7, XII.8 и замечаниях к ним. Применение методов суммирования и, в частности, аппроксимантов Паде для «суммирования» ряда Борна в тех областях, где он расходится, рассматривается в работах: J. R. Chisholm, Solution of linear integral equations using Padé approximants and the Jost function.— *Nuovo Cimento A* **61** (1969), 747—754; J. L. Basdevant, B. W. Lee, Padé approximation and bound states: Exponential potential.— *Nuclear Phys. B* **13** (1969), 182—188.

Теперь мы хотели бы обсудить «наивную теорию рассеяния», которая восходит к работе Борна (M. Born, Quantenmechanik der Stossvorgänge.— *Z. Phys.* **38** (1926), 803—827). Это поможет нам включить теорему XI.41 в определенную перспективу и установить связь с тем, что читатель, вероятно, встречал в учебниках по квантовой механике. В типичном эксперименте по рассеянию пучок с *приблизительно* постоянной энергией $E$ посылается в мишень. Допустим, что мишень состоит из $N$ частиц. В обычном приближении предполагают, что результат равен $N$-кратному результату рассеяния на одной из частиц мишени. Справедливость этого допущения зависит от нескольких факторов, которые в большинстве экспериментов имеют место (когда же это не так, требуется более сложный анализ). (1) Расстояния между частицами мишени намного больше «радиуса» сил, т. е. их характеристического параметра убывания. В твердой мишени типичные расстояния между частицами равны $R_0 \approx 10^{-8}$ см, а типичные силы в ядерных экспериментах имеют радиус порядка $10^{-13}$ см. (2) С хорошим приближением должно выполняться то свойство, что каждая частица пучка, проходя через мишень, рассеивается не более чем на одной частице мишени. Если представлять себе мишень из «слоев», расположенных через каждые $10^{-8}$ см, то вероятность рассеяния на каждом слое равна приблизительно $\sigma/\pi R^2$, где $\sigma$ есть полное сечение, а $R$ — расстояние между частицами мишени. Поскольку в типичных ядерных экспериментах $\sigma < 10^{-25}$ см$^2$, то эта вероятность — порядка $10^{-9}$. Значит, в мишени толщиной $10^{-2}$ см «вероятность» кратного столкновения составляет около $10^{-3}$, так что в типичных случаях (2) справедливо. (3) В соответствии с понятиями квантовой механики нельзя считать, что данная частица пучка рассеивается на какой-то определенной частице мишени; скорее, существуют амплитуды рассеяния на каждой из частиц мишени, и наблюдаемая амплитуда является квадратом суммы $N$ отдельных амплитуд. Чтобы эта величина равнялась умноженному на $N$ квадрату одной типичной амплитуды, необходимо отсутствие интерференционных эффектов. В свою очередь для этого длина волны де Бройля $\lambda_D$ частицы в пучке должна быть намного меньше расстояния между частицами. Опять-таки в ядерном эксперименте с энергией налетающих протонов 10 Мэв $\lambda_0 \approx 10^{-13}$, т. е. гораздо меньше $R$. Таким образом, в типичной ситуации можно считать пучок рассеивающимся на единственной частице мишени, если верно учесть нормировочные множители, включающие плотности числа частиц мишени и налетающего пучка.

Очередное приближение состоит в том, что пучок считают «бесконечно» протяженным. Математически это весьма жесткое допущение, поскольку оно приводит к ненормируемым состояниям, однако физически оно гораздо слабее перечисленных выше приближений (1)—(3)! Итак, представим себе, что мы сначала имеем плоскую волну $e^{ikz}$. Ее импульс есть $\langle 0, 0, k\rangle$ в $\mathbb{R}^3$ (в системе единиц с $\hbar=1$), так что это — плоская волна, «приходящая» из $z=-\infty$. После рассеяния в области, находящейся очень далеко от мишени, мы ожидаем найти уходящую волну сферического типа, но с плотностью, зависящей от угла рассеяния. Если $V$ сферически симметричен, эта волна при больших $r$ должна иметь вид $f(\theta)e^{ikr}/r$, где $f(\theta)$ характеризует рассеяние. Знак $+$ в экспоненте $e^{+ikr}$, связанный, как мы дальше увидим, со знаком в уравнении Липпмана—Швингера, необходим для того, чтобы волна была *уходящей*, т. е. чтобы ее импульс был направлен вовне. Плотность налетающего пучка на единицу площади и единицу времени равна $1/v$, где $v$ — скорость частицы. Выделяя площадку $r^2 d\Omega$, расположенную под углом рассеяния $\theta$, мы наблюдаем за единицу времени $\{[|f(\theta)|^2/r^2]\, r^2 d\Omega\}/v$ частиц. Таким образом, дифференциальное сечение рассеяния равно

$$d\sigma/d\Omega = |f(\theta)|^2.$$

Главное допущение наивной теории рассеяния заключается в том, что «состояние рассеяния» есть собственная функция уравнения Шредингера, имеющая асимптотический вид $e^{ikz}+f(\theta)e^{ikr}/r$ *при больших* $r$. На первый взгляд, это допущение выглядит абсурдным, поскольку если $\varphi \underset{r\to\infty}{\sim} e^{ikz}+f(\theta)r^{-1}e^{ikr}$, то $\varphi$ *в любой момент времени* имеет и приходящую плоскую волну, и уходящую сферическую волну. Однако, разумеется, в стационарной картине лучшего ожидать и нельзя! Кроме того, если взять состояние, которое в нулевой момент времени имеет вид $\int g(k)\varphi(x, k)\,dk$, то при больших $r$ *и больших* $t$ оно будет иметь вид $\int g(k)e^{ik(z-kt)}\,dk + f(\theta)r^{-1}\int g(k)e^{ik(r-kt)}\,dk$. Тогда по лемме Римана—Лебега, первый интеграл при больших $z$ и $t$ и функции $g$ с пиком вблизи $k_0$ имеет заметную величину только при $z\approx k_0 t$, а второй интеграл — при $r\approx k_0 t$. Поэтому при $t\to-\infty$ второй интеграл пренебрежимо мал для всех $r$ (ибо $r\geqslant 0$). Таким образом, можно надеяться восстановить зависящую от времени картину, строя «пакеты» из волновых функций наивного типа. Такую картину можно обосновать и непосредственно — см. дополнение 3 к § 8.

Отметим еще, что некоторые попытки обосновать формулу $d\sigma/d\Omega=|f(\theta)|^2$ исходя из строгого определения $S$-оператора можно найти в работах: J. Dollard, Scattering into cones, I: Potential scattering.— *Commun. Math. Phys.* 12 (1969), 193—203; J. Jauch, R. Lavine, R. G. Newton, Scattering into cones.— *Helv. Phys. Acta* 45 (1972), 325—330.

Метод наивной теории рассеяния можно резюмировать как отыскание функций $\varphi(x, k)$, «удовлетворяющих» $H\varphi=k^2\varphi$ и $\varphi(x, k) \underset{|x|\to\infty}{\sim} e^{ikz}+f(\theta)r^{-1}e^{ikr}$. Тогда $f(\theta)$ интерпретируется как функция, квадрат которой дает дифференциальное сечение. Приведем формальный вывод, показывающий, что $\varphi(x, k)$ должна удовлетворять уравнению Липпмана—Швингера. Пусть $\varphi=e^{ikz}+\eta$. Тогда из $(H-k^2)\varphi=0$ вытекает, что $(H_0-k^2)\varphi=-V\varphi$ или $(H_0-k^2)\eta=-V\varphi$. Таким образом, формально $\eta=-(H_0-k^2)^{-1}V\varphi$ или $\varphi$ удовлетворяет соотношению $\varphi=e^{ikz}-(H_0-k^2)^{-1}V\varphi$. Конечно, оператор $(H_0-k^2)^{-1}$ не является корректно определенным. Как мы сейчас увидим, выбор $\varphi=e^{ikz}-[H_0-(k^2+i0)]^{-1}V\varphi$ непосредственно связан с желанием обеспечить, чтобы при больших $r$ было $\varphi-e^{ikz}\sim e^{ikr}r^{-1}f(\theta)$, а не $e^{-ikr}r^{-1}f(\theta)$.

Таким образом, мы отождествляем наивную волновую функцию $\varphi$ с функцией Липпмана — Швингера. Следовательно, для $\varphi$ имеет место уравнение

$$\varphi(\mathbf{x}, k)=e^{ikz}-(4\pi)^{-1}\int e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1}V(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{k})\,d\mathbf{y},$$

где $\mathbf{k}=\langle 0, 0, k\rangle$. При больших $|\mathbf{x}|$ имеем $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1}\approx|\mathbf{x}|^{-1}$ и $\exp(ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\approx\approx\exp(ik|\mathbf{x}|-ik\cdot\hat{\mathbf{x}}|\mathbf{y}|)=\exp(ik|\mathbf{x}|-ik|\mathbf{y}|\cos\theta)$, где $\theta$ — угол между $x$ и $y$. Отсюда формально

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{k})\underset{|\mathbf{x}|\to\infty}{\sim}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{z}}+|\mathbf{x}|^{-1}e^{ik|\mathbf{x}|}f(\theta),$$

где

$$f(\theta)=-(4\pi)^{-1}\int e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}}V(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{k})\,d\mathbf{y}=-2\pi^2T(\mathbf{k}', \mathbf{k}),$$

если $\mathbf{k}'$ определено соотношениями $k'=\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}'=\cos\theta$. Все это рассуждение дает формальное обоснование формул (96) и (97а).

Заметим, что если бы мы подчинили $\varphi$ соотношению $\varphi=e^{ikz}-[H_0-(k^2-i0)]^{-1}V\varphi$, то пришли бы к $\varphi\underset{r\to\infty}{\sim}e^{ikz}+\tilde{f}(\theta)r^{-1}e^{-ikr}$. Наше желание иметь при больших $r$ формулу $\varphi-e^{ikz}\sim e^{+ikr}r^{-1}$, таким образом, прямо связано с «предписанием $+i0$» в уравнении Липпмана — Швингера.

Абстрактный подход к разложениям по собственным функциям самым тесным образом связан с результатами § XIII.8, где читатель найдет обширную библиографию, включающую и историю вопроса. Здесь мы заметим, что систематическая теория была развита Като и Куродой в работе: T. Kato, S. Kuroda, Theory of simple scattering and eigenfunction expansions.— In: Functional Analysis and Related Fields, pp. 99—131.— New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1970. Применения этих идей к многочастичному рассеянию можно найти в работе Хауленда, указанной в замечаниях к § 5.

Хорошо известно, что в случае экспоненциального убывания потенциала резольвента допускает аналитическое продолжение в каком-то подходящем смысле. См., например, вторую из статей Гроссмана и Ву, указанных в замечаниях к § 7, цитированную выше монографию Саймона, работу: C. Dolph, J. McLeod, D. Thoe, The analytic continuation to the unphysical sheet of the resolvent kernel and the scattering operator associated to the Schrödinger operator.— *J. Math. Anal. Appl.* **16** (1966), 311—332, или серию статей: N. Shenk, D. Thoe, Eigenfunction expansions and scattering theory for perturbations of $-\Delta$.— *J. Math. Anal. Appl.* **36** (1971), 313—351; *Rocky Mountain J. Math.* **1** (1971), 89—125.

§ *XI.7*. Целесообразность изучения аналитических свойств амплитуды рассеяния первоначально мотивировалась соображениями, не связанными с потенциальным рассеянием. Самые первые дисперсионные соотношения были доказаны для индекса преломления в оптической среде Кронигом (R. Kronig, On the theory of dispersion of X-rays.— J. Amer. Optical Soc. **12** (1926), 547—558) и Крамерсом (H. A. Kramers, Atti del Congresso Int. di Fisica, Como, 1927).

В начале 50-х годов «дисперсионная теория» развивалась как метод анализа и интерпретации данных рассеяния в теории элементарных частиц. При этом любой из аспектов теории в своем развитии проходил 4 типичные стадии. Вначале выдвигалось предположение о том или ином аналитическом свойстве. Затем кто-либо находил «доказательство» этого свойства, далекое от какой-либо строгости, но демонстрирующее физические основания, по которым это свойство должно быть верным. Далее строилось строгое доказательство в рамках квантовой теории поля; такие строгие доказательства исходили не из аксиом Вайтмана, но из более сильного формализма ЛСЦ (лишь гораздо позднее формализм ЛСЦ был выведен из аксиом Вайтмана, дополненных некоторыми допущениями; см. § 16 и замечания к нему). Наконец, опираясь на идеи этого квантовополевого доказательства, получали доказательство аналогичного свойства в потенциальном рассеянии. В ряде случаев третья стадия так и не была завершена, хотя четвертая проходила успешно.

Начальные исторические этапы дисперсионной теории довольно запутаны. Итог им подводится в гл. 10 книги Голдбергера и Ватсона, указанной в замечаниях к § 5. Мы же отметим три фундаментальные работы: R. Kronig, A supplementary condition in Heisenberg's theory of elementary particles.— *Physica* **12** (1946), 543—544; M. Gell'Mann, M. L. Goldberger, W. Thirring, Use of causality conditions in quantum theory.— *Phys. Rev.* **95** (1954), 1612—1627; M. L. Goldberger, Use of causality conditions in quantum theory.— *Phys. Rev.* **97** (1955), 508—510. Последняя статья содержала эвристический «вывод» дисперсионных соотношений для пион — нуклонного рассеяния вперед. Первое строгое доказательство в рамках формализма ЛСЦ квантовой теории поля принадлежит Симанзику (K. Symanzik, Derivation of dispersion relations for forward scattering.— *Phys. Rev.* **105** (1957), 743—749). Первое доказательство дисперсионного соотношения для потенциального рассеяния вперед (более слабый вариант теоремы XI.46) принадлежит Хури (N. Khuri, Analyticity of the Schrödinger scattering amplitude and non-relativistic dispersion relations. — *Phys. Rev.* **107** (1957), 1148—1156). Хури использовал формулировку потенциального рассеяния в терминах теории Фредгольма, данную Йостом и Пайсом (R. Jost, A. Pais, On the scattering of a particle by a static potential.— *Phys. Rev.* **82** (1951), 840—851). Теорема XI.46 с доказательством, весьма близким к нашему, опубликована в работе: A. Grossmann, T. T. Wu, Schrödinger scattering amplitude, I.— *J. Math. Phys.* **3** (1961), 710—713.

Дисперсионные соотношения для рассеяния не вперед, т. е. аналитичность $f(\cdot, \Delta)$ при фиксированном вещественном $\Delta$, были предложены почти одновременно пятью группами физиков: Голдбергером, Намбу и Оме [неопубликовано], Гелл-Манном и Полкингорном [неопубликовано], Симанзиком [неопубликовано], Саламом (A. Salam, On generalized dispersion relations.— *Nuovo Cimento* **3** (1956), 424—429), а также Каппсом и Такедой (R. Capps, G. Takeda, Dispersion relations for finite momentum-transfer pion-nuclear scattering.— *Phys. Rev.* **103** (1956), 1877—1896). Строгие доказательства в рамках квантовой теории поля принадлежат Боголюбову, Медведеву и Поливанову (Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов, Вопросы теории дисперсионных соотношений.— М.: Физматгиз, 1958) и Бреммерману, Оме и Тэйлору (H. Bremmerman, R. Oehme, J. G. Taylor, Proof of dispersion relations in quantized field theories.— *Phys. Rev.* **109** (1958), 2178—2190). Доказательство аналитичности по $\Delta$ при фиксированном $k$ принадлежит Леману (H. Lehmann, Scattering matrix and field operators.— *Nuovo Cimento Suppl.* **14** (1959), 153—176). В потенциальном рассеянии наиболее ранний вариант теоремы XI.47 установлен Хунцикером (W. Hunziker, Regularitätseigenschaften der Streuamplitude im Fall der Potentialstreuung.— *Helv. Phys. Acta* **34** (1961), 593—620). Доказательство, использующее факторизацию потенциала, опубликовано в работе: A. Grossmann, T. T. Wu, Schrödinger scattering amplitude, III.— *J. Math. Phys.* **3** (1962), 684—689.

Доказательство теоремы XI.47 можно найти в гл. 6 монографии Саймона, указанной в замечаниях к § 6. Единственная теорема, явно там сформулированная, включает аналитичность в $D_\alpha$, однако доказательство проходит и для любого $D_\beta$ с $0 < \beta \leqslant \alpha$.

Обобщенные потенциалы Юкавы изучались весьма интенсивно, поскольку они считаются самыми близкими нерелятивистскими аналогами релятивистского рассеяния. Свод различных результатов по аналитичности для таких потенциалов, включая и доказательство теоремы XI.48, можно найти в книге: В. де Альфаро и Т. Редже, Потенциальное рассеяние. Пер. с англ.— М.: Мир, 1966. Наиболее интересные результаты для юкавских потенциалов включают совместную аналитичность по $\Delta$ и $E$ и соответствующее представление Мандельстама; эта теория обсуждается в § V.6 и замечаниях к нему.

Помимо обсуждаемых в данном разделе результатов по аналитичности имеются еще три обширных класса подобных результатов. Во-первых, существуют результаты о свойствах аналитичности в $N$-частичном рассеянии — ссылки на них можно найти в замечаниях к § 5. Другой класс образуют результаты о свойствах аналитичности отдельных парциально-волновых амплитуд, рассматриваемые в § 8. И наконец, существуют результаты о свойствах аналитичности по угловому моменту, кратко обсуждаемые в замечаниях к § 8.

Как объяснялось в § 1, физические представления, лежащие в основе аналитичности, связаны с причинностью. Однако в наших доказательствах эта связь оставалась скрытой, потому что представления о причинности связаны с зависимостью от времени, тогда как доказательства проводились не зависящими от времени методами. Теория Лакса — Филлипса, изложенная в § 11, представляет собой зависящий от времени формализм теории рассеяния, прямо основанный на причинности. Поэтому в подходе Лакса — Филлипса аналитические свойства возникают из причинности совершенно естественно. Однако в силу технических трудностей теория Лакса — Филлипса применяется к нерелятивистскому квантовомеханическому рассеянию лишь для очень узкого класса потенциалов.

§ *XI.8*. Ссылки на статьи, где описывается теория разложений по собственным функциям для центральных потенциалов, даны в замечаниях к § 6. Спектральный анализ гл. XIII для этого класса потенциалов в основном развит Вейдманом (J. Weidmann, Zur Spektraltheorie von Sturm — Liouville Operatoren.— *Math. Z.* 98 (1967), 268—302).

То, что амплитуда рассеяния, получаемая в теореме XI.53, автоматически удовлетворяет условию унитарности, совсем не случайно. Существует общий принцип, согласно которому если спектры $H$ и $H_0$ просты (что выполнено на каждом подпространстве состояний с фиксированным значением углового момента), $\Omega^{\pm}(H, H_0)$ существуют, $\sigma_{ac}(H) \subset \sigma_{ac}(H_0)$ и абсолютно непрерывный спектр $H_0$ подчиняется некоторому техническому условию, то $\Omega^{\pm}(H, H_0)$ полны. Этот результат обсуждается в задачах 87 и 88. Основная идея высказана в статье Куроды в *Nuovo Cimento*, цитированной в замечаниях к § 4. Ошибка, имеющаяся в этой статье, исправлена в работе Дейфта и Саймона, упоминаемой в тех же замечаниях.

Теоремы, подобные теореме XI.49, характерны для теории разложений по собственным функциям Куроды (см. замечания к § XI.6 и XIII.8); см. в особенности работу: T. Kato, S. Kuroda, The abstract theory of scattering.— *Rocky Mountain J. Math.* 1 (1971), 127—171. Наше изложение следует Като (см. Scattering theory, pp. 90—113 In: Studies in applied math. (A. H. Taub, ed.), Math. Assoc. Amer., Buffalo, New York. 1971). Курода показал (S. Kuroda, Scattering theory for differential operators, I.— *J. Math. Soc. Japan* 25 (1973), 75—104), что слои $T(E)$ лежат в некоторых классах $\mathcal{I}_p$, зависящих от точного характера убывания $V$. Он допускает более медленное убывание, чем то, которое предполагается в теореме XI.49.

Фундаментальная связь между временем задержки и фазой квантовой амплитуды рассеяния открыта Эйзенбадом (L. Eisenbud, Ph. D. Thesis, Princeton Univ. 1948 [неопубликовано]); см. также: E. P. Wigner, Laws/limit for the energy derivative of the scattering phase shift.— *Phys. Rev.* 98 (1955), 145—147. Дальнейшее обсуждение можно найти в работе: J. M. Jauch, J. P. Marchand, The time delay operator for simple scattering systems.— *Helv.*

*Phys. Acta* **40** (1967), 217—229, а также J. M. Jauch, K. B. Sinha, B. N. Misra, Time-delay in scattering processes.— *Helv. Phys. Acta* **45** (1972), 398—426.

Компактность оператора $S(E)-I$ для некоторых трехчастичных систем была доказана в работе: R. Newton, The three particle $S$-matrix.— *J. Math. Phys.* **15** (1974), 338—343.

Как и многое другое, разложение по парциональным волнам и связь с собственными функциями (теорема XI.53) восходят к классической монографии: Дж. С. Стрэтт (Рэлей), Теория звука. Пер. с англ.— М.— Л.: Гостехтеориздат, 1944. Использование разложения по парциальным волнам в квантовой теории рассеяния было впервые предложено Факсеном и Хольцмарком (M. Faxen, J. Holtsmark, Beitrag zur Theorie des Durchganges langsamer Elektronen durch Gase.— *Z. Phys.* **45** (1927), 307—324).

Тот факт, что естественная область сходимости ряда Лежандра есть эллипс, является открытием К. Неймана (K. Neumann, Über die Entwickelung einer Funktion mit imaginärem Argument, nach der Kugelfunktionen erster und zweiter Art.— Halle: Verlag von Schmidt, 1862) и Томе (L. W. Thome, Über die Reihen welche nach Kugelfunktion fortschreiten.— *J. Math.* **66** (1866), 337—343). Основная формула (137) еще раньше была доказана в работе: E. Heine, Theorie der Anziehung eines Ellipsoids.— *J. Math.* **42** (1851), 70—82. Подробное обсуждение ряда Лежандра, основанное на аналогии с рядом Тейлора, проведено в работе: T. Kinoshita, J. J. Loeffel, A. Martin, Upper bounds for the scattering amplitude at high energy.— *Phys. Rev. B* **135** (1964), 1464—1482.

Связь между обыкновенными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями, устанавливаемая при помощи метода вариации постоянных, составляет стандартную принадлежность теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Для уравнений в частных производных наиболее близким аналогом является метод функций Грина. Важное различие между ситуацией для обыкновенных дифференциальных уравнений и для уравнений в частных производных заключается в том, что в первом случае интегральное уравнение является **уравнением Вольтерра** $f(x)=g(x)+\lambda\int k(x, y)f(y)\,dy$, где $k=0$ при $x\leqslant y$. Такие уравнения обладают тем свойством, что отвечающий им ряд Неймана $I+\lambda K+\lambda^2K^2+\ldots$ сходится при всех $\lambda$; употребляя более современную терминологию, можно сказать, что этот оператор квазинильпотентен, т. е. $\sigma(K)=\{0\}$. Именно по этой причине исключительное множество $\mathscr{E}$ может появиться при анализе уравнения Липпмана—Швингера, которое соответствует уравнению в частных производных $-\Delta\varphi+V\varphi=E\varphi$, но не появляется при анализе регулярного уравнения и уравнения Йоста, которые отвечают обыкновенному дифференциальному уравнению $-u''+Vu=Eu$.

Подход, использующий уравнение переменной фазы, был детально разработан Ф. Калоджеро; см. в особенности его книгу: Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. Пер. с англ.— М.: Мир, 1972. Существует следующая связь между теоремами XI.55, XI.59 и утверждением теоремы XIII.8 о том, что $n_l(V)$ равно числу нулей функции $u_l(r; E)$: любые два из этих трех утверждений влекут за собой третье. При этом отметим, что в наших доказательствах всех этих результатов используются совершенно разные методы. В частности, можно доказать теорему Левинсона, не прибегая ни к аналитическим свойствам функции Йоста, ни к построению решений Йоста.

Всестороннее обсуждение амплитуд парциальных волн, функций Йоста и др., включая случай $l>0$, проводится в монографии В. де Альфаро и Т. Редже, указанной в замечаниях к § 7.

Формализм функции Йоста для $s$-волнового рассеяния был предложен в работе: R. Jost, Über die falschen Nullstellen der Eigenwerte der $S$-matrix.— *Helv. Phys. Acta* **20** (1947), 250—266, и разработан далее В. Баргманом (V. Bargmann, On the connection between phase shifts and the scattering potential.— *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949), 488—493). В первоначальном определении Йоста было $\eta(k) \equiv \eta(0, k)$. Определение через вронскиан представляет собой позднейшее усовершенствование, особенно полезное при $l > 0$, когда $x = 0$ — особая точка. Обозначения $\eta(x, k)$, $\eta(k)$ не являются стандартными; вместо них чаще используют $f(x, k)$ и $f(k)$, от чего мы отказались, поскольку символ $f$ употребляется для амплитуды рассеяния. Как мы показываем в замечаниях к § XIII.17, функция Йоста есть определитель Фредгольма, соответствующий радиальному уравнению Липпмана—Швингера.

Поведение $\eta(k)$ для потенциала $\lambda V$ как функции от константы связи $\lambda$, особенно при $\lambda \to \infty$, изучалось Шаданом (K. Chadan, The asymptotic behavior of the number of bound states of a given potential in the limit of large coupling.— *Nuovo Cimento* 58 (1968), 191—204) и Франком (W. M. Frank, Strong coupling limit in potential theory, I, II.— *J. Math. Phys.* 8 (1967), 466—476; 9 (1968), 1890—1898). Особый интерес представляет связь между этим поведением и числом $n(\lambda V)$ сферически симметричных связанных состояний оператора $-\Delta + \lambda V$. Для широкого класса потенциалов было доказано, что $\lim_{\lambda \to \infty} n(\lambda V)/\lambda^{1/2} = \pi^{-1} \int |V_-(x)|^{1/2} dx$, где $V_-(x) = \max\{-V, 0\}$. Совсем другим способом мы докажем это в § XIII.15.

Теорема Левинсона была доказана им в работе: N. Levinson, On the uniqueness of the potential in a Schrödinger equation for a given asymptotic phase.— *Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd.* 25 (1949). Общая теория функций Йоста и подробное обсуждение теоремы Левинсона для парциальных волн с $l > 0$ (в особенности случая $f(0) = 0$) даны в работе: R. G. Newton, Analytic properties of radial wave functions.— *J. Math. Phys.* **1** (1960), 319—347.

Доказательство теоремы XI.61 с помощью метода, аналогичного нашему, появилось в работе: A. Bottino, A. M. Longoni, T. Regge, Potential scattering for complex energy and angular momentum.— *Nuovo Cimento* **23** (1962), 954—1004. Другим методом близкий результат был получен в работе: L. Brown, D. Fivel, B. W. Lee, R. F. Sawyer, Fredholm method in potential scattering and its application to complex angular momentum.— *Ann. Phys.* 25 (1963), 187—220.

Для обобщенных потенциалов Юкавы скачки $f_0(k^2)$ на разрезе $(-\infty, -\mu_0^2)$ можно вычислить непосредственно с помощью веса $C$ в выражении $\int_{\mu_0}^{\infty} C(\mu) e^{-\mu x} d\mu$; итерации дают на $n$-м шаге скачок в интервале $[-(n+1)^2\mu_0^2, -n^2\mu_0^2]$. Этот метод, разработанный Мартеном (A. Martin, On the analytic properties of partial wave scattering amplitudes obtained from Schrödinger's equation.— *Nuovo Cimento* 14 (1959), 403—425; Analytic properties of $l \neq 0$ partial wave amplitudes for a given class of potentials.— *Nuovo Cimento* 15 (1962), 99—109), подробно обсуждается в книге де Альфаро и Редже.

Скачки на разрезах для обобщенных потенциалов Юкавы представляют особую важность в связи с тем, что $s_0(k^2)$ полиномиально ограничена (стремится к 1 при $k \to \infty$), так что можно написать дисперсионные соотношения. Этим данный случай решительно отличается от потенциалов класса $C_0^\infty$, для которых функция Йоста является целой, а $f_0(E)$ мероморфна в $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Здесь $s_0(k^2)$ не обладает полиномиальным ростом при $k \to \infty$.

Вариационные методы типа формулы Кона (136c) представляют интерес, поскольку они указывают на то, что погрешность между $a$ и $\beta(\psi) - (h\psi, \psi)$ имеет порядок квадрата погрешности между $\psi$ и $\varphi$. Исходя из этого ряд авторов развили вариационные методы для произвольных фазовых сдвигов; см., например, L. Hulthén, Variational problem for the continuous spectrum of a Schrödinger equation.— *Kgl. Fys. Salla Lund Fortschn.* 14 (1944), 1—13; W. Kohn, Variational methods in nuclear collision problems.— *Phys. Rev.*

74 (1948), 1763—1772. Третий принцип предложен Швингером в его неопубликованных лекциях; он описан в работе: J. Blatt, J. Jackson, On the interpretation of neutron-proton scattering data by the Schwinger variational method.— *Phys. Rev.* 76 (1949), 18—37. То, что эти принципы при определенных обстоятельствах могут приводить к точным оценкам, было показано в серии работ Т. Като (Variational methods in collision problems.— *Phys. Rev.* 80 (1950), 475; Notes on Schwinger's variational method.— *Progr. Theor. Phys.* 6 (1951), 295—305; Upper and lower bounds on scattering phases.— *Progr. Theor. Phys.* 6 (1951), 394—407). Оценка, которую мы приводим в теореме XI.$61^1/_2$, и ее доказательство даны в работе: L. Spruch, L. Rosenberg, Upper bounds on scattering lengths for static potentials.— *Phys. Rev.* 116 (1959), 1034—1040, и обсуждаются в дальнейших работах этих же авторов: Upper bounds on scattering lengths for compound systems: n-D quartet scattering.— *Phys. Rev.* 117 (1960), 1095—1102; Bounds on scattering phase shifts: Static central potentials.— *Phys. Rev.* 120 (1960), 474—482; Bounds on scattering phase shifts for compound systems.— *Phys. Rev.* 121 (1961), 1720—1726; Minimum principle for multi-channel scattering.— *Phys. Rev.* 125 (1962), 1407—1414. Влияние на эти оценки связанных состояний обсуждается в работе: L. Rosenberg, L. Spruch, T. O'Malley, Upper bounds on scattering lengths when composite bound states exist.— *Phys. Rev.* 118 (1960), 184—192. Розенберг и Шпрух указывают, что их оценки можно вывести также и с помощью применявшихся ранее методов Като. Читатель, возможно, заметил, что (136d) есть нижняя граница, тогда как у Розенберга и Шпруха рассматривается верхняя граница. Причина в том, что для $a$ они используют соглашение о знаках, противоположное нашему. Это их соглашение, при котором длина рассеяния на твердой сфере положительна (и равна радиусу сферы), распространено в литературе больше, чем наше, но, в общем, оба достаточно употребительны.

Существует довольно обширная литература по осциллирующим потенциалам. Анализ рассеяния на нецентральных потенциалах с сильными осцилляциями на бесконечности (подобных потенциалам в примере 1 дополнения 2) можно найти в работах: В. Б. Матвеев, М. М. Скриганов, Волновые операторы для уравнения Шредингера с быстро осциллирующим потенциалом.— *ДАН СССР* 202 (1972), 755—757; М. М. Скриганов, О спектре оператора Шредингера с быстро осциллирующим потенциалом.— *Труды МИАН им. В. А. Стеклова*, 125 (1973), 187—195: M. Combescure, J. Ginibre, Spectral and scattering theory for the Schrödinger operator with strongly oscillating potentials.— *Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A* 24 (1976), 17—29; M. Schechter, Spectral and scattering theory for elliptic operators of arbitrary order.— *Comm. Math. Helv.* 49 (1974), 84—113; M. Schechter, Scattering theory for the Schrödinger equation with potentials not of short range.— В кн.: Комплексный анализ и его приложения (сб. статей, посвященный академику И. Н. Векуа к его семидесятилетию).— М.: Наука, 1978, с. 601—607. В частности, конструкция квадратичной формы, намеченная в примере 1, была дана независимо Комбескюром, Жинибром и Шехтером. Используя методы, описываемые в § XIII.8, эти авторы также получили для рассеяния на потенциалах указанного класса более сильные результаты, чем приведенные нами.

В связи с примером Пирсона (см. § 4) происходило обсуждение осцилляций в окрестности нуля; см., например, W. O. Amrein, V. Georgescu, Strong asymptotic completeness of wave operators for highly singular potentials.— *Helv. Phys. Acta* 47 (1974), 517—533, а также M. L. Baetman, K. Chadan, Scattering theory with highly singular oscillating potentials.— *Ann. Inst. H. Poincaré A* 24 (1976), 1—16. Эти локальные осцилляции можно контролировать с помощью метода теоремы XI.68. Так, Бетман и Шадан анализируют регулярное интегральное уравнение с осциллирующими потенциалами вполне аналогично тому, как мы анализируем уравнение Йоста, когда заново рассматриваем пример 1. На самом деле мы как раз и следовали их подходу, но только сосредоточивая внимание на области $r=\infty$ вместо $r=0$. Отсутствие положительных собственных значений в этом случае (теорема XI.68 (a)), по-видимому, представляет собой новый результат, хотя Беман и Шадан могли бы доказать это, если бы рассмотрели осцилляции на бесконечности.

Части (a) и (c) теоремы XI.67 принадлежат Аткинсону (F. Atkinson, The asymptotic solutions of second order differential equations.— *Ann. Mat. Pura Appl.* 37 (1954), 347—378)

Теорема XI.66 получена в работе: J. Dollard, C. Friedman, On strong product integration.— *J. Funct. Anal.* 28 (1978), 309—354. Применение этой теоремы для вывода некоторых результатов Аткинсона, а также теорема XI.67 (b) имеются в работе этих же авторов: Product integrals and the Schrödinger equation.— *J. Math. Phys.* 18 (1977), 1598—1607.

Теорема XI.69 основана на абстрактном варианте одного рассуждения Грина и Ланфорда (T. A. Green, O. E. Lanford, III, Rigorous derivation of phase shift formula for the Hilbert space scattering operator of a single particle.— *J. Math. Phys.* 1 (1960), 139—148). Эти авторы идут также дальше, допуская в следствии 1 потенциалы с $|V(x)| \leqslant C|x|^{-1-\varepsilon}$; они достигают этого путем рассмотрения вкладов высших порядков в ряд для решения Йоста. Применение этой теории в сочетании с теоремой XI.67 предложено Доллардом и Фридманом (J. Dollard, C. Friedman, Existence of the Møller wave operators for $r^{-\beta}\lambda \sin(\mu r^{\alpha})$.— *Ann. Phys.* 111 (1978), 251—266).

Существование и полнота волновых операторов для нецентральных потенциалов с поведением на бесконечности типа $r^{-1}\sin r$ были получены — но только для области достаточно высоких энергий — в работе: K. Mochizuki, J. Uchiyama.— Nagoya Institute of Technology, preprint, 1977.

Результаты, приведенные в дополнениях, показывают, насколько тонким является эффект положительных собственных значений. Допустим, например, что $V(r) \sim Cr^{-1}\sin(r^{\alpha})$ при больших $r$. Если $\alpha < 1$, то $\partial V/\partial r = O(r^{-1-\varepsilon})$, так что, в силу теоремы XIII.58, положительных собственных значений нет. Если $\alpha > 1$, то $\int\limits_x^\infty V(r)\,dr = O(r^{-1-\varepsilon})$, так что положительных собственных значений нет в силу теоремы XI.68. Значит, такие собственные значения возможны лишь при $\alpha = 1$, и в некоторых случаях они действительно встречаются.

Замечания к данному разделу (последнему из тех, которые посвящены нерелятивистскому квантовому рассеянию с короткодействующими силами) мы завершаем кратким описанием *некоторых* из тем, *не* затронутых ни в основном тексте, ни в замечаниях.

(1) Очень большой интерес представляет теория аналитического продолжения величин $f_l(E)$ по $l$. Идея принадлежит Т. Редже (T. Regge, Introduction to complex angular momenta.— *Nuovo Cimento* 14 (1959), 951—976). Она обсуждается далее в книге: R. G. Newton, The Complex $J$-Plane: Complex Angular Momentum in Non-Relativistic Quantum Scattering Theory.— New York: Benjamin, 1964. Предварительные сведения о применениях этого метода в физике частиц можно найти в монографии: P. D. B. Collins, E. U. Squires, Regge Poles in Particle Physics.— New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1968.

(2) «Обратная задача» восстановления потенциала по заданным $\delta_l(k)$. Основной работой здесь является статья И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана: Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции.— *Изв. АН СССР*, сер. матем. 15 (1951), 309—360. Более полную историю вопроса и обсуждение метода Гельфанда — Левитана можно найти в гл. 12 книги де Альфаро и Редже. Весьма прозрачное изложение, включающее и более новые результаты, содержат монографии: З. С. Агранович и В. А. Марченко, Обратная задача теории рассеяния.— Харьков: Изд. Харьковского гос. ун-та, 1960, и Л. Д. Фаддеев, Обратная задача в квантовой теории рассеяния.— *УМН* 14 (1959), 57—119; II.— Совр. проблемы математики 3 (1974), 93—180; Свойства $S$-матрицы одномерного уравнения Шредингера.— *Труды*

*МИАН им. В. А. Стеклова* 73 (1964), 314—333; J. J. Loeffel, On an inverse problem in potential scattering theory.— *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A* 8 (1968), 339—447. Весьма красивый новый подход к обратной задаче был предложен в работе Дейфта и Трубовица (P. Deift, E. Trubowitz, Inverse scattering on the line.— *Comm. Pure Appl. Math.* 32 (1979), 121—252).

(3) $N/D$-метод Чью и Мандельстама (G. Chew, S. Mandelstam, Theory of low-energy pion-pion interaction.— *Phys. Rev.* **119** (1963), 467—477).

(4) Общие методы получения информации на основе аналитических свойств многочастичных амплитуд рассеяния. Это особенно существенно в релятивистской теории рассеяния, однако представляет интерес и для нерелятивистской теории. Математическую трактовку см. в книге: A. Martin, Scattering Theory: Unitarity, Analiticity and Crossing.— Lecture Notes in Physics, № 3, Springer-Verlag, 1969. Изложение, ориентированное на приложения к физике частиц и связи с теорией возмущений в квантовой теории поля, дано в монографиях: Дж. Чью, Аналитическая теория $S$-матрицы. Пер. с англ.— М.: Мир, 1968; Р. Иден, Соударения элементарных частиц при высоких энергиях. Пер. с англ.— М.: Наука, 1970; R. J. Eden, P. V. Landshoff, D. I. Olive, J. C. Polkinghorne, The Analytic $S$-matrix.— London and New York: Cambridge Univ. Press, 1966.

§ *XI.9.* Классическое кулоново рассеяние впервые было исследовано лордом Резерфордом как часть его знаменитого эксперимента, приведшего к заключению, что атомы имеют ядра. Резерфорду очень повезло, так как квантовое кулоново сечение оказалось в точности равным классическому (чудо продолжалось — борновское приближение оказалось точным для этого случая!). А еще ему повезло в том, что $\alpha$-частицы в его опыте имели слишком малую энергию и не могли эффективно взаимодействовать с ядром посредством ядерных сил, поэтому он наблюдал только кулоново рассеяние.

Обсуждение точных решений для классического кулонова рассеяния с точки зрения симметрии (вектор Ленца) см. в работе: H. Abarbanel, The inverse $r$-squared force: An introduction to its symmetries.— Studies in Mathematical Physics, Essays in Honor of Valentine Bargmann (E. Lieb, B. Simon, A. Wightman, eds.).— Princeton Univ. Press, 1976.

Классическая теория рассеяния для дальнодействующих сил с той точки зрения, с которой она здесь изложена, построена Хербстом (I. Herbst, Classical scattering with long-range forces.— *Commun. Math. Phys.* **35** (1974), 193—214). Вся теорема XI.73, исключая то, что относится к оценке (165), принадлежит Хербсту. Обсуждение «асимптотически центральных» потенциалов — новый материал.

Квантовое кулоново рассеяние впервые рассмотрено Гордоном (W. Gordon, Über den Stoss zweier Punktladungen nach der Wellenmechanik.— *Z. Phys.* 48 (1928), 180—191). Он работал с разложением по собственным функциям кулоновой задачи, имея дело a priori со стационарным формализмом. Он обнаружил, что собственные функции непрерывного спектра для больших $r$ имеют вид не

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta),$$

но

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + r^{-1} \exp\{i[kr + \lambda k^{-1} \ln(4kr)]\} f_{\mathrm{E}}(\theta)$$

при больших $r$ и $\theta \neq 0$, и отождествил $f_{\mathrm{E}}(\theta)$ с кулоновой амплитудой рассеяния. Тем самым он исключил бесконечные фазы.

В нестационарной постановке задача о кулоновом рассеянии появилась впервые у Долларда (J. Dollard, Asymptotic convergence and Coulomb interaction.— *J. Math. Phys.* 5 (1964). 729—738). По этой причине мы пользуемся символом $U_{\mathrm{D}}(t)$. Его результаты были обобщены на более общие дальнодействующие потенциалы в работах: W. O. Amrein, Ph. A. Martin, B. Misra, On the asymptotic condition in scattering theory.— *Helv. Phys. Acta* **43** (1970), 313—344; В. С. Буслаев и В. Б. Матвеев, Волновые операторы для уравнения Шредингера с медленно убывающим потенциалом.— *Теор. и матем. физика* **2** (1970), 367—376; P. K. Alsholm, T. Kato, Scattering with long-range potentials. In: Partial Differential Equations, pp. 393—399.— Proc. Symp. Pure Math., vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1973; L. Hörmander, The existence of wave operators in scattering theory.— *Math. Z.* **146** (1976), 69—91. Амрейн и др. распространили метод Долларда на потенциалы $r^{-\alpha}$ с $\alpha > 1/2$. Буслаев и Матвеев, а также Альсхольм и Като пользовались приближениями высших порядков для решений уравнения Гамильтона—Якоби, и им требовалось знание все более старших производных по мере расширения области действия потенциала; например, Буслаев и Матвеев вводят условие $|D^{\alpha}V_l(x)| \leqslant C(1+x)^{-\varepsilon-|\alpha|}$ для всех $|\alpha| \leqslant k$, где $k=[n/2]+2+[1/\varepsilon]$ ($[a]\equiv$ наибольшее целое число, меньшее $a$). Самый сильный результат принадлежит Хёрмандеру, работа которого содержит теорему XI.84. Хёрмандер имел дело с дифференциальными операторами для $H_0$ с постоянными коэффициентами общего вида.

Доллард и Хёрмандер обсуждают также многоканальные задачи.

Разложение по собственным функциям для чисто кулонова случая обсуждается в статье Долларда. Собственные функции дальнодействующих потенциалов общего вида составляют часть общей проблемы спектрального анализа таких потенциалов, и некоторые ссылки можно найти в замечаниях к § XIII.8. В число недавних работ по этому предмету входят: T. Ikebe, Spectral representations for Schrödinger operators with long-range potentials.— *J. Funct. Anal.* **20** (1975), 158—177; Spectral representations for Schrödinger operators with long-range potentials—Perturbation by short-range potentials.— *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto* **11** (1976), 551—558; T. Ikebe, H. Isozaki, Completeness of modified wave operators for long range potentials.— *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto* **15** (1979), 679—718; H. Isozaki, On the long range wave operators.— *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto* **13** (1977), 589—626; H. Kitada, Scattering theory for Schrödinger operators with long-range potentials, I, II.— *J Math. Soc. Jap.* **29** (1977), 665—691; G. Pinchuk, Abstract time independent wave operator theory for long-range potentials.— Berkeley thesis, unpublished; Y. Saito, Eigenfunction expansions for the Schrödinger operator with long-range potentials, $Q(y)=O(|y|^{-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$.— *Osaka J. Math.* **14** (1977), 37—53. Помимо этого, С. Агмон анонсировал необычайно полные результаты, основанные на обобщении его техники $L^2$-пространств с весом. Наконец, В. Энсс сообщил нам, что его методы, описанные в § 17, можно так модифицировать, чтобы они годились и для дальнодействующих потенциалов, включая кулоновы.

Квантовые $S$-операторы на массовой поверхности обычно очень сингулярны при $k=k'$ (рассеяние на нулевой угол). В короткодействующем случае обобщенная функция $s(k, k')$ имеет единственную особенность типа $\delta(k-k')$ при $k=k'$; в кулоновом случае особенность хуже, см.: I. Herbst, On the connectedness structure of the Coulomb $S$-matrix.— *Commun. Math. Phys.* **35** (1974), 181—191.

Наконец, мы хотим сделать несколько замечаний о фазе амплитуды кулонова рассеяния. Как мы уже подробно объяснили, эта фаза не определяется исходной нестационарной теорией. Тем не менее в некотором смысле эта фаза измерима! Чтобы понять это явление, нам придется сказать несколько слов о том, как экспериментально проверяются дисперсионные соотношения; дальнейшую информацию по этому поводу, важную для нашего обсуждения, можно найти в указанной выше книге Р. Идена.

Хотелось бы проверить дисперсионные соотношения вперед для сильно взаимодействующих систем. Проблема здесь в том, что единственно приемлемые мишени—это заряженные частицы, а именно протоны в водородной мишени. Более того, для обнаружения после рассеяния наиболее удобны тоже заряженные частицы, скажем $\pi^+$. Поскольку частицы заряжены, наряду с сильными взаимодействиями имеются кулоновы силы, и в результате возникает, из-за очень малого угла кулонова рассеяния, бесконечное сечение. Как же попытаться найти «сильную часть» амплитуды рассеяния, чтобы проверить дисперсионные соотношения вперед? Физики делают такую подстановку:

$$f(\theta) = f_s(\theta) + f_c(\theta), \tag{339}$$

где $f_c(\theta)$ — «обычная» кулонова амплитуда, как она найдена Гордоном. Ниже мы обсудим это предположение подробнее. В типичном случае дифференциальное сечение при малых углах имеет вид сплошной линии на схематическом рис XI.18. Точечная линия отвечает точным значениям $|f_c|^2$. Как теперь «разыскать» $\operatorname{Im} f_s(\theta=0)$ и $\operatorname{Re} f_s(\theta=0)$? В области, где $f_c$ очень мала, дифференциальное сечение сводится в основном к $|f_s(\theta)|^2$. Линия из крестиков на рис. XI.18 соответствует экстраполяции пробной $|f_s(\theta)|^2$ к $\theta=0$. Проинтегрировав ее по $\theta$ и воспользовавшись оптической теоремой, можно узнать, что такое $\operatorname{Im} f_s(\theta=0)$. Как теперь найти $\operatorname{Re} f_s(\theta=0)$? Можно ожидать, что $f_s(\theta)$ медленно меняется вблизи $\theta=0$, поэтому достаточно найти $\operatorname{Re} f_s(\theta=\theta_0)$. Провал при $\theta=\theta_0$ вызван интерференцией между $f_s$ и $f_c$ в точке, где $|f_s| \sim |f_c|$.

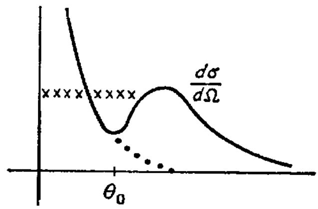


Рис. XI.18.

Глубина этого провала *и знание* $f_c$ позволяют определить аргумент $f_s$, а значит, $\operatorname{Re} f_s(\theta=\theta_0)$. Теперь можно проверять дисперсионное соотношение вперед. Суть в том, что если мы поверим дисперсионным соотношениям вперед, то можно обратить весь анализ и «измерить» аргумент $f_c$. Как это согласуется с тем, что этот аргумент остается неопределенным в обычной нестационарной теории? Ключ, видимо, в соотношении (339) и в дисперсионных соотношениях вперед. Амплитуда $f_s$ в (339) не будет настоящей амплитудой рассеяния для сильных взаимодействий, так как $f$ *не* линейна по потенциалу. Следовательно, (339) рассматривается как определение $f_s$. Итак, наша *гипотеза* такова: при выборе модифицированной квантовой динамики, который мы сделали в кулоновом случае (и с помощью которого Доллард получает «обычную» кулонову динамику, если $V_s=0$), и любом центральном достаточно короткодействующем потенциале функция $f(k, \theta; \lambda r^{-1}+V_s) - f(k, \theta; \lambda r^{-1})$ имеет предел $g(k)$ при $\theta \to 0$, являющийся граничным значением функции, аналитической и полиномиально ограниченной в плоскости с разрезом $\mathbb{C}\setminus[0, \infty)$, причем $g(\bar{k}) = \overline{g(k)}$. Однако это не верно ни для какой другой долларовой динамики, которая приводит к *другим* фазам. Доказательство этой гипотезы объяснило бы, почему фаза Гордона «правильная».

§ *XI.10*. Идея формулировки теории рассеяния для волнового уравнения как задачи в гильбертовом пространстве восходит по крайней мере к работам М. Ш. Бирмана (Об условиях существования волновых операторов.— *Изв. АН СССР*, сер. матем. 27 (1963), 883—906) и Лакса и Филлипса (P. Lax, R. Phillips, The wave equation in exterior domains.— *Bull. Amer. Math. Soc.* 68 (1962), 47—49). Необходимость применения унитарных групп на различных пространствах впервые была отмечена в работе: C. Wilcox, Wave operators and asymptotic solutions of wave propagation problems of classical physics.— *Arch. Rational Mech. Anal.* **37** (1966), 37—78. Мы следовали главным образом общим идеям Като (T. Kato, Scattering theory with two Hilbert spaces.— *J. Funct. Anal.* **1** (1967), 342—369). В частности, теоремы XI.75 и XI.76 в случае $\mathscr{K}_0 = \mathscr{K}_1$ содержатся в работе Като, включающей случай, когда $B_0$ или $B_1$ имеют нетривиальное ядро. Като ввел понятие эквивалентности для операторов отождествления и неоднократно подчеркивал, что с физической точки зрения одни операторы отождествления более естественны, чем другие.

Подробно наше доказательство существования и полноты волновых операторов в случае оптического рассеяния в неоднородной среде (пример 2) изложено в работе: M. Reed, B. Simon, The scattering of classical waves from inhomogeneous media,— *Math. Z.* **155** (1977), 163—180. Построение волновых операторов для уравнений Максвелла, проведенное в тексте, доказывает сходимость по норме, отличной от энергетической нормы. Это можно обойти, рассматривая волновые уравнения для векторных потенциалов. См., например, только что упомянутую статью. Рассеяние на препятствии (пример 3) с точки зрения, принятой в этом разделе, обсуждалось в работах: C. Wilcox, Scattering Theory for the d'Alembert Equation in Exterior Domains.— Lecture Notes in Math. **442**. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1975; P. Deift, Classical Scattering Theory with a Trace Condition.— Princeton Univ. Press, 1979. Дополнительные ссылки по поводу рассеяния на препятствиях можно найти в замечаниях к § 11.

Первые доказательства асимптотической полноты для акустического и оптического рассеяния в неоднородной среде были независимо даны в работах: М. Ш. Бирман, Задачи рассеяния для дифференциальных операторов при возмущении пространства.— *Изв. АН СССР*, сер. матем. **35** (1971), 440—455; J. Schulenberger, C. Wilcox, Completeness of the wave operators for perturbations of uniformly propagative systems.— *J. Funct. Anal.* 7 (1971), 447—472. Ряд результатов для некоторых очень специальных случаев был получен в статье: М. Ш. Бирман, Об условиях существования волновых операторов.— *Изв. АН СССР*, сер. матем. 27 (1963), 883—906. В статье Бирмана 1971 г. и статье Шуленбергера и Уилкокса на коэффициенты налагались некоторые условия гладкости. Эти условия отбросили В. Г. Дейч в статье: Приложение метода ядерных возмущений в теории рассеяния для пары пространств.— *Изв. высш. учебных заведений*, Математика № 6 (1971), 33—42, и Шуленбергер (J. Schulenberger, A local compactness theorem for wave propagation problems of classical physics.— *Indiana Univ. Math. J.* 22 (1972), 429—432). Обсуждавшаяся нами идея использовать перестановочное соотношение, для того чтобы избавиться от условий гладкости, принадлежит П. Дейфту.

Подход Шуленбергера — Уилкокса отличается от нашего тем, что они сводят волновое уравнение второго порядка к системе уравнений первого порядка как по временной, так и по пространственным переменным. Например, в случае акустического рассеяния, если $u$ удовлетворяет (187), то $v(x) \equiv \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, \frac{\partial u}{\partial t}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = E(x)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{3} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) v \equiv i\Lambda v, \tag{340}$$

где

$$E(x) = \begin{pmatrix} \rho(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\rho(x)\, c(x)^2 \end{pmatrix},$$

а $A_i$ — постоянные матрицы, такие, что

$$\sum_{i=1}^{3} A_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x_1 \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, свободное уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t}=E_0^{-1}\left(\sum_{i=1}^{3} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)v \equiv i\Lambda_0 v, \tag{341}$$

где $E_0$ — постоянная матрица. В своей статье 1966 г. Уилкокс начал изучение теории рассеяния для общих систем первого порядка вида (340), (341), в которых

(i) $E_0$, $E(x)$, $A_i$ самосопряжены;

(ii) $E_0$ и $E(x)$ строго положительно определены, причем $0 < e_0 \leqslant E(x) \leqslant e_1$;

(iii) корни $\det\left(\lambda E_0 - \sum_{i=1}^{n} A_i p_i\right)=0$ имеют постоянную кратность и постоянный знак при $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;

(iv) $E(x) \to E_0$ достаточно быстро при $|x| \to \infty$.

Уилкокс назвал системы, подчиненные несколько более сильным условиям, «равномерно распространяющимися», и доказал существование волновых операторов. Акустическое уравнение, уравнения Максвелла в однородной среде и многие другие классические уравнения относятся к классу равномерно распространяющихся. При выводе многих результатов условие (iii) можно ослабить, потребовав, чтобы ранг $\left(\sum_{i=1}^{n} A_i p_i\right)$ не зависел от $p$ при $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. К таким системам относятся уравнения Максвелла в произвольной неоднородной среде. Однако вопрос о полноте оставался открытым, поскольку ни теоремы Белопольского — Бирмана, ни редукции Като к одному гильбертову пространству еще не было.

Теорема Белопольского — Бирмана (теорема XI.13) была доказана в их статье: А. Л. Белопольский, М. Ш. Бирман, Существование волновых операторов в теории рассеяния для пары пространств.— *Изв. АН СССР*, сер. матем. 32 (1968), 1162—1175; а в работе: Некоторые приложения локального признака существования волновых операторов.— *ДАН СССР* **185** (1969), 735—738, Бирман отметил, что эту теорему можно использовать для доказательства полноты в системах вида (340), (341), *если* $\sum A_i \partial/\partial x_i$ эллиптичен. К сожалению, системы первого порядка, соответствующие акустическому волновому уравнению и уравнениям Максвелла, не эллиптичны, поскольку $\sum A_i p_i$ имеет нулевое собственное значение. Затем Шуленбергер и Уилкокс в своей статье 1971 г. показали, что если справедливы коэрцитивные оценки, то теорему Белопольского — Бирмана можно обобщить на случай с нулевыми модами. В статье: Coerciveness inequalities for non-elliptic systems of partial differential equations.— *Ann. Mat. Pura Appl.* 88 (1971), 229—305, Шуленбергер и Уилкокс доказали необходимые неравенства и таким образом завершили доказательство полноты для акустического и оптического рассеяния в неоднородной среде. Их доказательство коэрцитивных неравенств было существенно упрощено в работе: T. Kato, On a coerciveness theorem of Schulenberger and Wilcox.— *Indiana Univ. Math. J.* 25 (1975), 979—985. См. также книгу Дейфта. В подходе Бирмана, предложенном в 1971 г., коэрцитивные неравенства были не нужны, но все еще использовалась локальная компактность. Недавно Дейфт в своей книге показал, что не нужно ни то, ни другое. Он использовал более общий принцип инвариантности, обсуждавшийся в замечаниях к § 3, который утверждает, что если

$$\frac{\Lambda_0^n}{(\Lambda_0+ia)^{2n}}-\frac{\Lambda^n}{(\Lambda+ia)^{2n}} \in \mathcal{J}_1 \tag{342}$$

для каждого $a \neq 0$, то справедливы и теорема существования, и теорема полноты волновых операторов. Затем он смог проверить (342), поскольку нулевые моды исключаются из $\Lambda_0$ и $\Lambda$.

Метод Агмона—Куроды (см. § XIII.18) был обобщен так, чтобы можно было изучать системы, встречающиеся в этом разделе, в работе: T. Kato, Scattering theory for abstract differential equations of the second order.—*J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **19** (1972), 377—392.

В случае акустического волнового уравнения проблема нулевой моды — совершенно необязательная трудность, которая появляется только при сведении к уравнению первого порядка по пространственным производным. При переходе к уравнению первого порядка только по временнóй производной, как это мы делали в примере 1, эллиптичность сохраняется и можно прямо применять метод Като редукции к одному гильбертову пространству или теорему Белопольского—Бирмана. В случае уравнений Максвелла приходится сталкиваться с неэллиптической системой первого порядка по пространственным и временнóй координатам. Но, как отмечалось в примере 2, эту систему легко превратить в (неэллиптическую) систему второго порядка. Добавляя перекрестную часть в лапласиан и наделяя нулевые моды нетривиальной динамикой, систему можно сделать эллиптической. Тогда из эллиптичности и теории редукции Като будет следовать полнота. Поскольку такая добавочная динамика не взаимодействует с динамикой ненулевых мод, рассеяние этих мод не меняется. Детали можно найти в статье Рида и Саймона. Мораль всего сказанного такова: имеешь эллиптичность—сохрани ее, не имеешь—займей.

Результаты о конечности следов при изменении граничных условий восходят к работе: М. Ш. Бирман, Возмущения непрерывного спектра сингулярного эллиптического оператора при изменении границы и граничных условий.—*Вестник ЛГУ*, мат. мех. астрон. **1** (1962), 22—55. Теорема XI.79 доказана с помощью методов винерова интеграла в статье Дейфта—Саймона, упомянутой в замечаниях к § 4; см. также книгу: B. Simon, Functional Integration and Quantum Physics.—New York: Academic Press, 1979. Теоремы XI.80 и XI.81 взяты из уже упоминавшейся книги Дейфта; наше изложение следует многим его идеям. В его доказательстве теоремы XI.81, которое очень сильно отличается от нашего, проведенного в специальном случае, используются результаты Кальдерона (A. Calderón, Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions.—Proc. Symp. Pure Appl. Math. v. 4, pp. 33—49.—Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1961). Дейфт обсуждает случай более общих акустических операторов, учитывающих как препятствия, так и неоднородности. Он также отмечает, что теорема XI.81 не охватывает физически интересный случай, когда $\Gamma$ представляет собой кусок гиперплоскости («дифракционный эксперимент»). Однако наше доказательство теоремы XI.81 можно модифицировать, с тем чтобы охватить этот случай (задача 119). Дейфт развил другой подход, работающий в случаях, когда удается доказать только компактность $\tilde{R}_{\Gamma \cup S;\, N}$—результат, связанный с теоремами типа Реллиха из § XIII.14. Его идея (в обозначениях дополнения) состоит в том, чтобы доказать компактность $R^2_{\Gamma;\, N}\chi$ и $\chi R_0^2$, а затем доказать конечность следа оператора $R^2_{\Gamma;\, N}(1-\chi)-(1-\chi)R_0^2$. Последний факт влечет за собой существование волновых операторов $\Omega^{\pm}(H_{\Gamma;\, N}, H_0, 1-\chi)$, а первый—асимптотическую эквивалентность $1-\chi$ единице.

Идея леммы 6 в доказательстве теоремы XI.81′ взята из работы: F. Guerra, L. Rosen, B. Simon, Boundary conditions for the $P(\varphi)_2$ Euclidean field theory.—*Ann. Inst. H. Poincaré, Sect. A* 25 (1976), 231—334, где похожий метод применялся при доказательстве некоторых технических оценок, связывающих $R_{\Gamma;\, N}$ с $R_0$.

§ *XI.11*. Основной источник для того подхода к теории рассеяния, который излагается в этом разделе,— книга: П. Лакс, Р. Филлипс, Теория рассеяния. Пер. с англ.— М.: Мир, 1971. Теорема о представлении (теорема XI.82), дающая связь между приходящим и уходящим подпространствами и оператором рассеяния, впервые была сформулирована и доказана в статье: Я. Г. Синай, Динамические системы со счетнократным лебеговским спектром. I.— *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 25 (1961), 899—924. Синай вывел эту теорему из теоремы единственности фон Неймана (теорема XI.84). Лакс и Филлипс предложили доказательство, исходящее из основных принципов: сначала они доказали дискретный вариант (теорема XI.83), а потом получили спектральное представление на $L^2[0, 2\pi; N]$ при помощи преобразования Фурье. Пользуясь комплексным анализом и преобразованием Кэли, они нашли спектральное представление на $L^2(-\infty, \infty; N)$ для непрерывного случая, а затем при помощи обратного преобразования Фурье получили теорему XI.82. Доказательство, которое мы предложили, построено на идеях теоремы Макки об импримитивности. Связь между этой теоремой и теоремой фон Неймана была отмечена еще в статье: G. W. Mackey, A theorem of Stone and von Neumann.— *Duke Math. J.* 16 (1949), 313—326, а далее развивается в его книге: Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics.— New York: Benjamin, 1968. Ссылки на теорему фон Неймана можно найти в замечаниях к § VIII.5; другое доказательство намечено в задаче 30 к гл. X. Наше доказательство леммы к теореме XI.82 построено по примеру знаменитого доказательства фон Неймана теоремы о единственности меры Хаара (J. von Neumann, The uniqueness of Haar's measure.— *Матем. сб.* 1 (1936), 721—734).

Существуют связи между эргодической теорией и теоремами XI.82 и XI.83, которыми занимались Колмогоров и Синай, что и объясняет интерес Синая к этим теоремам. В самом деле, рассмотрим преобразование пекаря (пример 2 в § VII.4). Если $D_+$ есть пространство функций одного лишь $x$, таких, что $\int f\,dx = 0$, то $D_+$ можно рассматривать как уходящее пространство для сужения $U$ на $\{1\}^{\perp}$, откуда следует, что $U$ есть перемешивание. Теорема XI.82 важна для непрерывного случая. Действительно, определим **$K$-систему** как пространство с мерой $\langle\Omega, \Sigma, \mu\rangle$, где $\mu(\Omega) = 1$, однопараметрическую группу $T_t$ сохраняющих меру преобразований и такую подалгебру $\Sigma_+ \subset \Sigma$, что (i) $T_t[\Sigma_+] \subset \Sigma_+$ при $t > 0$; (ii) наибольшая $\sigma$-алгебра, содержащаяся во всех $T_t[\Sigma_+]$, есть $\{\varnothing, \Omega\}$; (iii) наименьшая $\sigma$-алгебра, содержащая все $T_t[\Sigma_+]$, есть $\Sigma$. Если выбрать $\mathscr{H} = \left\{f \in L^2 \,\middle|\, \int f d\mu = 0\right\}$, $D_+ = \{f \in \mathscr{H} \mid f\ \ \Sigma_+\text{-измеримы}\}$ и $U(t) f = f \circ T_t^{-1}$, то $D_+$ есть уходящее подпространство и, в частности, $T_t$ — перемешивание.

В своей книге Лакс и Филлипс в качестве основного примера, иллюстрирующего приложения их главных теорем (пример 3), пользуются рассеянием звуковых волн на препятствии с граничными условиями Дирихле. Их теория применима также к граничным условиям Неймана и некоторым другим. Мы рассмотрели рассеяние в неоднородной среде как иллюстрацию общей теории для того, чтобы облегчить сравнение с техникой § 10. Вследствие интереса к связи между геометрией препятствия, локальным убыванием энергии и полюсами оператора рассеяния (см. ниже) рассеяние на препятствии в однородной среде оказалось основной задачей, которая рассматривалась в литературе, хотя многие авторы указывали на то, что их результаты распространяются и на неоднородную среду. Специально неоднородный случай рассмотрен при помощи теории Лакса—Филлипса в работе: J. La Vita, J. Schulenberger, C. Wilcox, The scattering theory of Lax and Phillips and wave propagation problems of classical physics.— *ONR Tech. Rep.* 16 (1971).

Теорема XI.89 представляет собой частный случай общей теоремы Фура и Сигала (Y. Foures, I. Segal, Causality and analyticity.— *Trans. Amer. Math.*

*Soc.* 78 (1955), 385—405). Доказательство теоремы Фату можно найти в гл. 11 книги: P. Duren, Theory of $H^p$ Spaces.— New York: Academic Press, 1970. Сама идея восходит к работе Фату (P. Fatou, Séries trigonométiques et séries de Taylor.— *Acta Math.* 30 (1906), 335—400), который рассматривал случай ограниченной аналитической функции в круге. Оператор рассеяния $s(z)$ в книге Лакса и Филлипса аналитичен в *нижней* полуплоскости, так как они определяют преобразование Фурье со знаком плюс, а мы—со знаком минус. Доказательство теорем XI.90 и XI.91, связывающих полюсы $s(z)$ со спектром $B$, см. в книге Лакса и Филлипса. Формулировки там другие, так как они записывают полугруппы в виде $Z(t)=e^{Bt}$, а мы—в виде $e^{-Bt}$. Поэтому у них $B$ имеет спектр в левой полуплоскости, а у нас—в правой.

Полюсы оператора рассеяния тесно связаны с физическими наблюдениями, так что важно определить их положение в нижней полуплоскости. Согласно теореме XI.90, эта задача сводится к изучению $\sigma(B)$. С помощью функционального исчисления для $B$ результат теоремы XI.91 может быть усилен в разных направлениях за счет дополнительных допущений.

***Теорема.*** Пусть выполнены все условия теоремы XI.91. Тогда:

(a) если $\|Z(T)\|=a<1$ для некоторого $T$, то

$$\sigma(B)\subset\{z \mid \operatorname{Re} z\geqslant -(\ln a)/T\};$$

(b) если $Z(T)$ компактен для некоторого $T$, то при любом $c>0$ в множестве $\{z \mid \operatorname{Re} z<c\}$ содержится лишь конечное множество точек из $\sigma(B)$;

(c) если при некотором $T$ область значений $Z(T)$ лежит в $D(B)$, то существуют $a\in\mathbb{R}$, $b<0$, такие, что

$$\sigma(B)\subset\{z \mid \operatorname{Re} z>a+b\ln|z|\}.$$

Условия (a) и (b) были найдены Лаксом и Филлипсом в их книге. Они показали также, что из условия (b) вытекает существование асимптотического ряда по энергетической норме для решения в ограниченной области; этот ряд представляет собой сумму экспонент с отношениями, зависящими от положения полюсов. Из-за этого в приложениях особенно важно убедиться в том, что выполнено условие (b). Условие (c) было установлено и доказано в работе Лакса и Филлипса (P. Lax, R. S. Phillips, A logarithmic bound on the location of the poles of the scattering matrix.— *Arch. Rational Mech. Anal.* 40 (1971), 268—280) для уравнения $u_{tt}-c(x)^2\Delta u-q(x)u=0$ при многочисленных различных предположениях. Моравец и Людвиг (C. S. Morawetz, D. Ludwig, The generalized Huygens' principle for reflecting bodies.— *Comm. Pure Appl. Math.* 22 (1969), 189—205) доказали общий принцип Гюйгенса для распространения особенностей и убывания энергии при рассеянии на выпуклом теле (граничные условия Дирихле) и воспользовались этим результатом для доказательства (b). Другое доказательство (b), основанное на той же формулировке принципа Гюйгенса, изложено в статье: R. S. Phillips, A remark on the preceding paper of C. S. Morawetz and D. Ludwig.— *Comm. Pure Appl. Math.* 22 (1969), 207—211. В статьях Моравеца (C. S. Morawetz, The decay of solutions of the exterior initial-boundary value problem for the wave equation.— *Comm. Pure Appl. Math.* 14 (1961), 561—568; The limiting amplitude principle.— *Comm. Pure Appl. Math.* 15 (1962), 349—361) было показано, что энергия убывает равномерно как $t^{-1}$ в ограниченных областях вне звездообразного препятствия; далее Лакс, Моравец и Филлипс показали, что из этого следует экспоненциальное убывание (P. Lax, C. S. Morawetz, R. S. Phillips, Exponential decay of solutions of the wave equation in the exterior of a star-shaped obstacle.— *Comm. Pure Appl. Math.* 16 (1963), 477—486). Отсюда в свою очередь следует, что $\|Z(t)\varphi\|\leqslant ce^{-\alpha t}\|\varphi\|$, так что (a) выполняется в случае звездообразного препятствия.

Заметим, что, проверяя предположения теоремы XI.91 в примере 3, мы пользовались фактом убывания энергии, но не требовали ни равномерности, ни каких-либо специальных геометрических условий на препятствие. С другой стороны, чтобы получить равномерное убывание, надо наложить некоторые геометрические требования (как видно из названий цитированных статей), потому что если край препятствия сильно зазубрен, можно удержать энергию в его окрестности на произвольно большое время, подбирая соответствующие граничные условия. В своей книге Лакс и Филлипс высказывают гипотезу, что если время пребывания световых лучей в окрестности препятствия не ограничено сверху, то $\|Z(t)\|=1$ при всех $t$. Эта гипотеза была подтверждена Ральстоном (J. Ralston, Solutions of the wave equation with localized energy.— *Comm. Pure Appl. Math.* **22** (1969), 807—823). В другой статье Ральстон показывает, что это справедливо и в неоднородном случае, если $c(x)$ слишком «извивается» на бесконечности (Trapped rays in spherically symmetric media and poles of the scattering matrix.— *Comm. Pure Appl. Math.* **24** (1971), 571—582). Другая гипотеза Лакса и Филлипса состояла в том, что если время пребывания вблизи препятствия ограничено, то $Z(t)$ в конце концов компактен, откуда, в частности, следует в силу (233), что $\|Z(t)\|$ становится меньше единицы. Эта последняя более слабая гипотеза была доказана в работе: C. Morawetz, J. Ralston, W. Strauss, Decay for solutions of wave equations outside of non-trapping obstacles.— *Comm. Pure Appl. Math.* **30** (1977), 447—508. Связь между геометрией препятствия и полюсами оператора рассеяния через оценки убывания энергии—одна из самых замечательных черт метода Лакса—Филлипса. На этом пути Моравец и Людвиг показывают, что формальное решение задачи рассеяния, предлагаемое геометрической оптикой, является асимптотическим к точному решению в теории Лакса—Филлипса (C. S. Morawetz, D. Ludwig, An inequality for the reduced wave operator and the justification of geometrical optics.— *Comm. Pure Appl. Math.* **21** (1968), 187—203). Другие результаты, относящиеся к положению полюсов $s(z)$, см. в статьях: P. Lax, R. S. Phillips, Decaying modes for the wave equation in the exterior of an obstacle.— *Comm. Pure Appl. Math.* **22** (1969), 737—787; On the scattering frequencies for the Laplace operator for exterior domains.— *Comm. Pure Appl. Math.* **25** (1972), 85—101.

Приложение их метода к квантовому рассеянию описано Лаксом и Филлипсом в их книге, а дальнейшее развитие—в статье: P. D. Lax, R. S. Phillips, The acoustic equation with an indefinite energy form.— *J. Funct. Anal.* **1** (1967), 37—83. См. также: C. Dolph, J. McLeod, D. Thoe, The analytic continuation to the unphysical sheet of the resolvent kernel and the scattering operator associated with the Schrödinger equation.— *J. Math. Anal. Appl.* **16** (1966), 311—332.

В своей книге Лакс и Филлипс приводят также два доказательства (одно из них принадлежит М. Шифферу) того, что препятствие (в случае условий Дирихле) однозначно определено оператором рассеяния. Это утверждение было обобщено Майдой (A. Majda, High frequency asymptotics for the scattering matrix and the inverse problem of acoustical scattering.— *Comm. Pure Appl. Math.* **29** (1976), 261—291; A representation formula for the scattering operator and the inverse problem for arbitrary bodies.— *Comm. Pure Appl. Math.* **30** (1977), 165—194), который показал, что препятствие с выпуклой оболочкой определяется при помощи явной формулы высокочастотными асимптотиками ядра $k(\theta, \omega; \sigma)$ оператора $I-\hat{S}$. Результаты Майды в свою очередь были обобщены Лаксом и Филлипсом (P. Lax, R. S. Phillips, Scattering of sound waves from an obstacle.— *Comm. Pure Appl. Math.* **30** (1977), 195—233).

Подход Лакса и Филлипса был далее развит и применен в разнообразных других ситуациях. Для случая четных размерностей см.: P. Lax, R. S. Phillips. Scattering theory for the acoustic equation in an even number of space dimensions.— *Indiana Univ. Math. J.* **22** (1972), 101—134. Для симметрических гиперболических систем с сохраняющейся энергией см.: P. D. Lax, R. S. Phillips, Scattering theory.— *Rocky Mountain J. Math.* **1** (1971), 173—223. Для диссипативных гиперболических систем см.: P. D. Lax, R. S. Phillips, Scattering theory for dissipative hyperbolic systems.— *J. Funct. Anal.* **14** (1973), 172—236; C. Foias, On the Lax—Phillips nonconservative scattering theory.— *J. Funct. Anal.* **19** (1975), 272—301. Для движущихся рассеивающих объектов см.: J. Cooper W. Strauss, Energy boundedness and decay of waves reflected off a moving boundary.— *Indiana Univ. Math. J.* **25** (1976), 671—690. Для приложений к явлениям переноса см.: P. D. Lax, R. S. Phillips, Scattering theory for transport phenomena. In.: Functional Analysis (B. Gelbaum. ed.).— Thompson, 1967. Рассеяние в некоторых неевклидовых геометриях, которое приводит к $S$-матрицам, связанным с автоморфными функциями, исследовано в работах: Б. С. Павлов, Л. Д. Фаддеев, Теория рассеяния и автоморфные функции.— *Записки научных семинаров ЛОМИ* 27 (1972), 161—193, и P. Lax, R. S. Phillips, Scattering Theory for Automorphic Functions.— Ann Math. Stud. 87.— Princeton Univ. Press, 1976.

Прием скручивания из дополнения восходит к работе Девиса и Саймона указанной в замечаниях к § 4. Они рассматривают случай граничного условия Неймана, а также некоторые другие приложения.

*§ XI.12.* Материал этого раздела основан на трех статьях: J. Hejtmanek, Scattering theory of the linear Boltzmann operator.— *Commun. Math. Phys.* **43** (1974), 109—120; B. Simon, Existence of the scattering matrix for the linearized Boltzmann equation.— *Commun. Math. Phys.* **41** (1975), 99—108; J. Voigt, On the existence of the scattering operator for the linear Boltzmann equation.— *J. Math. Anal. Appl.* **58** (1977), 541—558. См. также работу: V. Protopopescu, On the scattering matrix for the linear Boltzmann equation.— *Rev. Roumaine Phys.* **21** (1976), 991—994.

Хейтманек (статья которого была первой появившейся в виде препринта) выделил проблему и доказал основной результат о разрешимости из теоремы XI.93, включая утверждения (a)—(c), и теорему XI.94. Саймон ввел лемму, появившуюся в тексте перед теоремой XI.94, доказал теорему XI.95 при более сильном предположении, что $(\operatorname{diam} D)(M(\sigma_a)+M(\sigma_p)) < 1$, и при этом же предположении доказал теорему XI.96. Замечания Саймона о том, что эти идеи тесно связаны с теорией гладких возмущений, рассмотрены в § XIII.7. Работа Саймона содержит также пример, показывающий, что динамика может не обладать свойством обращаемости в $L^1_+$. Фойгт доказал оценку из теоремы XI.98 (d), а также теоремы XI.95 и XI.96 в использованных нами предположениях. Он также обобщил эти результаты на некоторые случаи с некомпактным носителем и дал пример регулярной подкритической пары, для которой оператор $\tilde{\Omega}^-$ не существует.

Общее (т. е. нелинейное) уравнение Больцмана было предложено в работе. L. Boltzmann, Über die Aufstellung und Integration der Gleichungen, welche die Molekularbewegung in Gasen bestimmen.— *Sitz. Wien.* 74 (1876), 503. Недавнее обсуждение математических проблем, связанных с этим уравнением, см. в книге: E. G. D. Cohen, W. Thirring, The Boltzmann Equation.— Vienna: Springer 1973. Линеаризованное уравнение Больцмана интенсивно применялось для изучения совсем других явлений, которые мы здесь не рассматривали. Для тех явлений переноса, которые связаны с реакторами, см.: I. Bell, S. Glasston, Nuclear Reactor Theory.— Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1970; для явлений переноса в звездах см.: D. Mihalas, Stellar Atmospheres.— San Francisco: Freeman, 1970.

*§ XI.13.* Первые результаты теории рассеяния для уравнения

$$u_{tt}-\Delta u+m^2u=-gu^3 \qquad (343)$$

были доказаны Сигалом: I. Segal, Quantization and dispersion for nonlinear relativistic wave equations.— Proc. Conf. Math. Theory of Elementary Particles

(Dedham, Mass. 1965), pp. 79—108.— Cambridge, Mass.: MIT Press. Сигал показал, что для всех достаточно хороших решений $u_-$ свободного уравнения существует решение $u$ уравнения (343), такое, что $u_- - u \to 0$, когда $t \to -\infty$. Аналогично, для каждого $u_+$ существует некоторое $u$. Таким образом, Сигал построил волновые операторы $\Omega^\pm$ на определенных множествах хороших асимптотических данных. В работе: I. Segal, Dispersion for nonlinear relativistic wave equations.— *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **1** (1968), 459—497, он показал, что если $u_-$ и $u_+$ малы (или $g$ мало), то операторы $\Omega^\pm$ имеют обратные, так что для малых данных существует оператор рассеяния. Эта статья содержит бо́льшую часть представленных нами сведений о рассеянии для малых данных. Впоследствии методы для малых данных были применены Чедемом к более общим уравнениям (J. Chadam, Asymptotics for $\Box u = m^2u + G(x, t, u, u_x, u_t)$. I, II.— *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Fis. Mat.* **26** (1972), 33—65, 67—95), а Валем к случаю $m=0$ (W. von Wahl, Über die klassische Lösbarkeit des Cauchyproblems für nichtlineare Wellengleichungen bei kleinen Anfangswerten und das asymptotische Verhalten der Lösungen.— *Math. Z.* **114** (1970), 281—299. Абстрактная теория низкоэнергетического рассеяния, излагаемая нами, близко следует построению Штрауса (W. Strauss, Nonlinear scattering theory. In.: Scattering Theory in Mathematical Physics (J. Lavita and J.-P. Marchand, eds.).— Dordrecht, The Netherlands: Reidel, 1974). Приводимое нами доказательство теоремы XI.98 содержит некоторые дополнительные улучшения, сделанные Штраусом.

Наше доказательство теоремы XI.101 построено по образцу оригинального доказательства Штрауса (W Strauss, Decay and asymptotics for $\Box u = F(u)$.— *J. Funct. Anal.* **2** (1968), 409—457). Идея доказательства оценки убывания интегрированием по частям и идентификацией положительных слагаемых в сохраняющейся величине восходит по крайней мере к работе: C. Morawetz, The limiting amplitude principle.— *Comm. Pure Appl. Math.* **15** (1963), 349—361. Доказать асимптотическую полноту для уравнения (343) в случае $m > 0$ гораздо труднее, чем в случае $m=0$. Несмотря на то что имеется нарушенный конформный заряд, аналогичный заряду из задачи 153, слагаемое, являющееся источником, положительно, что нарушает оценку убывания. Для случая $m>0$ и когда $g=g(x)$ мала на бесконечности, Штраус построил операторы $\Omega^+$ и $\Omega^-$ в работе: W. Strauss, Decay of solutions of hyperbolic equations with localized nonlinear terms. In: Symposia Mathematica, Vol. VII, Probleme di Evoluzione, Istituto Nazionale di Alta Mathematica (Roma).— New York: Academic Press, 1971, pp. 339—355. Далее, Моравец и Штраус доказали асимптотическую полноту для $m>0$, когда $g$ — положительная константа, в статье: C. Morawetz, W. Strauss, Decay and scattering of solutions of a nonlinear relativistic wave equation.— *Comm. Pure Appl. Math.* **25** (1972), 1—31. Их весьма трудное доказательство улучшает слабую оценку убывания, которая ранее была получена Моравецем (C. Morawetz, Time decay for the Klein—Gordon equation.— *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **306** (1968), 291—296). Абстрактная версия их доказательства появилась в работе: M. Reed, Construction of the scattering operator for abstract nonlinear wave equations.— *Indiana Univ. Math. J.* **25** (1976), 1017—1027. Дальнейшие свойства оператора рассеяния доказаны в статье: C. Morawetz, W. Strauss, On a nonlinear scattering operator.— *Comm. Pure Appl. Math.* **26** (1973), 47—54.

Асимптотическая полнота для нелинейного уравнения Шредингера

$$idu/dt = (-\Delta + m)\,u + f(u)$$

для различных нелинейных членов $f(u)$ была доказана в работах: J. E. Lin, W. Strauss, Decay and scattering of solutions of the nonlinear Schrödinger equation.— *J. Funct. Anal.* **30** (1978), 245—263; J. Ginibre, G. Velo, On a class of non-linear Schrödinger equations, I, II.— *J. Funct. Anal.* **32** (1979), 1—32, 33—71; III.— *Ann. Institut H. Poincaré* **28** (1978), 287—316. Для получения необходимой априорной оценки убывания Жинибр и Вело пользуются нарушенной инвариантностью аналогично применению нарушенной конформной инвариантности, описанному в задаче 153.

По этому предмету имеется обширная литература. Ссылки и дальнейшее обсуждение см. в лекциях М. Рида: M. Reed, Abstract Non-linear Wave Equations. Lecture Notes in Mathematics, **507**.— New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1976, лекциях Штрауса «Non-linear scattering theory», на которые мы ссылались выше, и его же лекциях в сб. «Invariant wave equations», на которые мы ссылаемся ниже.

Обсуждение связанных состояний в нелинейных системах и, в частности, детали рассмотренного в этом разделе примера можно найти в работе: W. Strauss, Existence of solitary waves in higher dimensions.— *Commun. Math. Phys.* **55** (1977), 149—162, где приведены ссылки на более ранние работы.

Проводилось также интенсивное исследование частного класса уравнений, включающего уравнение Кортевега—де Фриза и уравнение sin-Гордон, которые обладают связанными состояниями с очень специальными свойствами. А именно, здесь нет рассеяния между каналами. Иными словами, состояние, которое выглядит как $n$ солитонов при $t=-\infty$, будет выглядеть как $n$ солитонов и при $t=+\infty$. На самом деле даже скорости солитонов будут теми же самыми. Как введение в литературу по этому вопросу см.: C. Scott, F. Chu, D. McLaughlin, The soliton: A new concept in applied science.— *Proc. IEEE* **61** (1973), 1443—1483, и Nonlinear Wave Motion (A. Newell, ed.), Lectures in Applied Mathematics, **15**.— Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1974.

Теорема Нётер восходит к работе: E. Noether, Invariante Variationsprobleme.— *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* (1918), 235—257. Эти идеи стали стандартной частью классической теории поля; см., например, соответствующее рассмотрение в книге: Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей.— М.: Наука, 1976. То, что инварианты динамики связаны с группами преобразований, коммутирующих с динамикой,— идея, знакомая по классической и квантовой механике. Пусть $T_t^{(H)}$ — поток в фазовом пространстве, порождаемый гамильтонианом $H(p, q)$ посредством уравнений Гамильтона (X.153). Если $T_t^{(f)}$ — поток, порождаемый $f(p, q)$, и $T_t^{(H)}T_s^{(f)}=T_s^{(f)}T_t^{(H)}$, то функция $f$ инвариантна относительно действия $T_t^{(H)}$, т. е. $f(T_t^{(H)}\langle p, q\rangle)=f(p, q)$. В квантовой механике пусть $H$ — гамильтониан, а $A$ — другой самосопряженный оператор. Если $e^{-isH}$ и $e^{-itA}$ коммутируют, то спектральные меры оператора $A$ инвариантны относительно действия $e^{-itH}$, т. е. $\left(E_\Omega^{(A)}e^{-itH}\varphi, e^{-itH}\varphi\right)=\left(E_\Omega^{(A)}\varphi, \varphi\right)$ для всех $\varphi$ и $t$. Отметим, однако, две вещи, относящиеся к случаю классической теории поля. Во-первых, удобнее работать в лагранжевой формулировке, чем в гамильтоновой. Во-вторых, сохраняющиеся величины возникают как интегралы от локальных плотностей.

Для знакомства с другим, хотя и родственным подходом к нахождению сохраняющихся величин см. лекции Штрауса: W. Strauss, Nonlinear invariant wave equations. In: Invariant Wave Equations, Lecture Notes in Physics, **73**.— New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1978, pp. 197—249.

Группа дробно-линейных преобразований плоскости $\mathbb{C}$ геометрически порождается вращениями, трансляциями, масштабными преобразованиями и инверсией на $\mathbb{R}^2$. Аналогично, группа преобразований $\mathbb{R}^4$, порождаемая вращениями, трансляциями, масштабными преобразованиями и инверсией $x \longrightarrow x/x\cdot x$, называется конформной группой, поскольку она также сохраняет углы. Если мы продолжим $t$ до $it$, то группа вращений перейдет в группу Лоренца, а инверсия станет лоренцевой инверсией; это и будет именно та группа, которую физики обычно называют конформной группой. Она сохраняет углы в смысле лоренцева скалярного произведения.

§ *XI.14*. Понятие магнонов впервые возникло в физической литературе в связи с теорией ферромагнетизма. В наши намерения не входит сколько-нибудь полное обсуждение обширной литературы по этой теме, как и вообще по модели Гейзенберга. Упомяием лишь поучительную статью Дайсона (F. Dyson, General theory of spin-wave interactions.— *Phys. Rev.* **102** (1956), 1217—1230) и коллекцию препринтов по ферромагнетизму, выпущенную Японским физическим обществом.

Основные идеи теории рассеяния в модели Гейзенберга при нулевой температуре были высказаны Уоттсом (G. J. Watts, Theory of spin-wave scattering.— Ph. D. Thesis, Bedford College, 1973) и Хеппом (K. Hepp, Scattering theory in the Heisenberg ferromagnet.— *Phys. Rev. B* **5** (1979), 95—97). Подробный обзор можно найти у Стритера (R. F. Streater, Spin-wave scattering. In: Scattering Theory in Mathematical Physics (J. A. La Vita, J. P. Marchand. eds.), pp. 273—298.— Dordrecht, The Netherlands, Reidel. 1974).

Связанные состояния магнонов рассматриваются в работах: J. G. Hanus, Bound states in the Heisenberg ferromagnet.— *Phys. Rev. Lett.* **11** (1963), 336—337; M. Wortis, Bound states of two spin waves in the Heisenberg ferromagnet.—*Phys. Rev.* **132** (1963), 85—97.

В одномерной модели Гейзенберга рассеяние магнонов можно исследовать гораздо подробнее, поскольку многие формулы могут быть получены в замкнутом виде. В частности, при каждом $n$ существует одно и только одно $n$-магнонное связанное состояние. Причина, по которой эта модель так легко поддается изучению, заключается в том, что, подобно одномерным солитонам, спиновые волны не рассеиваются друг на друге, а также нет передачи импульса. Дальнейшие подробности см. в работах: L. Thomas, Ground state representation of the infinite one-dimensional Heisenberg ferromagnet. I.— *J. Math. Anal. Appl.* **59** (1977), 392—414; D. Babbitt, L. Thomas, Ground state representation of the infinite one-dimensional Heisenberg ferromagnet. II. An explicit Plancherel formula.— *Commun. Math. Phys.* **54** (1977), 255—278; D. Babbitt, L. Thomas, Ground state representation of the infinite one-dimensional Heisenberg ferromagnet, III. Scattering theory.— *J. Math. Phys.* **19** (1978), 1699—1704.

Гильбертово пространство, построенное нами в случае бесконечного объема, допускает также реализацию в виде бесконечного тензорного произведения. Пусть

$$D_0=\left\{\bigotimes_{\alpha\in\mathbb{Z}^3} v_\alpha \,\middle|\, v_\alpha\in\mathbb{C}^2 \text{ и все } v_\alpha, \text{ за исключением конечного числа, равны } \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Линейную структуру введем здесь так, чтобы произведение $\bigotimes v_\alpha$ было линейным по каждому из сомножителей при фиксированных остальных. Для $v$ и $w$ из $D_0$, $v=\bigotimes v_\alpha$, $w=\bigotimes w_\alpha$ определим

$$(v, w)=\prod_{\alpha\in\mathbb{Z}^3}(v_\alpha, w_\alpha)_{\mathbb{C}^2_\alpha}. \tag{344}$$

Это произведение не бессмысленно, поскольку все его члены, за исключением конечного числа, равны единице. Далее, можно показать, что (344), расширенное до полуторалинейной формы, определяет внутреннее произведение на $D_0$ (задача 136). Пополнение $D_0$ по этому внутреннему произведению есть гильбертово пространство—одно из несчетного множества различных между собой тензорных произведений, которые мы можем построить, заменяя $\binom{0}{1}$ различными последовательностями. Это пространство изоморфно $\mathscr{H}$ относительно отображения $\psi(\{\alpha_\beta\})\mapsto\bigotimes v_\beta$, где $v_\beta=\binom{0}{1}$ (соответственно $\binom{1}{0}$) при $\alpha_\beta=0$ (соответственно 1). Бесконечные тензорные произведения были введены Дж. фон Нейманом (J. von Neumann, On infinite direct products.— *Compositio Math.* **6** (1938), 1—77). Краткое изложение их теории дано в приложении к работе: M. Reed, Self-adjointness in infinite tensor product spaces.— *J. Funct. Anal.* 5 (1970), 94—124.

§ XI.15. Математическое описание рассеяния квантованных полей восходит к работам: R. Feynman, The theory of positrons.— *Phys. Rev.* **76** (1949), 749—759; A. Salam, P. Matthews, Fredholm theory of scattering in a given time-dependent field.— *Phys. Rev.* **90** (1953), 690—695; J. Schwinger, Theory of quantized fields, IV, V.— *Phys. Rev.* **92** (1953), 1283—1299; **93**(1954), 615—628. Во всех этих четырех работах рассматривается электрон-позитронное рассеяние в заданном внешнем классическом электромагнитном поле. Фейнман выписал последовательные приближения для некоторых амплитуд рассеяния в терминах классических пропагаторов и рассмотрел связи между полученными им формулами, теорией дырок Дирака и вторичным квантованием. В работах Салама—Мэтьюза и Швингера выписано то, что присутствовало в работе Фейнмана неявно, а именно разложения типа Дайсона для оператора рассеяния в терминах внешнего поля и квантованного in-поля, а также изучена сходимость выражений для некоторых матричных элементов.

Реализация юкавских теорий в виде интеграла по внешним полям на формальном уровне была развита в работах: A. Salam, P. Matthews, The Green's functions of quantized fields.— *Nuovo Cimento* **12** (1954), 563—565; Propagators of quantized fields.— *Nuovo Cimento* **2** (1955), 120—134. Для двумерной теории этот формализм был поставлен на строгую основу Э. Зайлером (E. Seiler, Schwinger functions for the Yukawa model in two dimensions with space-time cutoff.— *Commun. Math. Phys.* **42** (1975), 153—182). См. также: E. Seiler, B. Simon, Nelson's symmetry and all that in the $(\text{Yukawa})_2$ and $(\varphi^4)_3$ field theories.— *Ann. Phys.* **97** (1976), 476—518. Именно этот формализм обеспечил большую часть последних достижений теории, включая проверку выполнения аксиом Вайтмана при малых константах связи.

Первая попытка разработать строгий и полный математический аппарат для задач с внешним полем была предпринята Капри (A. Capri, Electron scattering in a given time-dependent electromagnetic field.— *J. Math. Phys.* **10** (1969), 575—580). Капри указал на то, что построение динамики квантованного поля можно полностью свести к построению аналогичной классической динамики. Однако данное Капри доказательство существования вакуума out-полей было неполным. Эту трудность удалось преодолеть в работе: B. Schroer, R. Seiler, J. Swieca, Problems of stability for quantum fields in external time-dependent potentials.— *Phys. Rev. D* **2** (1970), 2927—2937, где были рассмотрены также спины, отличные от 1/2. Для случаев спина 0 (со связью вида (278)) и спина 1/2 обзор развития теории был дан Р. Зайлером (R. Seiler, Quantum theory of particles with spin zero and one half in external fields.— *Commun. Math. Phys.* **25** (1972), 127—151). Наше изложение частично следует этой работе.

Из других работ по проблеме внешнего поля можно указать: J. Bellissard, Quantized fields in interaction with external fields; I. Exact solutions and perturbation expansion; II. Existence theorems.— *Commun. Math. Phys.* **41** (1975), 235—266; **46** (1976), 53—74; P. Bongaarts, S. Ruijsenaars, The Klein paradox as a many particle problem.— *Ann. Phys.* **101** (1976), 289—318; J. M. Chadam, Unitarity of dynamical propagators of perturbed Klein—Gordon equations.— *J. Math. Phys.* **9** (1968), 386—396; W. Hochstenbach, Field theory with an external potential.— *Commun. Math. Phys.* **51** (1976), 211—217; M. Klaus, G. Scharf, The regular external field problem in quantum electrodynamics.— *Helv. Phys. Acta* **50** (1977), 779—802; Vacuum polarisation in Fock space.— *Helv. Phys. Acta* **50** (1977), 803—813; L. E. Lundberg, Relativistic quantum theory for charged spinless particles in external vector fields.— *Commun. Math. Phys.* **31** (1973), 295—316; J. Palmer, Scattering automorphisms of the Dirac fields.— *J. Math. Anal. Appl.* **64** (1978), 189—215; Symplectic groups and the Klein—Gordon field.— *J. Funct. Anal.* **27** (1978), 308—336; S. Ruijsenaars, Charged particles in external fields; I. Classical theory; II. The quantized Dirac and Klein—Gordon theories.— *J. Math. Phys.* **18** (1977), 720—737; *Commun. Math. Phys.* **52** (1977), 267—294. См. также статьи в сб.: Invariant Wave Equations (G. Velo, A. S. Wightman, eds.), Lecture Notes in Physics 73.— Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1978.

Теорема X1.108 принадлежит Шейлу (D. Shale, Linear symmetries of free boson fields.— *Trans. Amer. Math. Soc.* **103** (1962), 149—167). Аналогичная теорема для фермионов доказана в работе: D. Shale, W. Stinespring, Spinor representations of infinite orthogonal groups.— *J. Math. Mech.* 14 (1965), 315—322. В обеих работах используются результаты Сигала (I, Segal, Distributions in Hilbert space and canonical systems of operators.— *Trans. Amer. Math. Soc.* 88 (1958), 12—41 О преобразованиях Боголюбова существует обширная литература. См., например, работы: R. Powers, E. Størmer, Free states of the canonical anti-commutation relations.— *Commun. Math. Phys.* **16** (1970), 1—33; K. Fredenhagen, Implementation of automorphisms and derivations of the CAR algebra.— *Commun. Math. Phys.* 52 (1977), 255—266; G. Labonté, On the nature of strong Bogoliubov transformations for fermions.— *Commun. Math. Phys.* **36** (1974), 59—72, для фермионного случая; P. Kristensen, L. Mejlbo, E. T Poulsen, Tempered distributions in infinitely many dimensions, III: Linear transformations of field operators.— *Commun. Math. Phys.* **6** (1967), 29—48; A. Klein, Quadratic expressions in a free boson field.— *Trans. Amer. Math. Soc.* **181** (1973), 439—456; Ф. А. Березин, Метод вторичного квантования.— М.: Наука, 1965,— для бозонного случая. См. также S. Ruijsenaars, On Bogoliubov transformations; I, II.— *J. Math. Phys.* 18 (1977), 517—526; *Ann. Phys.* (to appear.)

Для преобразований Боголюбова существует также эквивалентный формализм, использующий симплектические преобразования. Этот подход используется, в частности, в работах Сигала и Шейла. Он отличается большей компактностью и большей математической элегантностью и обнаруживает связи с различными проблемами теории чисел и теории представлений групп. Однако явные вычисления, подобные приводимым в нашем тексте, часто легче выполнить в формализме Боголюбова.

Опишем подход симплектических преобразований. Напомним, что по Сигалу оператор поля $\Phi_S(f)$ (см. § X.7) определялся над любым комплексным гильбертовым пространством $\mathcal{H}$, однако отображение $f \mapsto \Phi_S(f)$ было только *вещественно* линейным. Канонические перестановочные соотношения имели вид

$$[\Phi_S(f), \Phi_S(g)] = i \operatorname{Im}(f, g)_{\mathcal{H}}.$$

**Симплектическим** преобразованием назовем *вещественное* линейное отображение $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, такое, что

$$\operatorname{Im}(Tf, Tg) = \operatorname{Im}(f, g). \tag{345a}$$

Если обозначить через $T^t$ сопряженное к $T$ как к отображению на вещественном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_r$ с внутренним произведением $(f, g)_r = \operatorname{Re}(f, g)$, то (345a) эквивалентно соотношению

$$T^tJT = J, \tag{345b}$$

где $J$ — оператор умножения на $i$. Если подобрать комплексное сопряжение $C$, то можно написать $\mathcal{H}_r = \mathcal{K} \oplus J\mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — вещественное подпространство $\mathcal{K} = \{\varphi \mid C\varphi = \varphi\}$. В смысле этой прямой суммы $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, и в случае $\dim \mathcal{H} < \infty$ (345b) отождествляется с обычным условием симплектического преобразования. Симплектические преобразования индуцируют естественное преобразование для поля:

$$(\mathcal{T}\Phi)_S(f) = \Phi_S(Tf). \tag{346}$$

Поскольку

$$a^{\dagger}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi_S(f) - i\Phi_S(Jf)], \quad a(Cf) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\Phi_S(f) + i\Phi_S(Jf)],$$

то (346) равносильно (301), если положить

$$(\mathcal{F}\Phi)_S(f)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[a_B^{\dagger}(f)+a_B(Cf)\right],$$
$$B_+=\frac{1}{2}[T-JTJ], \qquad B_-=\frac{C}{2}[T+JTJ]. \tag{347}$$

Подчеркнем, что $B_{\pm}$ являются комплексно линейными и (298) эквивалентно (345). Обратные формулы (299), (300) эквивалентны соотношению $T^{-1}=-JT^{t}J$, которое имеет место, если оператор $T$ обратим (в общем случае он, возможно, имеет только левый обратный).

Оригинальный результат Шейла о реализуемости утверждает, что если $T$ — обратимое симплектическое преобразование, то унитарный оператор $U_T$, такой, что $U_T\Phi_S U_T^{-1}=(\mathcal{F}\Phi)_S$, существует в том и только том случае, когда $T^tT-I$ есть оператор Гильберта—Шмидта. Но, в силу (347) и (345b),

$$T^tT-I=2TCB_-, \tag{348}$$

так что критерий Шейла эквивалентен критерию $B_-\in\mathcal{I}_2$, который мы можем установить, поскольку $2T^tC$ обратим. Доказательство Шейла несколько отличается от нашего. Отправным пунктом для него служит вещественное полярное разложение $T=Q\,|T|$ с $|T|=\sqrt{T^tT}$. Ортогональное симплектическое преобразование $Q$ явно реализуется оператором $\Gamma(Q)$, который на $\Gamma_n(\mathcal{H})$ равен $Q\otimes\ldots\otimes Q$. В терминах преобразования Боголюбова $B(Q)_-=0$ в силу (348), так что $B(Q)_+$ унитарен и, тривиальным образом, $\Gamma(U)a^{\dagger}(f)\Gamma(U)^{-1}=a^{\dagger}(Uf)$. В результате теорему достаточно доказать для случая $T>0$. В этом случае можно формально реализовать $T$ как масштабное преобразование $S_T$ на $Q$-пространстве и написать явную формулу для унитарного оператора, индуцирующего $T$: $(Uf)(q)=N_T(q)f(S_Tq)$, где $N_T(q)^2$ есть якобиан замены переменных. Условие $T^tT-I\in\mathcal{I}_2$ необходимо, чтобы показать, что $N_T(q)$ корректно определен.

В случае $T^t=T$ теорема Шейла эквивалентна вопросу о том, когда два гауссова процесса являются взаимно абсолютно непрерывными. Этот факт обсуждается в § I.6 книги Б. Саймона «Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля» (Пер. с англ.— М.: Мир, 1976). Соответствующие результаты были хорошо известны в теории вероятностей еще до работы Шейла; см., например, J. Feldman, Equivalence and perpendicularity of Gaussian processes.— *Pacific J. Math.* 8 (1958), 699—708, а также: Я. Гаек, Об одном свойстве нормальных распределений произвольного стохастического процесса.— *Чехосл. матем. ж.* 8 (1958), 610—618.

Для того вида связи, который использовался в данном разделе, всю теорию можно было бы сформулировать для одного эрмитова скалярного поля. Для других видов часто приходится вводить заряженное поле.

Условия гладкости, налагавшиеся в данном разделе на $V(x,t)$, хотя и удобны, не имеют решающего значения. С другой стороны, какие-то условия малости $V$ при $|x|\to\infty$ и $|t|\to\infty$ все же необходимы для проведения нашего простого подхода. Действительно, допустим сначала, что $V(x,t)=\alpha(t)$ и $\alpha(\cdot)$ имеет компактный носитель по $t$, т. е. мы включаем, а затем выключаем постоянное скалярное поле. Тогда мы можем определить динамику взаимодействия так, как это сделано в данном разделе, получая для каждого момента времени $t$ представление канонических перестановочных соотношений $a(x,t)$, $b^{\dagger}(x,t)$; однако не следует ожидать, что эта динамика будет унитарно реализуема, поскольку включение поля $\alpha(t)$ равносильно изменению массы, а даже для свободного поля такое изменение означает переход к другому представлению канонических перестановочных соотношений (теорема X.46). Физическая причина этого состоит в том, что, поскольку потенциал действует на бесконечном пространстве, он может за конечный промежуток времени рождать бесконечное число пар. Теперь рассмотрим случай, когда $V(x, t) = \beta(x)$ не зависит от времени. Здесь неясно, как определить out-поля и out-динамику даже при условии, что функция $\beta(x)$ локализована в пространстве. И уж никак нельзя ожидать, что представления канонических перестановочных соотношений, соответствующие in-полям и out-полям, в общем случае унитарно эквивалентны, поскольку потенциал действует в интервале времени, достаточном для рождения бесконечного числа пар. Используя аппарат банаховых алгебр, Бонгаартс в работе: P. Bongaarts, The electron-positron field, coupled to external electromagnetic potentials, as an elementary $C^*$-algebra theory.— *Ann. Phys.* 56 (1970), 108—139, показал, как определить out-поля в случае уравнения Дирака в статическом внешнем поле. Для некоторых весьма частных случаев он доказал унитарную реализуемость динамики. Наличие таких трудностей уже в *линейных* задачах с внешними полями, когда не возникает проблем перемножения операторнозначных обобщенных функций, указывает на то, насколько сложной является динамика в существенно нелинейных полевых теориях.

Значительные усилия были приложены к решению задач с внешними полями для уравнений высших спинов ($s > 1$), когда во всех известных случаях возникают еще дополнительные трудности. Прежде всего нередко бывает трудно подобрать нужное положительно определенное внутреннее произведение на пространстве решений (положительная определенность требуется для вторичного квантования). Если же специально модифицировать внутреннее произведение для придания ему положительной определенности, то утрачиваются перестановочные соотношения для соответствующего распространяющегося поля. Затем в работах Вело и Цванцигера (G. Velo, D. Zwanziger, Propagation and quantization of Rarita—Schwinger waves in an external electromagnetic potential.— *Phys. Rev.* 186(1969), 1337—1341; Noncausality and other defects of interaction Lagrangians for particles of spin one and higher.— *Phys. Rev.* 188 (1969), 2218—2222) было показано, что для некоторых уравнений, формально лоренц-инвариантных, свойства распространения нарушают причинность. Точнее, было доказано следующее. Назовем фундаментальное решение «причинным», если его носитель лежит в световом конусе будущего, и «слабо причинным», если оно убывает в пространственно-подобных направлениях быстрее любой степени расстояния. Вело и Цванцигер показали для некоторых уравнений, что *если* слабо причинное фундаментальное решение существует, оно *не* является причинным. Недавно Л. Гординг показал, что существуют такие уравнения и такие внешние поля, для которых нет слабо причинных фундаментальных решений. Известны и другие аномалии. Ряд проясняющих дело обзорных статей по этой теме принадлежит Вайтману: A. S. Wightman, Introductory remarks. In: Troubles in the External Field Problem for Invariant Wave Equations (A. S. Wightman, reviewer).— New York: Gordon and Breach, 1971; Relativistic wave equations as singular hyperbolic systems.— *Proc. Symp. Pure Math.* XXIII, pp. 441—447. Amer. Math. Soc., 1973; Instability phenomena in the external field problem for two classes of relativistic wave equations. In: Essays in honor of Valentine Bargmann, pp. 423—460.— Princeton Univ. Press, 1976.

Существует обширная литература по потенциальному рассеянию для уравнений Дирака и Клейна—Гордона. По уравнению Дирака читатель может обратиться к работам: K. J. Eckhardt, On the existence of wave operators for Dirac operators.— *Manuscripta Math.* 11 (1974), 349—371; Scattering theory for Dirac operators.— *Math. Z.* 139 (1974), 105—131; J. C. Guillot, G. Schmidt, Spectral and scattering theory for Dirac operators.— *Arch. Rational Mech. Anal.* 55 (1974), 193—206; K. Mochinzuki, On the perturbation of the continuous spectrum of the Dirac operator.— *Proc. Japan Acad.* 40 (1964), 707—712; R. Prosser, Relativistic potential scattering.— *J. Math. Phys.* 4 (1963), 1048—1054; M. Thompson, Eigenfunction expansions and the associated scattering theory for potential perturbations of the Dirac equation.— *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 23 (1972), 17—55; статьи Веселича и Вейдмана, указанные в замечаниях к § 4; R. A. Weder, Spectral properties of the Dirac Hamiltonian.— *Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér.* 1 87 (1973), 341—355; O. Yamada, On the principle of limiting absorption for the Dirac operator.— *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 8 (1972/73), 557—577. Для уравнения Клейна—Гордона укажем следующие работы: J. M. Chadam, The asymptotic behavior of the Klein—Gordon equation with external potential; I, II.— *J. Math. Anal. Appl.* 31 (1970), 334—348; *Pacific J. Math.* 31 (1969), 19—31; монографию Дейфта, ссылка на которую дана в замечаниях к § 10; T. Kato, Spectral and scattering theory for the *j*-self-adjoint operators associated with the perturbed Klein—Gordon type equations.— *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I A Math.* 23 (1976), 199—221; L. Lundberg, Spectral and scattering theory for the Klein—Gordon equation.— *Commun. Math. Phys.* 31 (1973), 243—257; M. Schechter, The Klein—Gordon equation and scattering theory.— *Ann. Phys.* 101 (1976), 601—609 (см. также работы Шехтера по эллиптическим системам указанные в замечаниях к § XIII.8, и вторую из его статей, приведенных в замечаниях к § 3); W. Strauss, Scattering for hyperbolic equations.— *Trans. Amer. Math. Soc.* 108 (1963), 13—37; D. Thoe, Spectral theory for the wave equation with a potential term.— *Arch. Rational Mech. Anal.* 22 (1966), 364—406; K. Veselic, A spectral theory for the Klein—Gordon equation with an external electrostatic potential.— *Nuclear Phys. A* 147 (1970), 215—224; R. Weder, Self-adjointness and invariance of the essential spectrum for the Klein—Gordon equation.— *Helv. Phys. Acta* 50 (1977), 100—117; Scattering theory for the Klein—Gordon equation.— *J. Funct. Anal.* 27 (1978), 100—117.

*§ XI.16.* Теория Хаага—Рюэля основывается на работах: R. Haag, Quantum field theories with composite particles and asymptotic completeness.— *Phys. Rev.* 112 (1958), 669—673; The framework of quantum field theory.— *Nuovo Cimento Supp.* 14 (1959), 131—152; D. Ruelle, On the asymptotic condition in quantum field theory.— *Helv. Phys. Acta* 35 (1962), 147—163. Хааг изложил основные элементы доказательства теоремы XI.109, включая введение усеченных вакуумных средних (УВС), и постулировал убывание этих средних. Строгого доказательства убывания регулярных волновых пакетов для уравнения Клейна—Гордона он не дал; его рассуждения основывались на правильных оценках, которые были доказаны лишь формально. Рюэль восполнил эти два пробела, доказав теорему XI.109 (методом, использованным и в нашем изложении) и следствие теоремы XI.17 (другим, хотя и родственным методом). Еще ранее ряд авторов получили частичные результаты о кластерных свойствах УВС; см. G. Dell'Antonio, P. Gulmanelli, Asymptotic conditions in quantum field theories.— *Nuovo Cimento* 12 (1959), 38—53; H. Araki, On the asymptotic behavior of vacuum expectation values at large space-like separations.— *Ann. Phys.* 11 (1960), 260—274; R. Jost, K. Hepp, Über die Matrixelemente des Translationoperators.— *Helv. Phys. Acta* 35 (1962), 34—46. Теорема XI.111 заимствована из книги Л. Шварца по теории распределений (см. замечания к § V.3 и V.4).

Имеется ряд изложений теории Хаага—Рюэля на уровне учебника: в книге Йоста, указанной в замечаниях к § IX.8; в монографии Н. Н. Боголюбова, А. А. Логунова и И. Т. Тодорова «Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля» (М.: Наука, 1969); у К. Хеппа (K. Hepp, On the connection between Wightman and LSZ quantum field theory. In: Axiomatic field theory: Brandeis University, 1965 (M. Chrétien, S. Deser, eds.), pp. 135—246.— New York: Gordon and Breach, 1966). Подобно нашему, все эти изложения используют подход Рюэля.

Если в теореме XI.110 функция принадлежит классу $C_0^\infty$, то $G(\alpha)$ убывает экспоненциально; см.: H. Araki, K. Hepp, D. Ruelle, On the asymptotic behavior of Wightman functions in space-like directions.— *Helv. Phys. Acta* **35** (1962), 164—174.

Лоренц-ковариантность теории рассеяния составляет один из результатов Рюэля и обсуждается подробнее в указанных выше изложениях типа учебника. Рюэль рассматривает также случай частиц и полей высших спинов. Важный момент его анализа заключается в том, что поля целого (соответственно полуцелого) спина порождают асимптотические поля также лишь целого (соответственно полуцелого) спина. Это имеет важное значение для физической интерпретации теоремы о спине и статистике. Хааг и Рюэль обсуждают также, что следует делать в случае нарушения свойства 10: тогда используются подходящие полиномы по полям. Переформулировка теории Хаага—Рюэля в терминах $C^*$-алгебр в квантовой теории поля дана в работе: R. Haag, H. Araki, Collision cross sections in terms of local observables.— *Commun. Math. Phys.* **4** (1967), 77—91.

Наша физическая интерпретация теоремы XI.109 как теории рассеяния опиралась на запись этой теоремы в терминах волновых операторов в двух гильбертовых пространствах (следствие 2). Однако равным образом можно было бы обосновать такую интерпретацию, переформулировав $N$-частичную нерелятивистскую квантовую теорию в виде теории поля и записав затем соответствующую теорию рассеяния в форме теоремы XI.109. Это было проделано Сандасом (W. Sandhas, Definition and existence of multichannel scattering states.— *Commun. Math. Phys.* **3** (1966), 358—374) и в лекциях Хеппа (как указывает Хепп, они частично следует неопубликованной работе B. Хуницкера). См. также задачу 142.

Следствие 1 теоремы XI.109 связано с одним общим результатом, который был получен в рамках алгебраического подхода к релятивистской квантовой теории, и утверждает аддитивность $\sigma(P_\mu)$: если $p_\mu$, $q_\mu \in \sigma(P_\mu)$, то и $p_\mu + q_\mu \in \sigma(P_\mu)$. Это было доказано Борхерсом (H. J. Borchers, Local rings and the connection of spin with statistics.— *Commun. Math. Phys.* **1** (1965), 281—307).

Если наложить на регулярные волновые пакеты $f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}$ условие неперекрывания скоростей (согласно которому для любых $p_i \in \operatorname{supp} \widehat{f^{(i)}}$, $p_j \in \operatorname{supp} \widehat{f^{(j)}}$ должно быть $p_i/\mu(p_i) \neq p_j/\mu(p_j)$), то $\|d\eta/dt\|$ убывает не только как $t^{-3/2}$, но и быстрее чем $t^{-N}$ для любого $N$. Это позволяет развить теорию Хаага—Рюэля для случая пространства-времени двух и трех измерений, а также избежать теоремы XI.110. Эти соображения обсуждаются в лекциях Хеппа, а также в его работе: K. Hepp, On the connection between LSZ and Wightman quantum field theory.— *Commun. Math. Phys.* **1** (1965), 95—111.

Существует другое асимптотическое условие, основанное на доказательстве того, что *матричные элементы* релятивистского поля $\int A(x) f(x, s-t)\, d^3x\, ds$ при $t \to \mp\infty$ стремятся к матричным элементам сглаженных полей $\varphi_{\text{in}}$ и $\varphi_{\text{out}}$ (это нужно сопоставить с векторной сходимостью в теореме XI.109). Теория рассеяния, базирующаяся на таком допущении, была развита Леманом, Симанзиком и Циммерманом (H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmerman, Zur Formulierung quantisierter Feldtheorien.— *Nuovo Cimento* **1** (1955), 205—225; The formulation of quantized field theories, II.— *Nuovo Cimento* **6** (1957), 319). Эта «теория ЛСЦ» далее развивалась в работе: V. Glaser, H. Lehmann, W. Zimmerman, Field operators and retarded functions.— *Nuovo Cimento* **6** (1957), 1122—1128. В своих лекциях и в указанной выше статье Хепп доказывает, что в формализме Хаага—Рюэля для полей с соответствующим сглаживанием матричные элементы между состояниями $\eta_{\text{in}}(f_1, \ldots, f_n)$, где функции $f_i$ имеют неперекрывающиеся скорости, сходятся при $t \to -\infty$ к таким же матричным элементам поля $\varphi_{\text{in}}$. Первый по-настоящему важный результат, к которому привел формализм ЛСЦ,— явная формула для $S$-матрицы в терминах функций Вайтмана. Эти редукционные формулы были доказаны в работе Хеппа для неперекрывающихся скоростей. Их получение есть первый шаг на пути исследования аналитических свойств амплитуд рассеяния в аксиоматической теории поля. Некоторые аспекты такого исследования, а также многочисленные ссылки на литературу содержит книга Мартена: A. Martin, Scattering Theory: Unitarity, Analyticity and Crossing. Lecture Notes in Physics 3.— New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1969.

Асимптотическую полноту до сих пор не удалось проверить ни в одной из известных моделей взаимодействующих вайтмановых полей. В отдельных случаях нарушение асимптотической полноты возможно за счет того, что в рассмотрение не включено достаточное множество полей. Можно привести следующий искусственный пример. Допустим, что удалось построить квантовую электродинамику со взаимодействием и с асимптотической полнотой, а ее сузили до теории электромагнитного поля в порождаемом им циклическом подпространстве. Такая теория не будет асимптотически полной, поскольку в ее гильбертовом пространстве присутствуют двухчастичные электрон-позитронные состояния, но не присутствуют соответствующие одночастичные состояния, которые, будучи заряженными, не могут быть связаны с вакуумом посредством электромагнитного поля. Многое свидетельствует о том, что подобное явление происходит в некоторых двумерных моделях самодействующих бозонных полей: как полагают, в таких моделях некоторые двухчастичные состояния (солитон-антисолитонные пары) связаны с вакуумом посредством бозонного поля, хотя для соответствующих одночастичных состояний это не так. См. работы: J. Fröhlich, New super-selection sectors («soliton states») in two dimensional Bose quantum field models.— *Commun. Math. Phys.* 47 (1976), 269—310; Phase transitions. Goldstone bosons and topological superselection rules, Part II.— *Acta Phys. Austr. Suppl.* XV (1976), 133—269; Quantum theory of non-linear invariant wave (field) equations. Or: Super selection sectors in constructive quantum field theory. In: Invariant Wave Equations (G. Velo, A. S. Wightman, eds.).— Springer Physics Lecture Notes 73, 1978; J. Bèllissard, J. Fröhlich, B. Gidas, Soliton mass and surface tension in the $\lambda(|\varphi^4|)_2$ quantum field models.— *Commun. Math. Phys.* **60** (1978), 37—72.

Значительный прогресс был достигнут в исследовании $P(\varphi)_2$-теорий со слабой связью в области энергий, где отсутствуют трехчастичные состояния. Для этой области энергий было получено и доказательство «асимптотической полноты». Укажем основные работы: T. Spencer, The decay of the Bethe — Salpeter kernel in $P(\varphi)_2$ quantum field models.— *Commun. Math. Phys.* **44** (1975), 143—164; T. Spencer, F. Zirilli, Scattering states and bound states in $\lambda P(\varphi)_2$.— *Commun. Math. Phys.* 49 (1975), 1—16. О дальнейшем развитии см. работы: J. Glimm, A. Jaffe, Two and three body equations in quantum field models.— *Commun. Math. Phys.* 44 (1975), 293—320; J. Dimock, J.-P. Eckmann, On the bound state in weakly coupled $\lambda(\varphi^6-\varphi^4)_2$.— *Commun. Math. Phys.* **51** (1976), 41—54; Spectral properties and bound state scattering for weakly coupled $\lambda P(\varphi)_2$ models.— *Ann. Phys.* **103** (1977), 289—314.

Объекты, подобные УВС, существует в теории вероятностей, где они называются кумулянтами высших порядков, и в статистической механике, где они называются функциями Урселла. Элегантную «аксиоматическую» характеризацию функций Урселла и теорию, возникающую на ее основе, можно найти в работе: J. Percus, Correlation inequalities for Ising spin lattices.— *Commun. Math. Phys.*. 40 (1975), 283—308. К существенным результатам, касающимся УВС, принадлежат формула инверсии (задача 143), отношение к свойствам связности диаграммных разложений (задача 144) и следующая формула, принадлежащая П. Картье (неопубликовано); см. также указанную выше статью Перкуса и работу: G. Sylvester, Representations and inequalities for Ising model Ursell functions.— *Commun. Math. Phys.* 42 (1975), 209—220 [Перевод в сб.:

Гиббсовские состояния в статистической физике.— М.: Мир. 1978, с. 69—88.]:

$$(\psi_0, \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\psi_0)_T = \frac{1}{n}(\Psi_0, \Phi(x_1)\ldots\Phi(x_n)\Psi_0), \tag{349a}$$

$$\Phi(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \omega^j \varphi_j(x_j). \tag{349b}$$

Здесь $\omega$ есть $n$-й примитивный корень из единицы (т. е. $\omega^n = 1$, $\omega^j \neq 1$, $j = 1, \ldots, n-1$), а $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — независимые копии $\varphi$; иначе говоря, мы берем $\mathscr{H}' = \mathscr{H} \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}$ ($n$ раз), $\Psi_0 = \psi_0 \otimes \ldots \otimes \psi_0$ и

$$\varphi_j(x) = 1 \otimes \ldots \otimes \varphi(x) \otimes \ldots \otimes 1 \quad \text{(множитель } \varphi \text{ на } j\text{-м месте)}.$$

Теория рассеяния для безмассовых частиц в рамках аксиоматического алгебраического формализма была развита в двух замечательных работах Бухгольца: D. Buchholz, Collision theory for massless fermions.— *Commun. Math. Phys.* **42** (1975), 269—279; Collision theory for massless bosons.— *Commun. Math. Phys.* **52** (1977), 147—173. Хотя Бухгольц и пользуется отдельными элементами теории Хаага—Рюэля, но УВС теперь не являются обобщенными функциями умеренного роста, так что требуются существенно новые идеи. Ключевой оказывается идея воспользоваться тем, что решения волнового уравнения подчиняются принципу Гюйгенса. По этой причине, если мы можем установить существование предела $A_f(t)\Omega_0$ (предполагается, что этот объект определен каким-либо подходящим образом и, вообще говоря, зависит от времени, поскольку одночастичные состояния с нулевой массой невозможно выделить из континуума), то мы можем доказать и существование предела $A_f(t)F\Omega_0$ для любого оператора $F$, получаемого из полей, сглаженных с основными функциями, имеющими носитель в определенных множествах (грубо говоря, это будет «дырка», получаемая исключением объединения границ световых конусов, вершины которых лежат в $\operatorname{supp} f(x, t=0)$). Таким путем доказывается существование предела $A_f(t)\psi$ на плотном множестве векторов $\psi$.

Нужно подчеркнуть, что при наличии безмассовых частиц неизвестно, как строить состояния рассеяния для *массивных* частиц. В самом деле, неясно, каким образом «отделить» массивную частицу от безмассовых,— возможно, что в теории фотонов и электронов спектр масс не содержит дискретного собственного значения, отвечающего отдельному электрону, но в силу какого-то механизма электроны всегда встречаются лишь в сопровождении бесконечного числа фотонов малой энергии. Эта проблема, отнюдь еще не понятая до конца, называется **инфракрасной проблемой**. Громадная литература по этой теме начинается с работ: F. Bloch, A. Nordsieck, A note on the radiation field of the electron.— *Phys. Rev.* **52** (1937), 54—59; D. Yennie, S. Frautschi, H. Suura, The infrared divergence phenomena and high-energy processes.— *Ann. Phys.* **13** (1961), 379—452. Обсуждение более новых работ см. у Фрёлиха: J. Fröhlich, On the infrared problem in a model of scalar electrons and massless, scalar bosons.— *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A* **19** (1973), 1—103. Следует упомянуть, что аналогичное явление возможно и для безмассовых частиц, и в этом случае теория Бухгольца окажется неприменимой, поскольку она предполагает существование состояний с $H^2 - \mathbf{P}^2 = 0$ ($H \neq 0$).

§ *XI.47*. В этом разделе наше изложение следует в первую очередь прекрасной работе Энсса (V. Enss, Asymptotic completeness for quantum mechanical potential scattering.— *Commun. Math. Phys.* **61** (1978), 285—291). Отдельные технические приемы заимствованы из работы: B. Simon, Phase space analysis of simple scattering systems: Extensions of some work of V. Enss.— *Duke Math. J.* **46** (1979), 119—168. Эта последняя работа обобщает теорию таким образом, что $H_0$ можно заменять весьма разнообразными дифференциальными и псевдодифференциальными операторами, включая гамильтонианы Дирака. Энсс распространил метод на кулоново рассеяние и наметил программу (которую он в настоящее время выполняет) исследования многочастичного рассеяния.

Теорема Винера (теорема XI.114) получена Н. Винером в его книге «Интеграл Фурье и некоторые его приложения» (Пер. с англ.— М.: Физматгиз, 1963). Следствия этой теоремы (в том числе следствие теоремы XI.115) много лет применялись в эргодической теории; см. особенно § 8 книги: K. Jacobs, Lecture Notes on Ergodic Theory.— Aarhus Lecture Note Series **1** (1962/63).

Важность теоремы Винера для получения геометрической характеризации непрерывного спектра в задаче рассеяния была независимо обнаружена Лаксом—Филипсом—де Лиувом (см. стр. 145 книги Лакса и Филлипса, указанной в замечаниях к § 11) и Рюэлем (D. Ruelle, A remark on bound states in potential scattering theory.— *Nuovo Cimento A* **61** (1969), 655—662). Лакс и Филлипс применяют теорему Винера для прямого доказательства следствия теоремы XI.115, а затем с его помощью устанавливают формулу (219). Рюэль же доказал, что для широкого класса операторов Шредингера включая многочастичные при любом $R$ предельное соотношение

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|F(|x|\leqslant R)e^{-itH}\varphi\|^2\,dt\to 0$$

при $T\longrightarrow\infty$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi\in P_{\text{cont}}(H)$. Амрейн и Георгеску (W. Amrein, V. Georgescu, Bound states and scattering states in quantum mechanics.— *Helv. Phys. Acta* **46** (1973), 633—658) обобщили результаты Рюэля и, в частности, показали, что критическим фактором является компактность оператора $F(|x|\leqslant R)(H+i)^{-1}$ (в анализе Рюэля это оставалось скрытым). Никто из этих авторов не заметил равномерности по $\varphi$ (с помощью теоремы Винера можно непосредственно показать, что $(\psi,\ e^{-itA}\varphi)$ стремится к нулю в $L^2$ в среднем, если $\psi$ лежит в $\mathcal{H}_{\text{cont}}$); это утверждение о равномерности содержалось в неопубликованном замечании Энсса.

Последняя теорема в дополнении также принадлежит В. Энссу.

## ЗАМЕЧАНИЯ О ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ НА ЯЗЫКЕ $C^*$-АЛГЕБР

Существует простое обобщение идей теории рассеяния, приспособленное к аппарату $C^*$-алгебр. В настоящих замечаниях мы обсудим наиболее интересные аспекты этих идей, свободно используя понятия теории $C^*$-алгебр. Это наше обсуждение следует дополнить явными примерами, которые содержатся в приводимых ниже ссылках.

Прежде всего рассмотрим связь между теорией рассеяния и процессом приближения к равновесию в статистической механике. Для начала предположим, что $H_0$—самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $V$ лежит в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Определим на $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ естественные автоморфизмы $\alpha_t^{(0)}(A)=e^{iH_0t}Ae^{-iH_0t}$ и $\alpha_t(A)=e^{iHt}Ae^{-iHt}$, где $H=H_0+V$. Положим $\beta_t=\alpha_t\alpha_{-t}^{(0)}$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\beta_t(A)=i\beta_t\left(\alpha_t^{(0)}\left[V,\ \alpha_{-t}^{(0)}(A)\right]\right)=i\beta_t\left(\left[\alpha_t^{(0)}(V),\ A\right]\right),$$

или

$$\beta_t(A)=A+i\int_0^t\beta_s\left(\left[\alpha_s^{(0)}(V),\ A\right]\right)ds. \tag{350}$$