нил метод на кулоново рассеяние и наметил программу (которую он в настоящее время выполняет) исследования многочастичного рассеяния.

Теорема Винера (теорема XI.114) получена Н. Винером в его книге «Интеграл Фурье и некоторые его приложения» (Пер. с англ.— М.: Физматгиз, 1963). Следствия этой теоремы (в том числе следствие теоремы XI.115) много лет применялись в эргодической теории; см. особенно § 8 книги: K. Jacobs, Lecture Notes on Ergodic Theory.— Aarhus Lecture Note Series 1 (1962/63).

Важность теоремы Винера для получения геометрической характеризации непрерывного спектра в задаче рассеяния была независимо обнаружена Лаксом—Филипсом—де Лиувом (см. стр. 145 книги Лакса и Филлипса, указанной в замечаниях к § 11) и Рюэлем (D. Ruelle, A remark on bound states in potential scattering theory.— *Nuovo Cimento A* **61** (1969), 655—662). Лакс и Филлипс применяют теорему Винера для прямого доказательства следствия теоремы XI.115, а затем с его помощью устанавливают формулу (219). Рюэль же доказал, что для широкого класса операторов Шредингера включая многочастичные при любом R предельное соотношение

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|F(|x|\leqslant R)e^{-itH}\varphi\|^2\,dt\to 0$$

при $T\longrightarrow\infty$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi\in P_{\rm cont}(H)$. Амрейн и Георгеску (W. Amrein, V. Georgescu, Bound states and scattering states in quantum mechanics.— *Helv. Phys. Acta* **46** (1973), 633—658) обобщили результаты Рюэля и, в частности, показали, что критическим фактором является компактность оператора $F(|x|\leqslant R)(H+i)^{-1}$ (в анализе Рюэля это оставалось скрытым). Никто из этих авторов не заметил равномерности по φ (с помощью теоремы Винера можно непосредственно показать, что $(\psi,\ e^{-itA}\varphi)$ стремится к нулю в L^2 в среднем, если ψ лежит в $\mathscr{H}_{\rm cont}$); это утверждение о равномерности содержалось в неопубликованном замечании Энсса.

Последняя теорема в дополнении также принадлежит В. Энссу.

ЗАМЕЧАНИЯ О ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ НА ЯЗЫКЕ C^*-АЛГЕБР

Существует простое обобщение идей теории рассеяния, приспособленное к аппарату C^*-алгебр. В настоящих замечаниях мы обсудим наиболее интересные аспекты этих идей, свободно используя понятия теории C^*-алгебр. Это наше обсуждение следует дополнить явными примерами, которые содержатся в приводимых ниже ссылках.

Прежде всего рассмотрим связь между теорией рассеяния и процессом приближения к равновесию в статистической механике. Для начала предположим, что H_0—самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и V лежит в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Определим на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ естественные автоморфизмы $\alpha_t^{(0)}(A)=e^{iH_0t}Ae^{-iH_0t}$ и $\alpha_t(A)=e^{iHt}Ae^{-iHt}$, где $H=H_0+V$. Положим $\beta_t=\alpha_t\alpha_{-t}^{(0)}$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\beta_t(A)=i\beta_t\left(\alpha_t^{(0)}\left[V,\ \alpha_{-t}^{(0)}(A)\right]\right)=i\beta_t\left(\left[\alpha_t^{(0)}(V),\ A\right]\right),$$

или

$$\beta_t(A)=A+i\int_0^t\beta_s\left[\alpha_s^{(0)}(V),\ A\right])\,ds, \qquad (350)$$

Уравнение (350) решается итерациями:

$$\beta_t(A) = A + \sum \beta_t^{(n)}(A), \tag{351}$$

где

$$\beta_t^{(n)}(A) = (i)^n \int_0^t \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} \ldots \int_0^{s_{n-1}} \left[\alpha_{s_n}^{(0)}(V), \left[\alpha_{s_{n-1}}^{(0)}(V), \ldots \left[\alpha_{s_1}^{(0)}(V), A\right] \ldots\right]\right] ds_n \ldots .$$

Простая оценка показывает, что $\|\beta_t^{(n)}(A)\| \leqslant 2^n (t^n/n!) \|V\|^n \|A\|$, и, следовательно, ряд (351) сходится к решению уравнения (350). Эквивалентно,

$$\alpha_t(A) = \alpha_t^{(0)}(A) + \sum_{n=1}^{\infty} (i)^n \int_{0 \leqslant s_n \leqslant \ldots \leqslant s_1 \leqslant t} \left[\alpha_{s_n}^{(0)}(V), \left[\ldots \left[\alpha_{s_1}^{(0)}(V), \alpha_t^{(0)}(A)\right] \ldots\right]\right] ds_1 \ldots ds_n. \tag{352}$$

Формула (352), выражающая α_t только через $\alpha_t^{(0)}$ и V, служит исходным соотношением для общей теории возмущений автоморфизмов C^*-алгебр. Действительно, допустим, что $\alpha_t^{(0)}$ есть непрерывная по норме однопараметрическая группа автоморфизмов C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ и $V \in \mathfrak{A}$. Тогда выражение, заданное формулой (352), сходится к непрерывной по норме однопараметрической группе автоморфизмов, которую мы и обозначим α_t. Теперь достаточно легко (см. задачу 147) может быть доказана следующая теорема.

Теорема XI.117. Пусть π — представление C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и $\alpha_t^{(0)}$, α_t определены, как указано выше. Допустим, что существует однопараметрическая сильно непрерывная унитарная группа U_t на $\mathscr{H}$, такая, что

$$\pi\left(\alpha_t^{(0)}(A)\right) = U_t \pi(A) U_{-t}. \tag{353a}$$

Пусть H_0 — инфинитезимальный генератор U_t и, по определению, $W_t = e^{i(H_0 + \pi(V))t}$. Тогда

$$\pi(\alpha_t(A)) = W_t \pi(A) W_{-t}. \tag{353b}$$

Обратно, если для некоторого W_t имеет место (353b), то имеет место и (353a) для некоторого U_t.

Мы видим, таким образом, что автоморфизмы $\alpha_t^{(0)}$ и α_t унитарно реализуемы всегда в одних и тех же представлениях.

Если попытаться установить способ стремления к пределу $\lim\limits_{t \to \mp\infty} \alpha_{-t}\alpha_t^{(0)}(A)$, то (352) в сочетании с методом Кука (см. § 3) дает нам немедленно следующий результат.

Теорема XI.118. Допустим, что для плотного подпространства $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$ и всех $A \in \mathfrak{A}_0$

$$\|[\alpha_{(\cdot)}^{0}(V), A]\| \in L^1(\cdot). \tag{354}$$

Тогда $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \alpha_{-t}\alpha_t^0(A)$ существует для любого $A \in \mathfrak{A}$ и $w\pm = \text{s-}\lim\limits_{t \to \mp\infty} \alpha_{-t}\alpha_t^{(0)}$ суть инъективные морфизмы $\mathfrak{A}$, удовлетворяющие условию

$$w^{\pm}(\alpha_s^{(0)}(A)) = \alpha_s(w^{\pm}(A)). \tag{355}$$

Д. Робинсон обнаружил весьма красивую взаимосвязь между теоремой XI.118 и приближением к равновесию в квантовых газах на решетке. Пусть $\alpha_t^{(0)}$ — трансляции по времени в решетчатом газе и V — локальная наблюдаемая. Тогда для любой локальной наблюдаемой A можно ожидать (а в некоторых моделях и доказать!) условие (354), поскольку $\alpha_t^{(0)}(V)$ при $t \to \pm\infty$ «расплывается» по все большей и большей области. Пусть φ — инвариантное состояние для α_t, т.е. для локально возмущенной динамики. Тогда $\varphi(\alpha_t^{(0)}(\cdot)) = \varphi(\alpha_{-t}\alpha_t^{(0)}(\cdot)) \to \varphi(w^{\pm}(\cdot))$ и, в силу (355), $\varphi(w^{\pm}(\cdot))$ суть инвариантные состояния для $\alpha_t^{(0)}$. Таким образом, если движение φ соответствует свободной динамике, это состояние стремится к инвариантному состоянию для $\alpha_t^{(0)}$. Кроме того, при некоторых дополнительных предположениях, если φ есть состояние КМШ для α_t при температуре T, то $\varphi(w^{\pm}(\cdot))$ суть состояния КМШ для $\alpha_t^{(0)}$ при температуре T.

Этот пример теории рассеяния в терминах C^*-алгебр и ее связей со статистической механикой описан в работе: D. Robinson, Return to equilibrium. — *Commun. Math. Phys.* **31** (1973), 171—189. В этой работе можно найти подробности, касающиеся приведенных нами теорем, а также явные вычисления для некоторых моделей. Отдельные аспекты развитого Робинсоном алгебраического подхода к теории рассеяния уже имелись в работе Стритера: R. F. Streater, On certain non-relativistic quantized fields. — *Commun. Math. Phys.* 7 (1968), 93—98, а также в работе Хеппа: K. Hepp, Rigorous results on the s-d model of the Kondo effect. — *Solid State Comm.* 8 (1970), 2087—2090. Дополнительное обсуждение приближения к равновесию в статистической механике (не связанное с теорией рассеяния) содержится в работах: C. Radin, Gentle perturbations. — *Commun. Math. Phys.* **23** (1971), 189—198; O. Lanford, III, D. Robinson, Approach to equilibrium of free quantum systems. — *Commun. Math. Phys.* **24** (1972), 193—210.

Во многих случаях условие (354) оказывается слишком сильным и $\alpha_{-t}\alpha_t^{(0)}$ сходится лишь в слабом смысле, а не по норме. В таких случаях естественнее считать, что $\mathfrak{A}$ — алгебра фон Неймана. Подобный подход используется в некоторых исследованиях потенциального рассеяния с дальнодействием. Пусть $H_0 = -\Delta$ задан в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\mathfrak{A} = \{H_0\}'$ — семейство операторов, коммутирующих с ограниченными функциями H_0. Пусть V — дальнодействующий потенциал, такой, что для него существуют модифицированные волновые операторы. Пусть, наконец, $\alpha_t(A) = e^{iHt}Ae^{-iHt}$ (возможно, эта величина лежит не в $\mathfrak{A}$, но лишь в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$). Тогда

$$\text{w-}\lim_{t \to \mp\infty} \alpha_t(A) = \text{w-}\lim_{t \to \mp\infty} e^{iHt}U_D(-t)\,AU_D(t)\,e^{-iHt} = \Omega_D^{\pm}A\,(\Omega_D^{\pm})^*.$$

Ссылки на литературу по алгебраическому подходу к рассеянию с дальнодействием даны в замечаниях к § 9.

Описание рассеяния в терминах автоморфизмов играет роль и при изучении спектральных свойств гамильтонианов в некоторых моделях квантовой теории поля с обрезанием. Мы обрисуем соответствующие общие идеи на примере обрезанной $P(\varphi)_2$-теории поля. Пусть $a_t^*(f) = e^{iHt}e^{-iH_0t}a^*(f)\,e^{iH_0t}e^{-iHt}$. Формально

$$\frac{d}{dt}a_t^{\#}(f) = ie^{iHt}\,[V,\ e^{-iH_0t}a^{\#}(f)\,e^{iH_0t}]\,e^{-iHt}.$$

Эта формула, метод Кука и некоторые оценки Л. Розена (L. Rosen, The $(\varphi^{2n})_2$ quantum field theory: Higher order estimates. — *Comm. Pure Appl. Math.* 24 (1971), 417—457) позволяют доказать, что $\lim_{t \to \mp\infty} a_t^{\#}(f)\psi$ существуют для семейства функций f, плотного в одночастичном пространстве, и для семейства векторов ψ, плотного в пространстве Фока. Можно проверить, что получаемые в пределе операторы $a^{\#}_{\pm}(f)$ имеют три важных дополнительных свойства: (1) $[a^{\dagger}_{\pm}(f), a_{\pm}(g)] = -(Cf, g)$; анализ предельного перехода показывает, что алгебраические соотношения сохраняются. (2) Поскольку $e^{-iH_0 t}$ имеет специальный вид $e^{iH_0 t} = \Gamma(e^{i\omega t})$ для одночастичного оператора ω, то соотношения переплетения принимают вид $e^{iHt}a^{\#}_{\pm}(f)e^{-iHt} = a^{\#}_{\pm}(e^{i\omega t}f)$. (3) Если ψ — собственный вектор H, то $a_{\pm}(f)\psi = 0$ для всех f. Это вытекает из оценок Розена и того факта, что $\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} a(e^{i\omega t}f)N^{-1/2} = 0$. Опираясь на свойства (1) и (3), для любого собственного вектора ψ оператора H можно построить такое подпространство $\mathscr{H}_{\psi} \subset \mathscr{H}$ и такое фоковское представление операторов $a^{\#}_{\pm}(f)$, что ψ будет вакуумом. Так как известно, что существует вектор, для которого $H\psi = E_0\psi$ (см. § XIII.12), то из приведенной конструкции вместе со свойством (2) вытекает, что $H \restriction \mathscr{H}_{\psi}$ унитарно эквивалентен $H_0 + E_0$, а отсюда следует, что $[m_0 + E_0, \infty) \subset \sigma_{ac}(H)$.

Идея применить теорию рассеяния для изучения квантовополевых гамильтонианов путем построения асимптотических операторов рождения и уничтожения $a^{\#}_{\pm}$ впервые была высказана в работе: Y. Kato, M. Mugibayashi, Regular perturbations and asymptotic limits of operators in quantum field theory. — *Progr. Theor. Phys.* **30** (1963), 103—133, и далее разработана в серии статей Р. Хег-Крона: R. Höegh-Krohn, Asymptotic limits in some models of quantum field theory, I, II, III.—*J. Math. Phys.* **9** (1968), 2075—2080; **10** (1969), 639—643; **11** (1970), 185—188; On the scattering operator for quantum fields.—*Commun. Math. Phys.* **18**(1970), 109—126. К изучению спектральных свойств $P(\varphi)_2$-гамильтонианов с пространственным обрезанием (см. § X.7 и X.9) эта теория применялась в работах: R. Höegh-Krohn, On the spectrum of the space cutoff: $P(\varphi)$: Hamiltonian in two space-time dimensions.—*Commun. Math. Phys.* **21** (1971), 256—260; Y. Kato, N. Mugibayashi, Asymptotic fields in the $\lambda(\varphi^4)_2$ quantum field theory.—*Progr. Theor. Phys.* **45** (1971), 628—639, а к модели Y_2—в работе: J. Dimock, Spectrum of local Hamiltonians in the Yukawa_2 field theory. — *J. Math. Phys.* **13** (1972), 477—481. Как в том, так и в другом случае доказано, что $[m_0 + E_0, \infty) \subset \sigma_{ac}(H)$, где $E_0 = \inf\sigma(H)$ и m_0 — свободная масса в H_0. Поскольку из результатов Глимма и Джаффе (J. Glimm, A. Jaffe, The $\lambda(\varphi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs. II: The field operators and the approximate vacuum.—*Ann. of Math.* **91** (1970), 362—401 (для $(\varphi^4)_2$); Self-adjointness of the Yukawa_2 Hamiltonian.—*Ann. Phys.* **60** (1970), 321—383 (в случае Y_2)), а также Розена (L. Rosen, A $\lambda\varphi^{2n}$ field theory with cutoffs.—*Commun. Math. Phys.* **16** (1970), 157—183, в случае $P(\varphi)_2$) известно, что $\sigma_{ess}(H) \subset [m_0 + E_0, \infty)$, то можно сделать вывод, что в этих моделях $\sigma_{ac}(H) = \sigma_{ess}(H) = [m_0 + E_0, \infty)$. Отметим еще, что методы Хег-Крона и Като—Мугибаяси применимы лишь к тем моделям, в которых не происходит перенормировки гильбертова пространства. Чтобы получить реалистические полевые теории следует вернуться к подходу Хаага—Рюэля, о котором говорилось в § 16.

ЗАДАЧИ

†*1*. Докажите, что при предположениях (3) (см. § XI.2) для любого $\langle r_0, v_0\rangle \in \mathbb{R}^6$ и при любом времени существует решение уравнения (2). [*Указание*. Воспользуйтесь сведениями из дополнения к § X.1, где обсуждается классическое движение на вещественной прямой.]

2. Докажите, что если (4a) выполнено, а (4b), вообще говоря, нет, то отображение, построенное в доказательстве теоремы XI.1, имеет по крайней мере одну неподвижную точку.