в пределе операторы $a^{\#}_{\pm}(f)$ имеют три важных дополнительных свойства: (1) $[a^{\dagger}_{\pm}(f), a_{\pm}(g)] = -(Cf, g)$; анализ предельного перехода показывает, что алгебраические соотношения сохраняются. (2) Поскольку e^{-iH_0t} имеет специальный вид $e^{iH_0t} = \Gamma(e^{i\omega t})$ для одночастичного оператора ω, то соотношения переплетения принимают вид $e^{iHt}a^{\#}_{\pm}(f)e^{-iHt} = a^{\#}_{\pm}(e^{i\omega t}f)$. (3) Если ψ — собственный вектор H, то $a_{\pm}(f)\psi = 0$ для всех f. Это вытекает из оценок Розена и того факта, что $\operatorname*{s\text{-}lim}_{t\to\pm\infty} a(e^{i\omega t}f)N^{-1/2} = 0$. Опираясь на свойства (1) и (3), для любого собственного вектора ψ оператора H можно построить такое подпространство $\mathscr{H}_{\psi} \subset \mathscr{H}$ и такое фоковское представление операторов $a^{\#}_{\pm}(f)$, что ψ будет вакуумом. Так как известно, что существует вектор, для которого $H\psi = E_0\psi$ (см. § XIII.12), то из приведенной конструкции вместе со свойством (2) вытекает, что $H \restriction \mathscr{H}_{\psi}$ унитарно эквивалентен $H_0 + E_0$, а отсюда следует, что $[m_0 + E_0, \infty) \subset \sigma_{ac}(H)$.

Идея применить теорию рассеяния для изучения квантовополевых гамильтонианов путем построения асимптотических операторов рождения и уничтожения $a^{\#}_{\pm}$ впервые была высказана в работе: Y. Kato, M. Mugibayashi, Regular perturbations and asymptotic limits of operators in quantum field theory. — *Progr. Theor. Phys.* **30** (1963), 103—133, и далее разработана в серии статей Р. Хег-Крона: R. Höegh-Krohn, Asymptotic limits in some models of quantum field theory, I, II, III.—*J. Math. Phys.* **9** (1968), 2075—2080; **10** (1969), 639—643; **11** (1970), 185—188; On the scattering operator for quantum fields.—*Commun. Math. Phys.* **18**(1970), 109—126. К изучению спектральных свойств $P(\varphi)_2$-гамильтонианов с пространственным обрезанием (см. § X.7 и X.9) эта теория применялась в работах: R. Höegh-Krohn, On the spectrum of the space cutoff: $P(\varphi)$: Hamiltonian in two space-time dimensions.—*Commun. Math. Phys.* **21** (1971), 256—260; Y. Kato, N. Mugibayashi, Asymptotic fields in the $\lambda(\varphi^4)_2$ quantum field theory.—*Progr. Theor. Phys.* **45** (1971), 628—639, а к модели Y_2 — в работе: J. Dimock, Spectrum of local Hamiltonians in the Yukawa$_2$ field theory. — *J. Math. Phys.* **13** (1972), 477—481. Как в том, так и в другом случае доказано, что $[m_0 + E_0, \infty) \subset \sigma_{ac}(H)$, где $E_0 = \inf \sigma(H)$ и m_0 — свободная масса в H_0. Поскольку из результатов Глимма и Джаффе (J. Glimm, A. Jaffe, The $\lambda(\varphi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs. II: The field operators and the approximate vacuum.—*Ann. of Math.* **91** (1970), 362—401 (для $(\varphi^4)_2$); Self-adjointness of the Yukawa$_2$ Hamiltonian.—*Ann. Phys.* **60** (1970), 321—383 (в случае Y_2)), а также Розена (L. Rosen, A $\lambda\varphi^{2n}$ field theory with cutoffs.—*Commun. Math. Phys.* **16** (1970), 157—183, в случае $P(\varphi)_2$) известно, что $\sigma_{ess}(H) \subset [m_0 + E_0, \infty)$, то можно сделать вывод, что в этих моделях $\sigma_{ac}(H) = \sigma_{ess}(H) = [m_0 + E_0, \infty)$. Отметим еще, что методы Хег-Крона и Като — Мугибаяси применимы лишь к тем моделям, в которых не происходит перенормировки гильбертова пространства. Чтобы получить реалистические полевые теории следует вернуться к подходу Хаага — Рюэля, о котором говорилось в § 16.

ЗАДАЧИ

†*1*. Докажите, что при предположениях (3) (см. § XI.2) для любого $\langle r_0, v_0\rangle \in \mathbb{R}^6$ и при любом времени существует решение уравнения (2). [*Указание.* Воспользуйтесь сведениями из дополнения к § X.1, где обсуждается классическое движение на вещественной прямой.]

2. Докажите, что если (4a) выполнено, а (4b), вообще говоря, нет, то отображение, построенное в доказательстве теоремы XI.1, имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

3. Найдите пример силы F, для которой выполнено (4а) и нарушено (4b), а отображение в теореме XI.1 имеет более чем одну неподвижную точку, т. е. состояния рассеяния существуют, но не определены однозначно.

Литература к задачам 2, 3: работа Саймона, указанная в замечаниях к § XI.2.

†*4.* Докажите, что если F удовлетворяет условиям (4), то интегральное уравнение (6) эквивалентно дифференциальному уравнению (2а) с граничными условиями (5).

†*5.* Пусть $\mathcal{M}$ — полное метрическое пространство и $c < 1$.

(a) Пусть $\{F_n\}$, F_∞ — семейство отображений пространства $\mathcal{M}$, таких, что $\rho(F_n x, F_n y) \leqslant c\rho(x, y)$ для всех n и всех $x, y \in \mathcal{M}$. Предположим, что $F_\infty x = \lim_{n\to\infty} F_n x$ для всех x и, кроме того, $F_n x = x_n$, $F_\infty x_\infty = x_\infty$. Докажите, что $x_n \longrightarrow x_\infty$.

(b) Пусть F: $\mathbb{R} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ — непрерывное отображение, такое, что $\rho(F(t, x), F(t, y)) \leqslant c\rho(x, y)$, где $c < 1$. Предположим, что $\mathcal{M}$ есть подмножество банахова пространства и $F(t, x)$ как отображение из $\mathbb{R}\times\mathcal{M}$ в $\mathcal{M}$ принадлежит C^∞ по совокупности переменных x и t (т. е. дифференцируемо в смысле Фреше). Определим $g(t) \in \mathcal{M}$ соотношением $F(t, g(t)) = g(t)$. Докажите, что $g(t)$ есть векторнозначная C^∞-функция.

†*6.* Завершите доказательство теоремы XI.2а.

†*7.* Докажите, что в предположениях теоремы XI.2 отображение $\mathcal{F}_{a,b}^{(-\infty)}$: $\Sigma_0 \times \times \mathcal{M}_T \longrightarrow \mathcal{M}_T$ удовлетворяет всем условиям задачи 5b с очевидным видоизменением, которое требуется при замене $\mathbb{R}$ подмножеством $\mathbb{R}^6$.

**8.* Сформулируйте теорию рассеяния для n-частичной классической системы в канале рассеяния, где все частицы асимптотически свободны. Рассмотрите проблемы, возникающие при попытке обобщения теории рассеяния на случай со связанными состояниями.

9. Найдите центральную силу и решение уравнение Ньютона в поле этой силы, для которых $\lim_{t\to-\infty} |r(t)| = \infty$, $\lim_{t\to+\infty} |r(t)| = r_0 < \infty$.

†*10.* Докажите, что множества Σ_{bound}, Σ_0, $N_\pm$, $N_\pm^{(n)}$, Σ', введенные при доказательстве теоремы XII.3, все измеримы.

11. Докажите формулы (7а) и (7b) для функций $\theta(E, l)$ и $T(E, l)$ в поле центральной силы.

Литература: книга Ньютона, указанная в замечаниях к § 2.

12. Проверьте формулу для $d\sigma/d\Omega$ в центральном случае.

13. Проанализируйте следующее утверждение: в классической механике полные сечения, как правило, бесконечны.

14. В контексте теоремы XI.3, но при дополнительном предположении, что $V(\mathbf{r})$ централен, найдите другое доказательство следующего факта: если $E > 0$ и $\overline{\lim_{t\to\infty}} |r(t)| = \infty$, то $\lim_{t\to\infty} |r(t)| t^{-1} > 0$. [*Указание.* Воспользуйтесь законами сохранения энергии и углового момента.]

15. (a) Пусть A — самосопряженный оператор. Докажите, что $e^{i(A-\lambda)t}\varphi$ при $t \longrightarrow \infty$ сходится по норме в том случае, если φ — собственный вектор A, отвечающий собственному значению λ. [*Указание*. Вычислите слабый предел величины $T^{-1}\int\limits_0^T e^{i(A-\lambda)t}\varphi dt$.]

(b) Пусть A и B — самосопряженные операторы. Докажите, что $e^{iAt}e^{-iBt}$ сходится при $t\to\pm\infty$ по операторной норме в том и только том случае, если $A=B$.

16. Пусть H_0 — фиксированный оператор, V_n и V_∞ суть H_0-ограниченные операторы с относительной гранью $a<1$, так что $H_0+V_n\to H_0+V_\infty$ в сильном резольвентном смысле. Допустим, что существует плотное множество $D\subset P_{ac}(H_0)$, такое, что $\sup\limits_{n\leqslant\infty}\|V_n e^{-itH_0}u\|\equiv f_u(t)$ принадлежит $L_1(\mathbb{R})$ для $u\in D$. Докажите, что $\Omega^\pm(H_0+V_n, H_0)$ сильно сходится к $\Omega^\pm(H_0+V_\infty, H_0)$. [*Указание*. Покажите сначала, что $\Omega^+(H_0+V_n, H_0)u = u+i\int\limits_0^\infty e^{i(H_0+V_n)t}V_n e^{-itH_0}u\,dt$, и затем воспользуйтесь теоремой о мажорированной сходимости.]

Литература: работа Девиса, указанная в замечаниях к § 4.

†17. (a) Покажите, что $|||\cdot|||$ есть норма на $\mathcal{M}(B)$. Полно ли $\mathcal{M}(B)$ по этой норме? [*Указание*. Используйте (16).]

(b) Покажите, что $\mathcal{M}(B)$ плотно в $P_{ac}(B)$ в смысле обычной нормы.

18. Пусть C — ограниченный оператор, A — самосопряженный и для некоторого n оператор $C(A+i)^{-n}$ компактен. Докажите, что $Ce^{-iAt}P_{ac}(A)\to 0$ в сильном смысле при $t\to\pm\infty$. Докажите это же в случае, когда $CE_I(A)$ компактен для всех ограниченных интервалов I.

19. Докажите теорему XI.5 следующим способом: сначала покажите, что существует предел $\text{s-lim}\, e^{iAt}(1-\chi)e^{-iBt}$, а затем с помощью задачи 18 покажите, что $\text{s-lim}\,\chi e^{-iBt}=0$.

20. Пусть A и B — самосопряженные операторы и $Q(A)=Q(B)$. Пусть φ, $\psi\in Q(A)$. Докажите, что функция $(\varphi, e^{iAt}e^{-iBt}\psi)$ дифференцируема, причем ее производная равна $i(\varphi, e^{iAt}(A-B)e^{-iBt}\psi)$, и проверьте формулу (15).

†21. Восполните в доказательстве теоремы Пирсона (теорема XI.7) все детали, относящиеся к областям определения операторов.

22. Постройте операторы A_n и A, такие, что $\|A_n-A\|_1\to 0$, A_n имеет только абсолютно непрерывный спектр $[0, 1]$ и A имеет абсолютно непрерывный спектр и собственное значение $\lambda=0$. Выведите отсюда, что $\Omega^\pm(A, A_n)$ не может сильно сходиться к $\Omega^\pm(A, A)$.

23. Пусть $(A_n+i)^{-1}\to(A+i)^{-1}$ по норме операторов со следом. Пусть $J_n=(A_n+i)^{-1}(A+i)^{-1}$ и $J=(A+i)^{-2}$. Докажите, что $\Omega^\pm(A_n, A; J_n)\to$ $\to\Omega^\pm(A, A; J)$ в сильном смысле, и выведите отсюда, что $\Omega^\pm(A_n, A)\to$

$\longrightarrow P_{ac}(A)$. [*Указание.* Воспользуйтесь соотношением

$$\Omega^{\pm}(A_n, A; J_n)(A+i)^2 = \Omega^{\pm}(A_n, A).$$

Докажите, что $\Omega^{\pm}(A, A_n) P_{ac}(A) \longrightarrow P_{ac}(A)$ в сильном смысле.]

24. Предположим, что $E_I(A_n)(A_n - A) E_I(A)$ стремится к нулю по норме операторов со следом для каждого ограниченного интервала I. Предположим, кроме того, что A_n равномерно подчинены A, т. е. функции, входящие в определение подчиненности, могут быть выбраны не зависящими от n. Докажите, что $\Omega^{\pm}(A_n, A) \longrightarrow P_{ac}(A)$ и $\Omega^{\pm}(A, A_n) P_{ac}(A) \longrightarrow P_{ac}(A)$ в сильном смысле.

25. Пусть A и B — самосопряженные операторы, такие, что $(A-z)^{-n} - (B-z)^{-n}$ — оператор со следом при всех $\operatorname{Im} z \neq 0$.

(a) Докажите, что оператор $(A+i)^{-k} - (B+i)^{-k}$ компактен при любом целом $k > n$. [*Указание.* Вычислите производные с помощью интегральной формулы Коши.]

(b) Пусть $J = \sum_{j=1}^{n} (A+i)^{-j} (B+i)^{-n+j-1}$. С помощью теоремы Пирсона докажите, что $\Omega^{\pm}(A, B; J)$ существуют.

(c) Пусть $J' = (A+i)^{-n+1} J$. Докажите, что $\Omega^{\pm}(A, B; J')$ существуют.

(d) Пусть $J'' = (B+i)^{-2n} J$. Докажите, что $\Omega^{\pm}(A, B; J'')$ существуют и равны $n\Omega^{\pm}(A, B; J')$. [*Указание.* Используйте (a).]

(e) Докажите существование и полноту $\Omega^{\pm}(A, B)$.

†*26.* Докажите часть (a) леммы 3, используемой в теории Като — Бирмана.

27. Пусть A и B — самосопряженные операторы. Докажите, что $(A-z)^{-1} - (B-z)^{-1}$ есть оператор со следом для некоторого $z \in \rho(A) \cap \rho(B)$ в том и только том случае, если он есть оператор со следом для всех $z \in \rho(A) \cap \rho(B)$.

28. Пусть $A_n \longrightarrow A$ по норме операторов со следом и φ — допустимая функция. Докажите, что $\Omega^{\pm}(\varphi(A_n), \varphi(A)) \longrightarrow P_{ac}(A)$ и при $n \longrightarrow \infty$. $\Omega^{\pm}(\varphi(A), \varphi(A_n)) P_{ac}(A) \longrightarrow P_{ac}(A)$ в сильном смысле.

29. (a) Пусть $F(z) = (A+E)^{-z-1/2} C (B+E)^{-k(1-z)-1/2}$, и предположим, что $F(0)$ и $F(1)$ — операторы со следом. Докажите, что $F(z)$ есть оператор со следом для всех z с $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$. [*Указание.* Примените лемму о трех прямых к $\operatorname{Tr}(F(z)K)$ для K конечного ранга.]

(b) Докажите (36).

30. Докажите предложение 5 из § 3.

31. (a) Пусть $A = -d^2/dx^2$ задан на $L^2(0, \infty)$ с граничными условиями $u(0) = 0$. Пусть $B = A + V$ определен как сумма квадратичных форм для положительного $V \in L^1_{loc}(0, \infty)$ (V при $r = 0$ может иметь сколь угодно плохой рост) с $\operatorname{supp} V \subset [0, 1]$. Пусть $\tilde{A} = -d^2/dx^2$ задан на $L^2(0, 1) \oplus L^2(1, \infty)$ с граничными условиями $u(0) = u(1) = 0$ для первого слагаемого и $u(1) = 0$ для второго. Пусть $\tilde{B} = \tilde{A} + V$. Докажите, что $(\tilde{A}+1)^{-1} - (A+1)^{-1}$ и $(\tilde{B}+1)^{-1} - (B+1)^{-1}$ суть операторы со следом. [*Указание.* Эти операторы — конечного ранга.]

(b) Пусть $\tilde{A} = A_1 \oplus A_2$. Докажите, что $(A_1+1)^{-1}$ и $(B_1+1)^{-1}$ — операторы со следом, и выведите отсюда, что $(\tilde{A}+1)^{-1} - (\tilde{B}+1)^{-1}$ есть оператор со следом.

(c) Докажите, что $(A+1)^{-1}-(B+1)^{-1}$ есть оператор со следом.

*(d) Обобщите эти рассуждения на n-мерный случай. [*Указание.* См. работу Дейфта и Саймона, указанную в замечаниях к § 4.]

32. (a) Пусть оператор A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ самосопряжен на $D(A)$, однако $D(A)$ не плотна. Определим e^{iAt} и $(A+i)^{-1}$ на $\mathcal{H}$, положив их равными нулю на $D(A)^{\perp}$. Сбобщите на этот случай теорему Куроды — Бирмана.

(b) Пусть $B=-\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, A — сператор в $L^2(\mathbb{R}^n\setminus\{x \mid |x|<1\})$ с граничными условиями Дирихле на сфере. Докажите, что здесь применима теорема Куроды — Бирмана в сбобщенной форме (a) с заменой $(A+i)^{-1}$ на $(A+i)^{-n}$. Применима ли здесь теорема Бирмана?

(c) С помощью этих идей рассмотрите рассеяние на препятствии (§ 10), не используя приема введения динамики во внутренней области.

*†*33.* (a) Докажите теорему XI.19(a), используя конечность скорости распространения.

(b) Пусть $\varphi(x, t)$ — решение волнового уравнения с начальными данными из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $x=\langle x_1, 0, \ldots, 0\rangle$ с $x_1>0$. Докажите, что $\varphi(x, t)=$ $=\varphi_+(x, t)+\varphi_-(x, t)$, где

$$\varphi_\pm(x, t)=\int_{S^{n-1}} d\Omega \int_0^\infty \alpha^{n-2} e^{i\alpha(\pm t+x_1\cos\theta)} f_\pm(\alpha, \Omega)\, d\alpha$$

и функции $f_\pm$ гладки на $(0, \infty)\times S^{n-1}$ и непрерывны вплоть до $\alpha=0$.

(c) Докажите, что

$$\varphi_\pm(x, t)=\int_{S^{n-1}} g_\pm(\pm t+x_1\cos\theta, \Omega)\, d\Omega,$$

где $|g_\pm(y, \Omega)|\leqslant C(1+|y|)^{-(n-1)}$, и выведите отсюда, что имеет место теорема XI.19 (b).

(d) Примените метод стационарной фазы по переменным $d\Omega$ на сфере S^{n-1} к изучению области $|x|/t\in(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ и завершите доказательство теоремы XI.19 (c).

34. Примените методы стационарной фазы в нестационарной теории рассеяния.

†*35.* Восполните детали приема интерполяции, используемого в доказательстве теоремы XI.20.

36. Пусть $f(y)=e^{-y^2}$ и функция g не принадлежит $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что $g(x)f(-i\nabla)$ *не* есть ограниченный оператор, и выведите отсюда, что теорема XI.20 не допускает обобщения на L^q с $q<2$.

37. Пусть $\|f\|_{\text{BS}}=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\left(\int_{0\leqslant x_i-m_i<1}|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$. Докажите, что если f и g удовлетворяют условию $\|f\|_{\text{BS}}+\|g\|_{\text{BS}}<\infty$, то $f(x)g(i\nabla)$ есть оператор со следом и

$$\|f(x)\,g(-i\nabla)\|_1\leqslant c\,\|f\|_{\text{BS}}\,\|g\|_{\text{BS}}.$$

[*Указание.* Докажите с помощью теоремы XI.21, что $\|f(x)\,g(i\nabla)\|_1\leqslant$ $\leqslant c\|f\|_2\|g\|_2$ для всех f и g с носителями в некотором единичном кубе.] *Примечание:* Норму $\|\cdot\|_{\text{BS}}$ ввели Бирман и Соломяк в своей работе, указанной в замечаниях к § 3.

38. Предположим, что $(1+x^2)^{\delta/2} f(x)$ и $(1+x^2)^{\delta/2} g(x)$ лежат в $L^p(\mathbb{R}^n)$, где $2 \leqslant p < \infty$ и $\delta > n/p$. Докажите, что $f(x)g(-i\nabla)$ принадлежит $\mathcal{I}_{p/2}$. [*Указание*. Проведите интерполяцию при помощи теоремы XI.21.]

39. Допустим, что $\Omega^\pm(A, B)$ существуют.
(a) Докажите, что $(1-P_{[a,b]}(A))\,\Omega^\pm(A, B)\,P_{[a,b]}(B)=0$.
(b) Пусть $\varphi(x)=\alpha x+\beta$ для $x\in[a, b]$. Докажите, что

$$\Omega^\pm(\varphi(A),\ \varphi(B))\,P_{[a,b]}(B)=\begin{cases}\Omega^\pm(A, B)\,P_{[a,b]}(B), & \alpha>0,\\ \Omega^\mp(A, B)\,P_{[a,b]}(B), & \alpha<0.\end{cases}$$

(c) Докажите принцип инвариантности для кусочно-линейной φ.

40. Покажите, что $H=-(2\mu_1)^{-1}\Delta_1-(2\mu_2)^{-1}\Delta_2+V(r_1-r_2)$ при замене координат $R=(\mu_1+\mu_2)^{-1}(\mu_1 r_1+\mu_2 r_2)$, $r=r_2-r_1$ переходит в

$$H=-(2M)^{-1}\Delta_R-2m)^{-1}\Delta_r+V(r),$$

где $M=\mu_1+\mu_2$, $m^{-1}=\mu_1^{-1}+\mu_2^{-1}$.

41. Допустим, что S есть $N\times N$-матрица, и рассмотрим замену координат $x_i=\sum s_{ij}y_j$ на $\mathbb{R}^{3N}$. Предположим, что $\sum\limits_{i=1}^{N}(2\mu_i)^{-1}\Delta_{x_i}$ переходит в $\sum\limits_{i=1}^{N}(2\mu_i)^{-1}\Delta_{y_i}$ и что $x_i-x_j=\sum\limits_{k=1}^{N-1}a_{ijk}y_k$ для всех i и j (обратите внимание, что сумма до $N-1$). Докажите, что $y_N=a\sum\limits_{i=1}^{N}\mu_i x_i$, где $a=$
$$=\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_i\right)^{-1/2}\mu_N^{-1/2}.$$

†42. Выведите формулу (56) из (55).

†43. Докажите, что линейные комбинации трансляций функции $\varphi_\gamma(x)=$ $=\gamma^{-3/4}e^{-1/2\gamma x^2}$ плотны в $L^2(\mathbb{R}^3)$. [*Указание*. Получите функции Эрмита, взяв производные.]

44. Допустим, что $\int(1+|y|)^\alpha\,|V(y)|^2\,d^n y<\infty$ при некотором α, таком, что $n+\alpha>2$. Докажите, что выполнено (45), и сделайте вывод, что $\Omega^\pm(-\Delta+V,\ -\Delta)$ существуют. *Примечание*. Этот результат, в отличие от теоремы XI.42, имеет место для случая $n=1,\ 2$.

45. Допустим, что $V_t(x)$ есть семейство функций с носителем в фиксированной компактной области, L^2-нормы которых ограничены некоторой степенью t. Воспользуйтесь методом стационарной фазы и докажите, что зависящие от времени волновые операторы существуют.

46. Допустим, что A — положительный самосопряженный оператор и B — самосопряженный оператор, такой, что
(i) $|B|$ A-ограничен в смысле форм с относительной гранью $\alpha<1$;
(ii) $|B|^{1/2}(A+i)^{-1}$ имеет след.
Докажите, что $(A+B+E)^{-1}-(A+E)^{-1}$ имеет след при достаточно больших E. [*Указание*. Положите $B^{1/2}=B/|B|^{1/2}$ и воспользуйтесь формулой

$$(A+B+E)^{-1}-(A+E)^{-1}=$$
$$=-(A+E)^{-1}B^{1/2}(1+|B|^{1/2}(A+E)^{-1}B^{1/2})^{-1}|B|^{1/2}(A+E)^{-1}.]$$

47. (a) Докажите, что ядро оператора $[-d^2/dx^2+1]^{-1}$ в $L^2(\mathbb{R})$ есть $^1/_2 e^{-|x-y|}$. [*Указание*. Воспользуйтесь преобразованием Фурье.]
(b) Пусть h_0 — оператор $-d^2/dx^2$ на $L^2(0, \infty)$ с нулевыми граничными условиями в начале координат. Докажите, что ядро оператора $(h_0+1)^{-1}$ есть $^1/_2 e^{-|x-y|} - {}^1/_2 e^{-x-y} = K(x, y)$. [*Указание*. Докажите, что $\int K(x, y) f(y)\, dy$ принадлежит $D(h_0)$ и что, применяя к нему (h_0+1), мы получим f.]

48. (a) Пусть V принадлежит L^∞ и имеет компактный носитель. Зная, что (63) выполнено для непрерывных V_n, докажите его для V.
(b) Пусть для произвольного V все V_n принадлежат L^∞, имеют компактный носитель и $V_n \uparrow V$ поточечно. Докажите (63) для V.

†49. Докажите предложение, предшествующее теореме XI.33 и касающееся свойств S-оператора в двухчастичных системах.

50. Пусть A — положительный самосопряженный оператор, и пусть B_∞ и B_n — самосопряженные операторы, такие, что
(i) $|B_n| \leqslant {}^1/_2 A + c$ при некоторых фиксированных c и всех n;
(ii) $|B_n|^{1/2}(A+i)^{-1} \longrightarrow |B_\infty|^{1/2}(A+i)^{-1}$ по норме Гильберта — Шмидта;
(iii) $[B_n/|B_n|^{1/2}](A+i)^{-1} \longrightarrow [B_\infty/|B_\infty|^{1/2}](A+i)^{-1}$ по норме Гильберта — Шмидта.
Докажите, что $(A+B_n+i)^{-1} \longrightarrow (A+B_\infty+i)^{-1}$ по норме операторов со следом.

51. Уравнение Клейна — Гордона, ограниченное на положительные частоты, есть уравнение типа Шредингера $i\psi_t = H\psi$ с $H = \sqrt{-\Delta + V(x) + m_0^2}$, где V таков, что $-\Delta + V \geqslant -m_0^2$. Пусть $H_0 = \sqrt{-\Delta + m_0^2}$. Докажнте, что
(a) если $V \in L^{3/2} + L^\infty$ и H есть квадратный корень оператора, определенного как сумма форм, то $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ служит существенной областью для оператора H.
(b) Если $V \in L^1 \cap L^{3/2}$, то волновые операторы $\Omega^\pm = \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{itH}e^{-itH_0}$ существуют и полны. [*Указание*: воспользуйтесь принципом инвариантности.]

†52. (a) Найдите вид H_0 при переходе к атомным координатам, пользуясь цепным правилом.
(b) Проделайте то же самое для координат Якоби.

53. В лагранжевой механике импульсы $p_1, \ldots, p_n$, сопряженные к координатам $q_1, \ldots, q_n$, определяются посредством $p_i = \partial T/\partial \dot{q}_i$. Покажите, что формулы задачи 52 можно вывести, записав T через новые сопряженные импульсы и положив p_i равными $i^{-1}\partial/\partial q_i$.

†54. Восполните детали доказательства части (a) теоремы XI.38.

†55. Докажите, что

$$\lim_{\min|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j| \to \infty} \int_0^\infty \left\| (I_{D'} - I_{D^*D'})\, e^{+i\tilde{H}_{D^*D'}t}\, U_D(\mathbf{a})\, e^{-iH_D t}\psi \right\| dt = 0,$$

если $\psi \in D(\tilde{H}_0)$, и тем самым завершите доказательство формулы (77b).

†56. Воспользуйтесь теоремой XI.39 для доказательства теоремы XI.40.

*57. Предположим, что $V \in L^p \cap L^{3/2}(\mathbb{R}^3)$ с $1 < p < 3/2$. Следуя приведенному доказвтельству теоремы XI.41, докажите аналогичиую теорему для $H = H_0 + V$.

58. Постройте функцию f, аналитическую в $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, непрерывную в $\{z \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ и твкую, что $z = 0$ есть предельнвя точка нулей f. [*Указание*. Предельная точка нулей функции $\cos z$ есть $z = \infty$.]

59. Пользуясь принципом симметрии Шварцв, покажите, что если f внвлитична в $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ и непрерывна в $\{z \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, то $\mathscr{E} = \mathbb{R} \cap \{z \mid f(z) = 0\}$ квк подмножество $\mathbb{R}$ имеет пустую внутренность.

†60. Пусть $V \in R$, и пусть K_k при $k \in \mathbb{R}$ есть оператор в $L^2(\mathbb{R}^3)$ с ядром $K_k(x, y) = e^{ik|x-y|}(4\pi|x-y|)^{-1}|V(x)|^{1/2} V(y)^{1/2}$.

(a) Доквжите, что $\operatorname{Tr}(K_k^* K_k)$ есть конствнтв.

(b) Пользуясь леммой Римвна—Лебегв, доквжите, что $\operatorname{Tr}(K_k^* K_k K_k^* K_k) \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$.

(c) Сделайте вывод, что $\|K_k\| \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$.

Примечание. Это теоремв Клейнв и Земахв (см. замечания к § 6).

†61. (a) Пусть $V \in R \cap L^1(\mathbb{R}^3)$, и пусть $H_0 = -\Delta$, $H = H_0 + V$ (сумма форм). Докажнте, что при $E \notin \sigma(H)$

$(H - E)^{-1} = (H_0 - E)^{-1} -$
$-[(H_0 - E)^{-1} V^{1/2}][1 + |V|^{1/2}(H_0 - E)^{-1} V^{1/2}]^{-1}[|V|^{1/2}(H_0 - E)^{-1}]$.

[*Указание*. См. задачу 46.]

(b) Пользуясь интегральным уравнением

$$G(x, y; E) = G_0(x, y; E) - \int G_0(x, z; E) V(z) G(z, y; E)\, dz,$$

докажите, что $G(\cdot, y; E) \in L^1$ для почти всех y. [*Указание*. Воспользуйтесь (в) и доквжите, что $V^{1/2} G \in L^2$ почти всюду по y.]

†62. Пусть $V \in R$, и пусть $H = H_0 + V$ (сумма форм). Предположим, что $H\psi = E\psi$ при $E = k^2 \geqslant 0$ и $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Пусть $\varphi = |V|^{1/2}\psi$. Докажите, что

$$\varphi(x) = -\int |V(x)|^{1/2} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} V(y)^{1/2} \varphi(y)\, dy.$$

Сделвйте вывод, что $E \in \mathscr{E}$, где $\mathscr{E}$ — исключительное множество.

†63. Восполните детали доказвтельства леммы 5 к теореме XI.41.

*64. Допустим, что $V(x) \leqslant 0$ при всех x и что $V \in L^1 \cap R$. Пусть $-\Delta + V$ имеет отрицательное собственное значение. Докажите, что ряд Борна для $T(0, 0)$ не сходится.

65. В этой звдаче мы ставим целью доказательство оценки (98).

(a) Пользуясь мвсштабным преобрвзоввнием

$$G_0(x, y; E) = \lambda^{2-n} G_0(\lambda x, \lambda y; \lambda^2 E) \text{ при } \lambda > 0,$$

покажите, что достаточно рвссмотреть случвй $\operatorname{Re} E > 0$, $|E| = 1$.

(b) Запишем $G_0 = G_1 + G_2$, где

$$G_1 = (2\pi)^{-n} \int\limits_{|p| \leqslant (1+\varepsilon)^2} (p^2 - E)^{-1} e^{ip\cdot(x-y)}\, d^n p$$

при некотором $\varepsilon > 0$. Докажите, что G_2 внвлитичнв в области $|E| < 1 + \varepsilon$ для каждого фиксироввнного $x \neq y$ и что $|G_2(x, y; E)| \leqslant |x - y|^{-(n-2)}$; $n \geqslant 3$.

(c) Сдвигая контур интегрирования по $|p|$ в G_1, завершите доказательство оценки (98).
(d) Докажите аналоги (98) при $n=1$, 2, как это описано в тексте.
(e) Покажите, что ответ для $\partial_i(-\Delta-k^2)^{-1}$ будет следовать, если отыскать и доказать аналог оценки (98).

66. Пусть $H=-\alpha\nabla\cdot\beta\nabla\alpha=-f\Delta+g\cdot\nabla+h=-f_0\Delta+V$, как в теореме XI.45. Пусть $H_0=-f_0\Delta$ и $W=g\cdot\nabla+h$.
(a) Докажите, что $\|W\varphi\|\leqslant\varepsilon\|H_0\varphi\|+c_\varepsilon\|\varphi\|$ при любом $\varepsilon>0$ и что $\|W\varphi\|\leqslant\varepsilon\|-f\Delta\varphi\|+c_\varepsilon\|\varphi\|$.
(b) Докажите, что $\|-f\Delta\varphi\|\leqslant(1+\varepsilon)\|H\varphi\|+c'_\varepsilon\|\varphi\|$.
(c) Докажите, что $\|(H-H_0)\varphi\|\leqslant a(\|H\varphi\|+\|H_0\varphi\|)+c\|\varphi\|$ при некотором $a<1$.
(d) Сделайте заключение, что H самосопряжен на $D(H_0)$, пользуясь теоремой X.13.

**67*. Воспользуйтесь методом, описанным в конце § 6, чтобы доказать разложение по собственным функциям для $-\Delta+V$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$, если V убывает экспоненциально.

**68*. (a) Пусть $\langle M,\mu\rangle$ — пространство с мерой и $K(x, y)$, $F(x)K(x, y)F(y)^{-1}$ принадлежат $L^2(M\times M, d\mu\otimes d\mu)$ для F, которая конечна и почти всюду отлична от нуля. Пусть ψ есть L^2-решение уравнения $\psi(x)=$ $=\int K(x, y)\psi(y)\,dy$. Докажите, что $F\psi\in L^2(M, d\mu)$.
†(b) Пусть M_k — ядро, заданное формулой (102c), и пусть K_k — ядро оператора $|V|^{1/2}(H_0-k^2)^{-1}V^{1/2}$. Докажите, что $(1-M_k)$ имеет обратный тогда и только тогда, когда $(1-K_k)$ имеет обратный.

†69. Пусть V — потенциал Рольника, $E<0$ и $H=H_0+V$ — сумма форм. Докажите, что $(H_0+V)\psi=E\psi$ с некоторой ненулевой $\psi\in D(H)$ тогда и только тогда, когда

$$(|V|^{1/2}(H_0-E)^{-1}V^{1/2})\varphi=-\varphi$$

с некоторой ненулевой $\varphi\in L^2$, и что ψ и φ связаны соотношением $\varphi=$ $=|V|^{1/2}\psi$.

Литература к задачам 68, 69: монография Саймона (см. замечания к § 6), стр. 149—150 и 81—83.

†70. (a) Предположим, что $e^{\alpha|x|}V(x)\in R$ при некотором $\alpha>0$. Докажите, что $e^{\beta|x|}V(x)\in L^1(\mathbb{R}^3)$ при любом $\beta<\alpha$.
(b) Предположим, что $V\in R+L^\infty$ имеет компактный носитель. Докажите, что $V\in R$.

†71. Докажите, что полюсы $(1-M_k)^{-1}$, где M_k задано формулой (102c), простые.

†72. Восполните детали доказательства следствия теоремы XI.46.

†73. Воспользуйтесь теоремой XI.42, чтобы доказать уравнение (105).

74. Пусть H есть N-частичный гамильтониан, такой, что ни один из кластерных гамильтонианов не имеет недискретных собственных значений. Пусть $E=\inf\sigma(H)$. Докажите, что $[E,\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$, где I_n — такие неперекрывающиеся интервалы, что семейство $\mathscr{C}_E$ открытых каналов при энергии E постоянно на каждом I_n.

†*75*. Докажите свойства (1)—(3) и (1′)—(3′) функции $F_V(E)$, использованные при доказательстве теоремы XI.49.

†*76*. Докажите, что отображение $\langle V, E\rangle \longmapsto K_V(E)$ из $R\times\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathcal{J}_2$ (где R — класс Рольника) непрерывно по совокупности аргументов.

†*77*. Докажите часть (c) теоремы XI.49, а именно: если V — потенциал Рольника, то оператор $T(E)$ стремится к нулю по норме, когда $E \longrightarrow \infty$. [*Указание*. Посмотрите обсуждение сходимости ряда Борна при высоких энергиях в § 6 и задачу 60.]

†*78*. Воспользуйтесь теоремой о мажорированной сходимости, чтобы доказать формулу (118), когда $V \in C_0^\infty$.

†*79*. (a) Докажите единственность решений уравнения с переменной фазой (120) вне точки $r=0$, воспользовавшись результатами о единственности из § V.6.
(b) Докажите, что локальные решения уравнения с переменной фазой (120) продолжаются на весь интервал $(0, \infty)$, проверив, что d не может обращаться в бесконечность ни в одной конечной точке.
(c) Воспользуйтесь уравнением с переменной фазой (120), чтобы доказать, что любое решение, удовлетворяющее условию $\lim\limits_{r\to 0} |r^{-1} d(r)| < \infty$, фактически удовлетворяет условию $\lim\limits_{r\to 0} r^{-1} d(r) = 0$.
(d) Докажите существование и единственность решений вблизи $r=0$, построив соответствующее сжимающее отображение.

80. Укажем на зависимость от k в уравнении с переменной фазой, записывая $d=d(r, k)$.
(a) Докажите, что $d(r, k)$ непрерывна по k при любом фиксированном r. [*Указание*. Воспользуйтесь доказательством существования.]
(b) Докажите, что $d(r, k) \longrightarrow d_\infty(k)$ при $r \longrightarrow \infty$ локально равномерно по k, так что $d_\infty(k)$ непрерывна. [*Указание*. Воспользуйтесь уравнением с переменной фазой и оценкой $\int\limits_1^\infty |V(x)|\,dx < \infty$.]
(c) Докажите, что $d_\infty(k) \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$. [*Указание*. Докажите это сначала для достаточно малых r, а затем воспользуйтесь уравнением с переменной фазой и тем, что $\int\limits_1^\infty |V(x)|\,dx < \infty$.]
(d) Сделайте вывод, что $d_\infty(k) = \delta_0(k)$ без неопределенности в π.

†*81*. Выведите (123) из (122).

82. Докажите следствие 2 теоремы XI.54. [*Указание*. Воспользуйтесь методами задачи 80.]

†*83*. В контексте теоремы XI.55 докажите, что если $\lim\limits_{r\to\infty} u'(r) \neq 0$, то

$$\lim_{k\to 0} \frac{\delta_0(k^2) - m\pi}{k} = \lim_{r\to\infty} \frac{u(r) - ru'(r)}{u'(r)}.$$

†84. (a) Докажите утверждение о единственности теоремы XI.56.

(b) При более сильном допущении $\int_0^1 |V(x)|\,dx < \infty$ докажите более сильное утверждение, что регулярное уравнение имеет единственное решение, которое остается ограниченным при $x \to 0$.

†85. (a) Докажите, что $|\sin u| \leqslant [2|u|/(1+|u|)]\, e^{|\operatorname{Im} u|}$ при всех $u \in \mathbb{C}$.

(b) Записав

$$\frac{\sin k(x-y)}{k} = \frac{(\sin kx)\, e^{-iky} - e^{-ikx} \sin ky}{k},$$

докажите, что при $0 \leqslant x \leqslant y$

$$\left| \frac{\sin k(x-y)}{k} \right| \leqslant \frac{4y}{1+|k|\,y} \exp\left[|\operatorname{Im} k|\, y + (\operatorname{Im} k)\, x\right].$$

(c) Пользуясь оценками из (a) и (b), восполните детали доказательства теоремы XI.57.

†86. Докажите теорему Левинсона для случая, когда $\eta(0)=0$, применяя метод функций Йоста. [*Указание.* Покажите, что нуль при $k=0$ простой.]

87. Пусть S — борелево множество в $\mathbb{R}$. Пусть $A(S)$ — умножение на x в $L^2(S, dx)$. Докажите, что

(a) $A(S)$ унитарно эквивалентен $A(T)$ тогда и только тогда, когда $S \Delta T$ имеет меру Лебега нуль.

(b) Спектр $A(S)$ есть $\bar{S}$.

(c) Если существует изометрия U, такая, что $A(S)\, U = UA(T)$, то $T \setminus S$ имеет меру Лебега нуль.

(d) В условиях (c) предположим еще, что T замкнуто и $\sigma(A(S)) = \sigma(A(T))$. Тогда U унитарен.

(e) Если A — любой оператор с простым и абсолютно непрерывным спектром, то A унитарно эквивалентен некоторому $A(S)$. В таком случае S называется **существенным носителем** A.

88. Пусть H и H_0 — два оператора с простым спектром. Допустим, что $\sigma_{ac}(H) \subset \sigma_{ac}(H_0)$, что существенный носитель (см. задачу 87) абсолютно непрерывной части H_0 замкнут и что $\Omega^{\pm}(H, H_0)$ существуют. Докажите, что $\Omega^{\pm}(H, H_0)$ полны. Сохранится ли этот результат, если отказаться от предположения о существенном носителе?

†89. (a) Докажите, что локально равномерный предел гармонических функций есть гармоническая функция. [*Указание.* Докажите сходимость в смысле обобщенных функций и воспользуйтесь эллиптической регулярностью или формулой Пуассона.]

(b) Докажите, что из локальной L^1-сходимости гармонических функций вытекает локальная равномерная сходимость. [*Указание.* Воспользуйтесь свойством средних значений.]

†90. (a) Докажите, что если $z=\cos\theta$, где $\theta = x+iy$, то $|y|=a$ есть эллипс с фокусами ± 1 и большой полуосью $\operatorname{ch} a$, пользуясь формулой $\cos\theta = (\cos x)(\operatorname{ch} y) + i(\sin x)(\operatorname{sh} y)$.

(b) Докажите, что если $z \in \mathbb{C} \setminus (-1, 1)$ и x мало, то $\sum\limits_{l=0}^{\infty} x^l Q_l(z) = g(x, z)$, где

$$g(x, z)=\frac{1}{u}\ln\left[\frac{z-x+u}{(z^2-1)^{1/2}}\right]=\frac{1}{2u}\ln\frac{1-(x-u)^2}{1-(x+u)^2}$$

и $u=(1-2zx+x^2)^{1/2}$.

(c) Докажите, что $g(x, z)$ имеет радиус сходимости по x, равный $e^{+|\operatorname{Im}\theta|}$, где $\theta=\arccos z$.

(d) Пусть D — компактное множество вне канонического эллипса $|\operatorname{Im}\theta|=\ln H$. Покажите, что $\sup\limits_{l,\, z\in D}|Q_l(z)H^l|<\infty$.

91. Докажите пункт (c) теоремы XI.63. [*Указание*. Докажите, что

$$\lim_{l\to\infty}|P_l(z)|^{1/l}=e^{-|\operatorname{Im}\theta|},\ \text{где}\ \theta=\arccos z.]$$

**92*. (a) Пусть $A=-d^2/dx^2$ в $L^2(-\infty, \infty)$. Пусть B_1 (соответственно B_2) есть $-d^2/dx^2$ в $L^2(0, \infty)$ (соответственно $L^2(-\infty, 0)$) с нулевыми граничными условиями в нуле, и пусть $B=B_1\oplus B_2$. Найдите явные формулы для $(A+1)^{-1}$ и $(B+1)^{-1}$ и сделайте заключение, что $0\leqslant(B+1)^{-1}\leqslant(A+1)^{-1}$ (операторное неравенство).

(b) Докажите, что $(B+1)^{-1/2}(A+1)^{1/2}$ ограничен, и сделайте вывод, что $\partial(B_1+1)^{-1/2}$ ограничен (где $\partial f=\partial f/\partial r$) и что $W(B_1+1)^{-1/2}$ имеет след, если $W\in L^2_\delta(\mathbb{R})$ для $\delta>1/2$ (см. теорему XI.21).

(c) Пусть $V=\partial W-W\partial=$ умножение на $\partial W/\partial r$. В предположении, что $W\in L^2_\delta(\mathbb{R})$, докажите, что V — ограниченное как форма возмущение B_1 с относительной гранью нуль и что $(B_1+V+i)^{-1}-(B_1+i)^{-1}$ имеет след.

(d) Пусть W — функция $|x|$ на $\mathbb{R}^n$, причем $\int|W(r)|^2(1+r^2)^{-1/2-\varepsilon}dr<\infty$ с некоторым $\varepsilon>0$. Пусть $V=\partial W/\partial r$. Докажите, что $\Omega^\pm(-\Delta+V, -\Delta)$ существуют и полны.

†93. (a) Докажите неравенство $|u_n'(x)|\leqslant n\gamma^n\|u_0\|A(x)$, нужное для доказательства предложения во втором дополнении к § 8.

(b) Распространите доказательство этого предложения на случай, когда $u_0(x)$ зависит от x.

94. Пусть u удовлетворяет (151). Докажите, что для всех $f\in L^2(0, \infty)$, имеющих компактный носитель в $(0, \infty)\setminus\mathscr{E}$, $\int f(k)u(k, r)\,dk\in L^2(0, \infty)$. [*Указание*. Запишите интеграл в виде двух членов, как подсказывает формула (151). Оцените член с $(1+|r|)^{-1/2-\gamma}$, пользуясь тем, что $f\in L^1$, а другой член с помощью теоремы Планшереля.]

**95*. (a) Предположим, что u удовлетворяет (151) и сверх того

$$\left|\frac{\partial u}{\partial r}(r, k)-k\cos\left(kr-\frac{l\pi}{2}+\delta_l(k)\right)\right|\leqslant c(k)(1+|r|)^{-1/2-\gamma}. \tag{356}$$

Докажите, что если f такая, как в задаче 94, то $Y_{lm}(\hat{x})\times\times\int(kx)^{-1}f(k)u(kx)\,dk$ принадлежит области определения $-\Delta$ в смысле форм.

(b) Покажите, что если выполнено (356), то в допущениях теоремы XI.69 условие «$-\Delta+V$ в существенном самосопряжен в C_0^∞» можно заменить условием «C_0^∞ есть существенная область в смысле форм оператора $H=-\Delta+V$ и $Q(H)=Q(-\Delta)$».

(c) Примените обобщение (b) к потенциалу $(1+|r|^2)^{-1}e^r\cos(e^r)$.

†96. Восполните детали доказательства теоремы XI.70.

97. (a) Пусть $A(y)$ и $T(y)$ — такие матричнозначные функции, что $T(y)$ имеет обратную, $\|T(x)T(y)^{-1}\| \leqslant 1$, если $x \leqslant y$, $\tilde{A}(y) = T(y)A(y)T(y)^{-1}$ удовлетворяет условию $\int\limits_R^\infty \|\tilde{A}(y)\|\, dy < 1$. Допустим, что $T(y)u_0 = u_0$ при всех y. Покажите, что уравнение $u(x) = u_0 + \int\limits_x^\infty A(y)\, u(y)\, dy$ имеет решение. [*Указание*. Оцените $T(x)\, u_n(x)$ по индукции.]

(b) Пусть $f(x)$ — положительная монотонно возрастающая функция и $\tilde{A}$ — некоторая 2×2-матрица в L^1. Покажите, что уравнение

$$\dot{u}(t) = -\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}(t) & \tilde{a}_{12}(t)\, f(t) \\ \tilde{a}_{21}(t)\, f(t)^{-1} & \tilde{a}_{22}(t) \end{pmatrix} u(t)$$

имеет решение, стремящееся к $\langle 1, 0\rangle$ на бесконечности.

(c) Постройте решение уравнения $-u''(x) + x^{2n}u(x) = 0$, асимптотически приближающееся к $\exp(-(n+1)^{-1}x^{n+1})$ при $x \to \infty$. [*Указание*. Воспользуйтесь вариацией постоянных и двумя решениями $\exp(\pm(n+1)^{-1}x^{n+1})$.]

(d) Предположим, что $A = A_1 + A_2$, где $\tilde{A}_1(y) = T(y)A_1(y)T(y)^{-1} \in L^1$, и что $A_2(y) = dB(y)/dy$, где $\tilde{B}(y) = T(y)B(y)T(y)^{-1}$ удовлетворяет условию $\tilde{A}\tilde{B} \in L^1$ и $\tilde{B} \to 0$ на бесконечности. Пусть $T(y)u_0 = u_0$. Покажите, что уравнение $\dot{u}(t) = A(t)\, u(t)$ имеет решение, удовлетворяющее условию $u(t) \to u_0$ на бесконечности.

(e) Пусть $f(x)$ — положительная монотонно возрастающая функция, такая, что $|\dot{f}(t)| \leqslant ct^{-\alpha}|f(t)|$, $t \geqslant R$, $\alpha > 0$. Пусть $\tilde{A}(t)$ есть 2×2-матричнозначная функция, такая, что $\tilde{A} = M_1 + M_2$, где $M_1 \in L^1$, $\tilde{A}M_2 \in L^1$, $t^{-\alpha}M_2 \in L^1$ и $M_2 \to 0$ на бесконечности. Покажите, что уравнение

$$\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}(t) & \tilde{a}_{12}(t)\, f(t) \\ \tilde{a}_{21}(t)\, f(t)^{-1} & \tilde{a}_{22}(t) \end{pmatrix} u(t)$$

имеет решение, сходящееся к $\langle 1, 0\rangle$ на бесконечности.

98. (a) Пусть f и g — такие функции из $C^1(\mathbb{R})$, что $fg' - gf'$ нигде не обращается в нуль. Допустим, что $\langle u(x), u'(x)\rangle$ и $\langle a(x), b(x)\rangle$ связаны формулами

$$u(x) = a(x)\, f(x) + b(x)\, g(x), \qquad u'(x) = a(x)\, f'(x) + b(x)\, g'(x).$$

Пусть задана $W(x)$. Докажите, что дифференциальное уравнение $u''(x) = W(x)\, u(x)$ эквивалентно дифференциальному уравнению $\rho'(x) = \Delta(x)\, \rho(x)$, где $\rho(x) = \langle a(x), b(x)\rangle$ и

$$\Delta = (f'g - gf')^{-1}\begin{pmatrix} -g(-f'' + Wf) & -g(-g'' + Wg) \\ f(-f'' + Wf) & f(-g'' + Wg) \end{pmatrix}.$$

(b) Докажите теорему XI.67 (c), пользуясь задачей 97e и пунктом (a), выбрав

$$f(x) = x^{-\nu_j/2\alpha_j}\cos(\alpha_j x/2), \qquad g(x) = x^{\nu_j/2\alpha_j}\sin(\alpha_j x/2).$$

99. Докажите (155) и сделайте заключение, что обычные волновые операторы в кулоновом случае не существуют. [*Указание.* Сначала докажите, что $(1-P_{ac}(H))\,e^{itH}e^{-itH_0}\longrightarrow 0$ слабо. Затем, пользуясь сходимостью $U_D(t)^* e^{-itH}P_{ac}(H)$, докажите, что $P_{ac}(H)\,e^{itH}e^{-itH_0}\longrightarrow 0$ слабо.]

†*100.* Пусть $W(k, t)$, $P(k)$ — такие вещественнозначные функции, что для каждого s и почти всех k

$$W(k,\ t+s)-W(k,\ t)\longrightarrow sP(k),$$

когда $t\longrightarrow\pm\infty$. Докажите, что

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty}\exp(iW(i\nabla,\ t))\exp(-iW(i\nabla,\ t+s))=\exp(-isP(i\nabla)).$$

[*Указание.* Воспользуйтесь мажорированной сходимостью.]

†*101.* Воспользуйтесь методом стационарной фазы, чтобы доказать (159а).

102. Пусть $H_0=-\Delta$; $H=-\Delta-\lambda r^{-1}+V_s$; $H'=-\Delta-\lambda r^{-1}$. Пусть $\varphi\in C_0^\infty$ и $\varphi\equiv 1$ вблизи $r=0$. Пусть $\tilde H=H_0-\lambda(1-\varphi)\,r^{-1}$; $W=-\lambda r^{-1}\varphi$.

(a) Докажите, что $\Omega_D^\pm(H,\ H_0)=\Omega^\pm(H,\ H')\,\Omega_D^\pm(H',\ H_0)$, и заключите, что для доказательства полноты $\Omega_D^\pm(H,\ H_0)$ достаточно доказать полноту $\Omega_D^\pm(H',\ H_0)$ и $\Omega^\pm(H,\ H')$.

(b) Предположим, что $V_s(H_0+1)^{-m-1}$ обладает следом. Докажите, что $V_s(\tilde H+E)^{-m-1}$ имеет след, показав, что $D(H_0^{m+1})=D(\tilde H^{m+1})$.

(c) Докажите, что $W(H_0+1)^{-m-1}$ имеет след при достаточно больших m.

(d) Докажите, что $(\tilde H+E)^{-m}-(H'+E)^{-m}$ и $(\tilde H+E)^{-m}-(H+E)^{-m}$ обладают следом, если $V_s(\tilde H+E)^{-m-1}$ имеет след при достаточно большом m.

(e) Докажите, что если $V_s(H_0+1)^{-m-1}$ имеет след, то $\Omega^\pm(H,\ H')$ существуют и полны. *Примечание.* $\Omega_D^\pm(H',\ H_0)$ полны, что видно из явного разложения по собственным функциям; см. основополагающую статью Долларда, цитированную в замечаниях к § 9.

103. Убедитесь, что в классическом случае для дальнодействующих сил $(\Sigma_+\setminus\Sigma_-)\cup(\Sigma_-\setminus\Sigma_+)$ имеет меру нуль и что (167) выполняется для каждой пары $\langle x_0,\ p_0\rangle$ в $\Sigma_\pm$.

104. Воспользуйтесь методом сжимающих отображений такого типа, как в § 2, чтобы доказать существование решений уравнения (172).

105. Докажите, что для почти всех p_{in}, b_{in} соответствующее дальнодействующее решение $x(t)$, связанное со (172), удовлетворяет условию $\lim_{t\to\infty}|x(t)|=\infty$. [*Указание.* Пусть G — отображение $\langle p_{in},\ a\rangle$ в решение, связанное со (172) в момент $t=0$. Докажите, что G сохраняет меру.]

106. Фиксируем $\alpha>0$. Предположим, что $\sup_x[(1+x)^{\alpha+|\beta|}\,|D^\beta(V_n-V)|]\longrightarrow 0$ при $|\beta|\leqslant 2$. Пусть $N=[1/\alpha]$.

(a) Докажите, что функция $z_N(p,\ t;\ V_n)$ сходится к $z_N(p,\ t;\ V)$ равномерно по t, когда p принадлежит компактным подмножествам из $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.

(b) Докажите, что решения уравнения (172), связанные с V_n, сходятся при $n\longrightarrow\infty$ к решению, связанному с V.

(c) Докажите, что отображение $\tilde S$, определенное в связи с теоремой XI.73, сходится при $n\longrightarrow\infty$.

(d) Докажите, что если V_n короткодействующий, то $\tilde S$, определенное при помощи z_N, совпадает с частью обычного короткодействующего S.

*107. Пользуясь результатами Хёрмандера, относящимися к решениям уравнения Гамильтона — Якоби, исправьте анализ Хербста классического короткодействующего рассеяния с помощью канонических преобразований. *Литература*: статья Хёрмандера и вторая из статей Хербста, цитированных в замечаниях к § 9.

108. (a) Пусть $W(k\ t)$ — вещественнозначная функция, такая, что при некотором фиксированном H имеем $e^{itH}\exp(-iW(i\nabla,\ t))\longrightarrow\Omega_D^+$, когда $t\longrightarrow-\infty$. Пусть P_D — проектор на $\operatorname{Ran}\Omega_D^+$. Докажите, что для любой другой измеримой функции $\tilde{W}(k,t)$ существуют L^∞-функция $G(k)$ и поднаправленность $t_\alpha\longrightarrow-\infty$, такие, что

$$\operatorname*{w-lim}_{t_\alpha\to-\infty} P_D e^{itH}\exp(-i\tilde{W}(-i\nabla,\ t_\alpha))=\Omega_D^+ G(-i\nabla).$$

[*Указание*. Возьмите в качестве $G(k)$ предельную точку $\exp(iW(k,t)-i\tilde{W}(k,\ t))$ в топологии $\sigma(L^\infty,\ L^1)$, т. е. в $*$-слабой топологии.]

(b) Докажите, что если $\operatorname*{s-lim}_{t\to-\infty} e^{itH}\exp(-i\tilde{W}(-i\nabla,\ t))=\tilde{\Omega}_D^+$ существует, то $P_D\tilde{\Omega}_D^+=\Omega_D^+G(-i\nabla)$.

(c) Если, кроме того, $P_D=P_{ac}(H)$, то $|G(k)|=1$ п. в.

109. Пусть V удовлетворяет условию $|D^\alpha V(x)|\leqslant C(1+x)^{-|\alpha|-\varepsilon}$ при всех α с $|\alpha|\leqslant 3$. Докажите, что V можно представить в виде V_1+V_2, причем $|V_2(x)|\leqslant C(1+x)^{-1-\varepsilon}$ и $|(D^\alpha V_1)(x)|\leqslant C(1+x)^{-m(|\alpha|)}$, где $m(l)=l+\varepsilon$ при $l=0,\ 1,\ 2,\ 3$ и $m(l)=3+\varepsilon+{}^2/_3(l-3)$ при $l\geqslant 3$, действуя следующим образом.

(a) Возьмите $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\psi(x)=1$ при $|x|\leqslant 1$, $\psi(x)=0$ при $|x|\geqslant 2$ и $0\leqslant\psi(x)\leqslant 1$ при всех x. Пусть $\psi_\nu(x)=\psi(2^{-\nu}x)-\psi(2^{1-\nu}x)$ и $V_\nu=V\psi_\nu$. Докажите, что $\|D^\alpha\psi_\nu\|_\infty\leqslant C_\alpha 2^{-\nu|\alpha|}$, $|(D^\alpha\psi_\nu)(x)|\leqslant d(1+|x|)^{-|\alpha|}$, и выведите отсюда, что $|D^\alpha V_\nu(x)|\leqslant C(1+x)^{-|\alpha|-\varepsilon}$, $0\leqslant\alpha\leqslant 3$.

(b) Пусть $\delta=2/3$. Пусть $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, причем $\int\chi(x)\,dx=1$ и $\int|x|^\alpha\chi(x)\,dx=0$ при $0<|\alpha|<3$. Пусть $\chi_\nu(y)=2^{-\delta n\nu}\chi(2^{-\nu\delta}y)$.

Докажите, что

$$\Big|V_\nu(x-y)-V_\nu(x)-\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant 2}(\alpha!)^{-1}(y)^\alpha(D^\alpha V_\nu)(x)\Big|\leqslant$$
$$\leqslant C|y|^3(1+x)^{-3-\varepsilon}$$

для всех x, y, таких, что $x\in\operatorname{supp}V_\nu$, $y\in\operatorname{supp}\chi_\nu$. Выведите отсюда, что

$$|\chi_\nu*V_\nu(x)-V_\nu(x)|\leqslant C(1+x)^{-1-\varepsilon}.$$

(c) Докажите, что $D^\alpha(V_\nu*\chi_\nu)\leqslant C_\alpha(1+x)^{-m(|\alpha|)}$.

(d) Завершите доказательство, взяв $V_1=\sum_\nu V_\nu*\chi_\nu$ и $V_2=V-V_1$.

110. Следуя методу задачи 109, покажите, что $V=V_1+V_2$, где $|V_2(x)|\leqslant C(1+x)^{-1-\varepsilon}$ и $|(D^\alpha V_1)(x)|\leqslant C(1+x)^{-m(|\alpha|)}$ с $m(1)+m(3)>4$, если $|D^\alpha V(x)|\leqslant C(1+x)^{-|\alpha|-\varepsilon}$, $|\alpha|\leqslant M$, причем $\varepsilon>1/2$ при $M=1$ и $\varepsilon>1/5$ при $M=2$.

Литература к задачам 109 и 110: статья Хёрмандера, указанная в замечаниях к § 9.

111. (a) Вычислите дифференциальное сечение классического кулонова рассеяния (резерфордово сечение).
(b) Вычислите кулоново сечение в борновском приближении.

†*112.* Используя обозначения теоремы XI.75 § 10, покажите, что
(a) $\langle u, v\rangle \in P_{ac}(A_0) \Leftrightarrow B_0 u \in P_{ac}(B_0)$ и $v \in P_{ac}(B_0)$;
(b) $T_0 P_{ac}(A_0) = \begin{pmatrix} P_{ac}(B_0) & 0 \\ 0 & P_{ac}(B_0) \end{pmatrix}$.

†*113.* Предполагая, что теоремы XI.75 и XI.76 остаются верными и в том случае, когда H_0 и H_1 имеют точечный спектр в нуле, восполните детали доказательства существования волновых операторов при оптическом рассеянии в неоднородной среде (пример 2 в § 10).

114. Пользуясь методами § 10, постройте теорию рассеяния для волновых уравнений

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \qquad u_{tt} - \Delta u + q(x)\, u = 0$$

при подходящих условиях на $q(x)$.

115. Пусть A и B—ограниченные операторы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$.
(a) Докажите, что $\sigma(AB)\diagdown\{0\} = \sigma(BA)\diagdown\{0\}$.
(b) Докажите, перестановочное соотношение (205).

•*116.* Цель этой задачи—распространить теоремы XI.79 и XI.80 на размерности $n \neq 3$.
(a) С помощью метода, использованного при доказательстве теоремы XI.21, покажите, что $(1+x^2)^{-\alpha}(1+p^2)^{-\beta}(1+x^2)^{-\gamma} \in \mathscr{I}_p$ в смысле операторов в $L^2(\mathbb{R}^n)$, если $\beta > n/2p$, $\alpha+\gamma > n/2p$, где α или γ могут быть отрицательными. [*Указание.* Рассмотрите сначала случай $p \geqslant 2$, а затем воспользуйтесь равенством
$(1+x^2)^{-\alpha}(1+p^2)^{-\beta}(1+x^2)^{-\gamma} =$
$= [(1+x^2)^{-\alpha}(1+p^2)^{-\beta/2}(1+x^2)^{-\delta}][(1+x^2)^{\delta}(1+p^2)^{-\beta/2}(1+x^2)^{-\gamma}]$
с подходящим δ.]
(b) Пусть $R_0 = (H_0+1)^{-1}$, а R—другой оператор. Предположим, что $(1+x^2)^k (R - R_0)(1+x^2)^k \in \mathscr{I}_p$ для $p > n/2$ и всех k. Докажите по индукции, что $(1+x^2)^k (R^m - R_0^m)(1+x^2)^k \in \mathscr{I}_p$ для всех k, всех $m = 1, 2, 3, \ldots$ и $p > n/2m$ и, в частности, что $R^m - R_0^m \in \mathscr{I}_1$, если $m > n/2$.
(c) Докажите аналоги теорем XI.79 и XI.80 для произвольного n.

117. Будем говорить, что положительные самосопряженные операторы A и B удовлетворяют условию $A \leqslant B$, тогда и только тогда, когда $Q(B) \subset Q(A)$ и $(\varphi, A\varphi) \leqslant (\varphi, B\varphi)$ для всех $\varphi \in Q(B)$. Предположим, что A и B имеют ограниченные обратные. Докажите, что $B^{-1} \leqslant A^{-1}$. [*Указание*: $(\varphi, B^{-1}\varphi) \leqslant (A^{-1}\varphi, AB^{-1}\varphi) \leqslant (A^{-1}\varphi, \varphi)^{1/2}(B^{-1}\varphi, AB^{-1}\varphi)^{1/2} \leqslant$ $\leqslant (\varphi, A^{-1}\varphi)^{1/2}(\varphi, B^{-1}\varphi)^{1/2}$.]

†*118.* Восполните детали доказательства теоремы XI.81′.

119. Пусть W—ограниченное замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^2$ и $\Gamma = \{\langle x_1, x_2, x_3\rangle \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x_1, x_2\rangle \in W, x_3 = 0\}$. Цель этой задачи—доказательство конечности следа $R^2_{\Gamma;\,N} - R_0^2$.
(a) Покажите, что теорему XI.80 можно модифицировать так, чтобы ее утверждение оставалось справедливым при замене сферы S границей куба C.

(b) Пусть C — куб, а Γ' — часть гиперплоскости, рассекающая C на два прямоугольных параллелепипеда. Докажите, что $\tilde{R}_{\partial C \cup \Gamma';\, N}$ (оператор Лапласа в $L^2(C)$ с граничными условиями Неймана на $\partial C \cup \Gamma'$) есть оператор Гильберта — Шмидта. [*Указание.* Сосчитайте собственные значения $\tilde{R}$!]

*(c) Завершите доказательство конечности следа $R^2_{\Gamma;\, N} - R^2_0$.

120. В случае рассеяния на препятствии с граничными условиями Дирихле мы доказали существование $\Omega^{\pm}(A_D, A_0; \overset{*}{I}_{10})$. Пусть J — оператор умножения (обеих компонент) на функцию $\varphi \in C_0^\infty$, обращающуюся в нуль в окрестности препятствия. Докажите существование $\Omega^{\pm}(A_D, A_0; J)$.

121. Докажите единственность представлений, указанных в теоремах XI.82 и XI.83.

122. (a) Пусть $d\nu(\theta)$ — трансляционно-инвариантная борелева мера на окружности. Докажите, что $d\nu = c\, d\theta$. [*Указание.* Примените теорему Фубини к интегралу $\int f(\theta+\theta')\, d\nu(\theta)\, d\theta'$.]

(b) Пусть $d\nu(x)$ — трансляционно-инвариантная борелева мера на $\mathbb{R}$. Докажите, что $d\nu(x) = c\, dx$.

†123. Докажите, что операторнозначная функция $t(\sigma + iy)$ аналитична по норме в верхней полуплоскости, используя факт ее слабой аналитичности и привлекая идеи теоремы VI.4.

*124. Используя идеи примера 3 § 11, проверьте выполнение условий теоремы XI.91 для группы, описывающей взаимодействие, из примера 2.

125. При дополнительном условии $q > 1$ в теореме XI.98 докажите, что $\| e^{itA}\varphi(t) - \varphi_+ \|_{\text{scat}} \to 0$ при $t \to +\infty$

†126. Докажите, что оператор рассеяния для малых начальных данных, построенный в теореме XI.98, инъективен. [*Указание.* Обратите доказательство части теоремы XI.97, касающейся единственности.]

127. (a) Пусть g — положительная интегрируемая функция на $\mathbb{R}$, а f — измеримая ограниченная на каждом интервале $(-\infty, t)$ функция, удовлетворяющая неравенству

$$f(t) \leqslant c_0 + b_0 \int_{-\infty}^{t} f(s)\, g(s)\, ds \quad \text{для всех } t.$$

Докажите, что

$$f(t) \leqslant c_0 \exp\left(b_0 \int_{-\infty}^{t} g(s)\, ds \right) \quad \text{для всех } t.$$

*(b) Пусть α и β — две эрмитовы 2×2-матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\alpha^2 = I = \beta^2, \qquad \beta\alpha + \alpha\beta = 0.$$

Докажите глобальное существование для связанных между собой уравнений Клейна — Гордона и Дирака в одномерном пространстве:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + i\left(i\alpha \frac{\partial}{\partial x} + m_e \beta \right)\psi = -\, ig\beta u \psi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m_0^2 u = \bar{\psi} \cdot \beta\psi,$$

где g — вещественная константа связи, $u(x, t)$ — вещественнозначная функция на $\mathbb{R}^2$, $\psi(x, t)$ — функция на $\mathbb{R}^2$ со значениями в $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$, а $\bar{\psi}\cdot\beta\psi$ — скалярное произведение. [*Указание.* Найдите сохраняющиеся величины, воспользуйтесь оценкой Соболева $\|f\|_\infty \leqslant c\|f'\|_2^{1/2}\|f\|_2^{1/2}$ и тупо итерируйте.]

Литература: J. Chadam, Global solutions of the Cauchy problem for the (classical) coupled Maxwell — Dirac equations in one space dimension.— *J. Funct. Anal.* 13 (1973), 173—184.

†*128.* Восполните детали доказательства теоремы XI.100. В частности:

(a) Покажите, что для каждых t и η отображение M_t равномерно непрерывно на $\{\psi \in \Sigma_{\text{scat}} \mid \|\psi\|_{\text{scat}} \leqslant \eta\}$ в $\|\ \|_{\text{scat}}$-топологии. [*Указание.* Сначала покажите, что M_t непрерывно в $\|\cdot\|$-топологии.]

(b) Докажите инъективность Ω^+.

129. (a) Пусть $B = \sqrt{-\Delta + m^2}$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$. Покажите, что существует постоянная c, такая, что

$$\|B^{-1}\sin[(t-s)B]\,u^3(s)\|_\infty \leqslant C\|Bu(s)\|_2\|u(s)\|_\infty^2$$

для каждой $u(s)\in D(B^2)\subset L^2(\mathbb{R}^3)$.

(b) С помощью полученного неравенства, применяя технику теоремы XI.100, постройте волновые операторы для уравнения $u_{tt} - \Delta u + m^2 u = -u^3$ в случае $n = 3$.

130. Докажите существование глобального решения для нелинейного уравнения Шредингера (261) при $p \geqslant 1$ и $\lambda > 0$.

Примечание. Задачи 131, 132, 133 требуют некоторого знакомства с квантовой теорией сложения угловых моментов.

131. Пусть $\sigma^{(\alpha)}$ и $\sigma^{(\beta)}$ — спины Паули в различных узлах гейзенберговой модели. Введем $k_{\alpha\beta} = (\sigma^{(\alpha)} + \sigma^{(\beta)})^2$. Докажите, что собственные значения $k_{\alpha\beta}$ равны 0 и 8 и что $\sigma^{(\alpha)}\cdot\sigma^{(\beta)} = 1$, когда $k_{\alpha\beta} = 8$, и $\sigma^{(\alpha)}\cdot\sigma^{(\beta)} = -3$, когда $k_{\alpha\beta} = 0$.

**132.* (a) Пусть $\sigma^{(\alpha)}$, $\sigma^{(\beta)}$, $\sigma^{(\gamma)}$ — три спина Паули в различных узлах. Докажите, что (в операторном смысле)

$$(1 - \sigma^{(\alpha)}\cdot\sigma^{(\beta)}) \leqslant 2(1 - \sigma^{(\alpha)}\cdot\sigma^{(\gamma)}) + 2(1 - \sigma^{(\beta)}\cdot\sigma^{(\gamma)}).$$

(b) Пусть все $J_{\alpha\beta} \geqslant 0$ и $H = -\sum J_{\alpha\beta}\sigma^{(\alpha)}\cdot\sigma^{(\beta)}$, причем сумма берется по конечному множеству узлов, которое нельзя разбить на две невзаимодействующие части. Докажите, что наинизшее собственное значение H равно $-\sum J_{\alpha\beta}$, а его кратность равна $n+1$, где n — число узлов. [*Указание.* С помощью (a) докажите, что каждый собственный вектор, отвечающий собственному значению $-\sum J_{\alpha\beta}$, имеет полный угловой момент $S = \frac{1}{2}\sum \sigma^{(\alpha)}$ с $s = n/2$.]

**133.* a) Пусть $\sigma^{(\alpha)}$, $\sigma^{(\beta)}$ — спины Паули в различных узлах. Пусть ρ — матрица плотности с $\mathrm{Tr}(\rho\sigma^{(\alpha)}\cdot\sigma^{(\beta)}) = 1$. Докажите, что $\mathrm{Tr}(\rho\sigma^{(\alpha)}) = \mathrm{Tr}(\rho\sigma^{(\beta)})$.

(b) Пусть ψ лежит в пространстве n спинов $\mathscr{H}_n$ системы в бесконечном объеме. Докажите, что

$$\lim_{\Lambda\to\infty}\left(\psi, \sum_{\alpha\in\Lambda}\frac{1}{2}(\sigma_z^{(\alpha)} + 1)\psi\right) = n.$$

(c) Пусть H — гамильтониан гейзенберговой модели с бесконечным объемом при нулевой температуре. Пусть $\psi\in\mathscr{H}_n$ и $H\psi = 0$. Докажите, что $(\psi, \sigma_z^{(\alpha)}\psi)$ не зависит от α, и выведите отсюда, что $n = 0$.

†*134.* Проверьте (276).

•*135.* Пусть $H_2(K)$ — слоение, описанное в конце § 14. Пусть $J_2(K)$ и $H_2^{(0)}(K)$ — соответствующие слоения J_2 и $H_1^{\otimes}$. Докажите, что ранг, а потому и след оператора $H_2(K)\,J_2(K)-J_2(K)\,H_2^{(0)}(K)$ конечны. Выведите отсюда, что $\operatorname{Ran}\Omega_2^+=\operatorname{Ran}\Omega_2^-$.

136. Докажите, что внутреннее произведение (344) определено корректно, показав, что если v и w по-разному представимы в виде конечных линейных комбинаций векторов из D_0, то (v, w) не зависит от выбора представления.

†*137.* Проверьте, что операторы $h(t)+M+1$ в доказательстве теоремы XI.104 удовлетворяют условиям теоремы X.70.

†*138.* Проверьте часть (e) теоремы XI.104.

†*139.* Убедитесь, что заряженное скалярное поле массы m удовлетворяет обобщенным очевидным образом аксиомам Гординга — Вайтмана.

†*140.* Обобщите доказательство причинности из § 15, для того чтобы показать, что $[\varphi(f, t), \varphi(g, t')^*]=0$, когда $\{\langle x, t\rangle \mid x\in\operatorname{supp} f\}$ пространственно-подобно $\{\langle x, t'\rangle \mid x\in\operatorname{supp} g\}$.

†*141.* Восполните следующие детали доказательства теоремы XI.106.
(a) Завершите доказательство (295).
(b) Докажите, что $(a_i+\lambda_i b_i^*)e^{-\lambda_i a_i^* b_i^*}\psi_{\text{in}}=0$
(c) Восполните детали доказательства изометричности S^{-1}.

142. Фиксируем короткодействующий потенциал V в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\mathcal{F}$ — бозонное фоково пространство, построенное над $L^2(\mathbb{R}^3)$, т. е. $\mathcal{F}_n$ равно $L_s^2(\mathbb{R}^{3n})$ — пространству, состоящему из симметричных функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, заданных на $\mathbb{R}^{3n}$ и суммируемых с квадратом. Определим H в $\mathcal{F}$, потребовав, чтобы H оставлял $\mathcal{F}_n$ инвариантным, V был четным и

$$H\restriction\mathcal{F}_n=-\sum_{i=1}^{n}\Delta_i+\sum_{i<j}V(x_i-x_j).$$

Пусть Ω_0 — фоков вакуум. Определим «полевой оператор», полагая

$$\varphi(x, 0)=(2\pi)^{-3/2}\int[e^{-ip\cdot x}a^\dagger(p)+e^{ip\cdot x}a(p)]\,d^3p/\sqrt{2},$$
$$\varphi(x, t)=e^{itH}\varphi(x, 0)\,e^{-itH}.$$

Под регулярным волновым пакетом для свободного уравнения Шредингера будем подразумевать функцию $f(x, t)$ вида

$$f(x, t)=(2\pi)^{-3/2}\int e^{-itp^2}e^{ip\cdot x}g(p)\,d^3p$$

с $g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Имея такую f, определим $\varphi_f(t)$ соотношением

$$\varphi_f(t)=\int\varphi(x, t)\,f(x, t)\,d^3x.$$

(a) Докажите, что для любых регулярных волновых пакетов $f_1, \ldots, f_n$ вектор

$$\eta(t)=\varphi_{f_1}(t)\ldots\varphi_{f_n}(t)\,\Omega_0$$

имеет предел при $t \to \pm\infty$ в топологии нормы, представив $\eta(t)$ в виде $e^{itH}e^{-itH_0}g$ с подходящим вектором g и воспользовавшись известными фактами о нерелятивистском рассеянии.

(b) Докажите (a) методом Хаага—Рюэля. [*Указание.* УФВ, взятые при равных временах, очень просты; вычислите их точно!]

(c) Предположим, что $H\restriction\mathcal{F}_2$ обладает связанным состоянием. Введите подходящие новые «полевые» операторы ψ так, чтобы, следуя процедуре (a), можно было получить волновые операторы канала для этого связанного состояния при применении ее к полям ψ и волновые операторы канала для свободных частиц и этого связанного состояния, если использовать φ и ψ.

Литература: лекции Хеппа и статья Сандаса, упомянутые в замечаниях к § 16.

143. Докажите, что УФВ явным образом выражаются через обобщенные функции Вайтмана по формулам

$$\mathcal{W}_{n,\,\mathrm{T}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{P \in \mathcal{P}_n} (-1)^{(|P|+1)} c_P \mathcal{W}_{k_1}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k_1}}) \ldots \mathcal{W}_{k_l}(x_{i'_1}, \ldots, x_{i'_{k_l}}),$$

где $|P| = l$ и $c_P = \begin{cases} 1, & |P| = 1, \\ |P|-1, & |P| \geqslant 2. \end{cases}$

144. Предположим, что для $n = 1, 2, \ldots$ заданы функции $f_n(\lambda)$ на $(0, \infty)$ с асимптотическими рядами $f_n(\lambda) \sim \sum_m a_{n,\,m}\lambda^m$. Определим «усеченные» функции $f_{n,\,\mathrm{T}}(\lambda)$ по индукции с помощью соотношений

$$f_n(\lambda) = \sum N(m_1, \ldots, m_k)\, f_{m_1,\,\mathrm{T}}(\lambda) \ldots f_{m_k,\,\mathrm{T}}(\lambda),$$

где $N(m_1, \ldots, m_k)$ — число различных разбиений множества $\{1, \ldots, n\}$ на k подмножеств с $m_1, \ldots, m_k$ элементами (так что $N = n!/m_1! \ldots m_k!$, если все m_i различны, и меньше, если некоторые m_i совпадают). Под (n, m)-графом будем понимать множество как-то обозначенных n красных точек и m черных точек, соединенных между собой некоторым числом линий. Каждому графу Γ припишем его величину $V(\Gamma)$, руководствуясь двумя ограничениями: (i) величина графа не меняется при переобозначении красных (соответственно черных) точек; (ii) величина любого графа Γ, равного объединению связных графов $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, равна $V(\Gamma) = V(\Gamma_1) \ldots V(\Gamma_k)$. Предположим, что

$$a_{n,\,m} = \sum_{\Gamma \text{ есть } (n,\, m)\text{-граф}} V(\Gamma).$$

Докажите, что $f_{n,\,\mathrm{T}}(\lambda) \sim \sum a^{\mathrm{T}}_{n,\,m}\lambda^m$, где

$$a^{\mathrm{T}}_{n,\,m} = \sum_{\Gamma\text{—}\textit{связный } (n,\, m)\text{-граф}} V(\Gamma).$$

Примечание. Мы рассмотрели функции $f_n(\lambda)$ одного переменного только с целью сокращения обозначений. Таким же способом можно рассмотреть функции Вайтмана, зависящие от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, и соответствующие УФВ. В таком случае аналог сформулированного выше результата приводит к такому следствию: в теориях, где функции $\mathcal{W}_n$ заданы «формальными» суммами фейнмановых диаграмм, УФВ задаются как суммы связных фейнмановых диаграмм. Это означает, что «связная» S-матрица из § 5 соотносится с полной S-матрицей так же, как УФВ — с вакуумными средними.

†*145*. Проверьте (314). [*Указание*. Докажите, что спектр $\mathbf{a}\cdot\mathbf{P}$ на $\{\psi_0\}^{\perp}$ содержит лишь абсолютно непрерывную часть, и примените лемму Римана — Лебега.]

†*146*. (а) Покажите, что свойство носителей $\hat{W}_n$ (теорема IX.32) эквивалентно тому, что носителем $\hat{\mathcal{W}}_n$ служит

$$S_n = \{\langle q_1, \ldots, q_n\rangle \mid q_1 \in -\bar{V}_+, q_1+q_2 \in -\bar{V}_+, \ldots, q_1+\ldots+q_{n-1} \in -\bar{V}_+, \\ q_1+\ldots+q_n = 0\}.$$

[*Указание*. $\sum_{i=1}^{n} q_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1}) \left(\sum_{j=1}^{i} q_j\right) + x_n \sum_{j=1}^{n} q_j$.]

(b) Пусть $\langle i, \ldots, i_{k_1}\rangle, \ldots, \langle i'_1, \ldots, i'_{k_l}\rangle$ — разбиение множества $\{1, \ldots, n\}$, такое, что $i_1 < \ldots < i_{k_l}$. Пусть

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \mathcal{W}_{k_1}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k(1)}}) \ldots \mathcal{W}_{k_l}(x_{i'_1}, \ldots, x_{i'_{k(l)}}).$$

Докажите, что носитель $\hat{G}$ лежит в S_n.

(c) Покажите, что если в (а) вместо $\hat{\mathcal{W}}_n$ взять $\hat{\mathcal{W}}_{n,\,\mathrm{T}}$ и считать выполненным свойство 9, то $-\bar{V}_+$ можно заменить на $-\bar{V}_{+,\,m}$.

(d) Пусть $\langle q_1, \ldots, q_n\rangle$ принадлежит носителю $\hat{\mathcal{W}}_{n,\,\mathrm{T}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_{i'_1}, \ldots$ $\ldots, x_{i'_l})$. Докажите, что $\sum_{i\in I} q_i \in -\bar{V}_{+,\,m}$ и $\sum_{i\in I'} q_i \in \bar{V}_{+,\,m}$.

147. Докажите теорему XI.117 из замечаний, касающихся рассеяния в формализме C^*-алгебр.

148. (а) В обозначениях теоремы XI.114 покажите, что

$$N^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} |F(n)|^2 \longrightarrow \sum_{x\in\mathbb{R}} |\mu(\{x\})|^2 \quad \text{при} \quad N \longrightarrow \infty.$$

(b) Пусть U — унитарный оператор на сепарабельном гильбертовом пространстве и $\{E_i\}_{i=1}^{M}$ $(M = 1, \ldots, \infty)$ — его собственные значения, а P_i — соответствующие собственные проекторы. Покажите, что для любых векторов η, ψ

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} |(\eta, U^n\psi)|^2 = \sum |(\eta, P_i\psi)|^2.$$

(c) Предположим что $U\varphi = \varphi$. Докажите, что

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} |(\eta, U^n\psi) - (\eta, \varphi)(\varphi, \psi)| = 0$$

для всех $\eta, \psi \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда φ — единственный собственный вектор U. (Это теорема VII.14 (b).)

149. (а) Отобразите $Q = \mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty} \{-1, 1\}$ на $[0, 1]$ с помощью функции T: $x \longmapsto$ $\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}(x_n+1)$. Пусть μ_0 — мера на $\{-1, 1\}$, такая, что $\mu_0(\{1\}) =$ $= \mu_0(\{-1\}) = 1/2$, а μ — мера-произведение на Q. Зададим ν на $[0, 1]$ формулой $\nu(A) = \mu(T^{-1}(A))$. Покажите, что ν — канторова мера.

(b) С помощью (a) покажите, что функция $F(t)=\int e^{ixt}\,d\nu(x)$, где ν — канторова мера, представима в виде

$$F(t)=e^{it/2}\prod_{n=1}^{\infty}\cos(3^{-n}t).$$

(c) Покажите, что $F(3^N(2\pi))$ не стремится к 0 при $N\to\infty$, и выведите отсюда, что $F(t)$ не стремится к 0 при $t\to\infty$.
(d) Пусть A — оператор умножения на x в $L^2(0,1;d\nu)$. Покажите, что $U(t)=e^{itA}$ не сходится слабо к нулю.
(e) Если Q отобразить на $[0,1]$ с помощью S: $x\longmapsto\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n-1}(x_n+1)$,

то $\nu(\cdot)=\mu(S^{-1}(\cdot))$ будет мерой Лебега на $[0,1]$. Почему нельзя утверждать, что $\bar F(2^N(2\pi))$ не стремится к нулю?

(f) Докажите, что $t^{-1}\sin t=\prod_{n=1}^{\infty}\cos(2^{-n-1}t)$.

150. В рамках формализма Лакса — Филлипса предположим, что нам известно лишь то, что A_1 имеет только непрерывный спектр. С помощью леммы 3, доказанной перед теоремой XI.8, и теоремы РАГЭ покажите, что выполняется (219).

151. Пусть V ограничен относительно $H_0\ (=-{}^1/_2\,\Delta)$. Фиксируем такое j, что $1-j\in C_0^\infty$, $j(x)=1$ (соответственно 0), если $|x|\geqslant 1$ (соответственно $|x|\leqslant 1/2$). Пусть $j_R(x)=j(x/R)$. Пусть при $z\notin\sigma(H_0)$

$$h(R,z)=\|V(H_0-z)^{-1}F(|x|\geqslant R)\|,$$
$$h_1(R,z)=\|V(H_0-z)^{-1}j_R\|,\quad h_2(R,z)=\|Vj_R(H_0-z)^{-1}\|.$$

(a) Докажите, что $h(R,z)\leqslant h_1(R,z)\leqslant h(R/2,z)$, и выведите отсюда, что $h\in L^1(0,\infty;dR)$ тогда и только тогда, когда $h_1\in L^1$ для того же z.
(b) Используя коммутатор, покажите, что

$$|h_1(R)-h_2(R)|\leqslant C_z R^{-1}h_1(R/2)$$

и что $h_1\in L^1$ тогда и только тогда, когда $h_2\in L^1$ для того же z.
(c) С помощью первой резольвентной формулы покажите, что условие $h_2\in L^1$ не зависит от z.
(d) Пусть V коммутирует с каждой функцией j_R. Докажите, что $h(R,z)$ лежит в L^1 тогда и только тогда, когда $\|F(|x|\geqslant R)V(H_0-z)^{-1}\|$ лежит в L^1.

152. (a) Обобщите формулы (270 п, о, р) на ток, так чтобы иметь возможность рассматривать многокомпонентные поля $\{u_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ и такие V, которые перепутывают компоненты.
(b) **Внутренняя симметрия** имеет вид: $y=x$, $s=t$, V_α есть функция только $\{u_\beta\}$. Выпишите формулу сохраняющейся величины, отвечающей такой симметрии.
(c) Пусть $\mathscr{L}(u)=|u_t|^2-|\nabla u|^2-G(u)$. Предположим, что u может принимать комплексные значения, но G зависит только от $|u|$. Найдите сохраняющуюся величину Q (обычный «заряд»), соответствующую внутренней симметрии $u\longmapsto e^{i\varepsilon}u$.

(d) Пусть u есть n-компонентная функция и $\mathscr{L}(u)=|u_t|^2-|\nabla u|^2-G(u)$. В случае когда $\mathscr{L}$ зависит только от $|u|$, выпишите сохраняющиеся величины при условии, что u вещественнозначна ($O(n)$-симметрия) или комплекснозначна ($U(n)$-симметрия). Предположим, что к $\mathscr{L}$ добавлен нарушающий симметрию член $-F(u_1)$. Вычислите источники, входящие теперь в прежде сохранявшиеся токи.

153. (a) Для уравнения $u_{tt}=\Delta u-|u|^{p-1}u$ пусть k_0 задан формулой (270d), где $u^4/4$ заменено на $(1/(p+1))|u|^{p+1}$. Найдите источник, отвечающий нарушенной конформной инвариантности.

(b) Покажите, что если $p>3$, то $S(u)\leqslant 0$ при $t>0$.

*(c) Докажите аналог теоремы XI.101 при $3<p<5$.

154. Предположим, что $\mathscr{L}(u)$ имеет вид $\partial_0 B_0+\nabla\cdot\mathbf{B}$ с некоторыми локальными функциями B_0, $\mathbf{B}$ от u. Покажите, что каждая функция удовлетворяет соответствующему уравнению Эйлера—Лагранжа.

155. Найдите остальные девять сохраняющихся величин для (270b), т. е. шесть зарядов, отвечающих лоренцевым преобразованиям, и три других конформных заряда.

156. (a) Найдите ток и источник, отвечающие масштабным преобразованиям уравнения $u_{tt}=\Delta u-|u|^{p-1}u$, когда $x\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$. Выберите закон преобразования u так, чтобы $\delta\mathscr{L}=0$ в «свободном» случае, когда $u_{tt}=\Delta u$.

(b) Повторите все это для конформного заряда.