XII. ВОЗМУЩЕНИЕ ТОЧЕЧНЫХ СПЕКТРОВ

В тридцатые годы под расслабляющим влиянием квантовомеханической теории возмущений математический уровень физика-теоретика свелся к рудиментарному владению латинским и греческим алфавитами.

РЕС ЙОСТ

В этой главе мы изучаем следующую общую ситуацию. Оператор H_0 имеет собственное значение E_0, которое мы обычно будем считать лежащим в дискретном спектре. Допустим, что H_0 слегка возмущен, т. е. рассмотрим $H_0+\beta V$, где V — некоторый другой оператор, а β мало по абсолютной величине. Какие собственные значения оператора $H_0+\beta V$ лежат вблизи E_0 и как они соотносятся с V? Каковы их свойства как функций от β? Это обычная ситуация в квантовой механике, где есть *формальные* ряды для возмущенных собственных значений. Эти **ряды Релея — Шредингера** не специфичны для квантовомеханических операторов, но существуют для многих возмущений вида $H_0+\beta V$. Центральное ядро этой главы составляет второй раздел, где обсуждается очень красивая теория регулярных возмущений Като — Реллиха; эта теория дает простые критерии того, что упомянутые формальные ряды имеют ненулевой радиус сходимости. Дальше мы обсудим, что означают ряды теории возмущений, когда они не сходятся или не соотносятся непосредственно с собственными значениями.

XII.1. Конечномерная теория возмущений

Рассмотрим сначала конечномерные матрицы. Это не только позволит нам получить явные формулы для этого простейшего случая, но со временем мы рассмотрим вырожденную теорию возмущений, сводя ее в существенном к конечномерной задаче. Кроме того, уже в конечномерном случае появляется одна серьезная трудность, именно: доказательство аналитичности по β при наличии вырожденного собственного значения. Напомним, что E_0 называется **вырожденным собственным значением**, когда характеристическое уравнение $\det(H_0-\lambda)=0$ для H_0 имеет кратный корень в точке $\lambda = E_0$. В дополнении к этому разделу мы приведем обзор теории матриц с вырожденными собственными значениями и, в частности, обсудим жорданову нормальную форму.

Рассмотрим сначала элементарный пример

$$T(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & -1 \end{pmatrix}.$$

По нашему определению операторнозначных аналитических функций в § VI.3, $T(\beta)$ есть матричнозначная аналитическая функция. Чтобы найти ее собственные значения, нужно только решить вековое, или **характеристическое, уравнение** $\det(T(\beta) - \lambda) = 0$. Собственные значения суть

$$\lambda_{\pm}(\beta) = \pm\sqrt{\beta^2 + 1}.$$

Эта задача имеет несколько характерных черт.

(i) Даже при том, что $T(\beta)$ есть целая функция от β, собственные значения не обладают этим свойством, но как функции от β имеют особенности.

(ii) Эти особенности не лежат на вещественной оси β, где $T(\beta)$ самосопряжен, но появляются при невещественных β, а именно при $\beta = \pm i$. Таким образом, хотя при «физических» значениях β особенностей нет, однако **ряд теории возмущений**, т. е. ряд Тейлора для $\lambda_{\pm}(\beta)$ в окрестности $\beta = 0$, имеет конечный радиус сходимости из-за комплексных особенностей.

(iii) В особых точках β происходит «пересечение уровней», т. е. в $\beta = \pm i$ меньше различных собственных значений, а именно одно, чем в остальных точках, где их два.

(iv) При особых значениях β матрица $T(\beta)$ *не* диагонализуема. В явном виде:

$$T(i)\begin{pmatrix} 2 \\ 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T(i)\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \end{pmatrix},$$

так что матрица $T(i)$ в базисе $\langle 2, 2i\rangle$, $\langle 1, -i\rangle$ есть

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Хотя эта «жорданова аномалия» типична, мы оставим ее обсуждение до Замечаний; см. также задачу 23.

(v) Аналитическое продолжение собственного значения есть собственное значение.

Далее до конца этого раздела мы будем считать, что $T(\beta)$ есть матричнозначная аналитическая функция в связной области R комплексной плоскости. Заметим, что мы не требуем, чтобы $T(\beta)$ была линейна по β. Позднее нам удастся свести бесконечномерную линейную задачу теории возмущений к конечномерной, но уже *не линейной* по β. Таким образом, эта бо́льшая общность окажется принципиально необходимой.

Чтобы найти собственные значения $T(\beta)$, нужно решить вековое уравнение

$$\det(T(\beta)-\lambda)=(-1)^n[\lambda^n+a_1(\beta)\lambda^{n-1}+\ldots+a_n(\beta)]=0.$$

Основная теорема о подобных функциях следующая.

Теорема XII.1. Пусть $F(\beta,\lambda)=\lambda^n+a_1(\beta)\lambda^{n-1}+\ldots+a_n(\beta)$ — полином степени n по λ с единичным коэффициентом при старшей степени и всеми остальными коэффициентами, аналитически зависящими от β. Допустим, что $\lambda=\lambda_0$ есть простой корень $F(\beta_0,\lambda)$. Тогда при β, близком к β_0, вблизи λ_0 существует в точности один корень $\lambda(\beta)$ полинома $F(\beta,\lambda)$ и $\lambda(\beta)$ аналитически зависит от β вблизи $\beta=\beta_0$.

Доказательство. Это частный случай теоремы о неявной функции. Поскольку $F(\beta,\lambda)$ аналитичен вблизи β_0 и λ_0, можно написать $F(\beta,\lambda)=\sum_{m=0}^{n}(\lambda-\lambda_0)^m f_m(\beta)$, причем $f_0(\beta_0)\equiv F(\beta_0,\lambda_0)=0$ и $f_1(\beta_0)\equiv\frac{\partial F}{\partial\lambda}(\beta_0,\lambda_0)\neq 0$, так как λ_0 — простой корень. Стало быть, для того чтобы найти решения уравнения $F(\beta,\lambda)=0$, мы должны лишь решить эквивалентное уравнение

$$\lambda=\lambda_0-\frac{f_0(\beta)}{f_1(\beta)}-\sum_{m=2}^{n}(\lambda-\lambda_0)^m\frac{f_m(\beta)}{f_1(\beta)}. \tag{1}$$

Поскольку $f_1(\beta_0)\neq 0$, все коэффициенты $f_k(\beta)/f_1(\beta)$ аналитичны вблизи $\beta=\beta_0$. Попытаемся решить это последнее уравнение с помощью подстановки вида $\lambda(\beta)=\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\beta-\beta_0)^k$. Коэффициенты α_k можно сосчитать последовательной подстановкой в (1); например,

$$\alpha_1=-\left[\frac{f_0(\beta)}{f_1(\beta)}\right]'\Bigg|_{\beta=\beta_0},$$

$$\alpha_2=-\frac{1}{2}\left[\frac{f_0(\beta)}{f_1(\beta)}\right]''\Bigg|_{\beta=\beta_0}-\alpha_1^2\frac{f_2(\beta_0)}{f_1(\beta_0)}.$$

Нетрудно убедиться, что определяемые рекуррентно коэффициенты α дают степенной ряд с ненулевым радиусом сходимости (задача 1a). Единственность тоже доказывается довольно просто (задача 1b). ∎

Следствие. Пусть $T(\beta)$ — матричнозначная функция, аналитическая вблизи β_0, и допустим, что λ_0 — простое собственное значение $T(\beta_0)$. Тогда

(a) при β, близком к β_0, $T(\beta)$ имеет в точности одно собственное значение $\lambda_0(\beta)$ вблизи λ_0;

(b) $\lambda_0(\beta)$ есть простое собственное значение, если β близко к β_0;

(c) $\lambda_0(\beta)$ аналитично вблизи $\beta=\beta_0$.

Для кратных корней нужен более сложный анализ, однако он остается таким же прямым. Основную теорему для этого случая доказывать мы не будем (доказательство можно найти в ссылках, которые даются в Замечаниях).

Теорема XII.2. Пусть $F(\beta, \lambda)=\lambda^n+a_1(\beta)\lambda^{n-1}+\ldots+a_n(\beta)$ — полином степени n по λ с единичным коэффициентом при старшей степени и всеми остальными коэффициентами, аналитически зависящими от β. Допустим, что $\lambda=\lambda_0$ есть корень $F(\beta_0, \lambda)$ кратности m. Тогда для β вблизи β_0 существует в точности m корней (с учетом кратности) вблизи λ_0 и эти корни суть ветви одной или нескольких многозначных аналитических функций в худшем случае с алгебраической точкой ветвления в $\beta=\beta_0$. Точнее, существуют положительные целые числа $p_1, \ldots, p_k$, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i=m$, и многозначные аналитические функции $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ (не обязательно различные), имеющие сходящиеся ряды **Пюизо** (ряды Тейлора по $(\beta-\beta_0)^{1/p}$)

$$\lambda_i(\beta)=\lambda_0+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j^{(i)}(\beta-\beta_0)^{j/p_i},$$

так что m корней вблизи λ_0 задаются p_1 значениями λ_1, p_2 значениями λ_2 и т. д.

Следствие. Если $T(\beta)$ — матричнозначная функция, аналитическая вблизи β_0, и если λ_0 — собственное значение $T(\beta_0)$ алгебраической кратности m, то для β вблизи β_0 матрица $T(\beta)$ имеет точно m собственных значений (с учетом кратности) вблизи λ_0. Все эти собственные значения суть ветви одной или нескольких многозначных функций, аналитических вблизи β_0, с особенностями — в худшем случае алгебраическими — в точке β_0.

Если A и B самосопряжены, то возмущенные собственные значения оператора $A+\beta B$ аналитичны в точке $\beta=0$, даже когда A имеет вырожденные собственные значения. То, что точки ветвления, допускаемые предыдущей теоремой, в этом случае не появляются, есть содержание теоремы Реллиха. Эта теорема и другая родственная теорема об аналитичности собственных векторов в этом случае — очень глубокие результаты конечномерной теории возмущений. Действительно, пример в начале этого раздела показывает что точки ветвления могут появиться при *невещественных* β даже и для «самосопряженного случая» $T(\beta)^* = T(\bar{\beta})$.

Теорема XII.3 (теорема Реллиха). Предположим, что $T(\beta)$ — матричнозначная аналитическая функция в области R, содержащей отрезок вещественной оси, и что $T(\beta)$ самосопряжена при β на вещественной оси. Пусть λ_0 — собственное значение $T(\beta_0)$ кратности m. Если β_0 *вещественно*, существуют $p \leqslant m$ различных функций $\lambda_1(\beta), \ldots, \lambda_p(\beta)$, *однозначных* и аналитических в окрестности β_0, которые представляют собой *все* собственные значения.

Доказательство. Рассмотрим одну из функций $\lambda_i(\beta)$ из теоремы XII.2:

$$\lambda(\beta) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j (\beta - \beta_0)^{j/p}.$$

Главный факт, которым мы воспользуемся, состоит в том, что каждая ветвь $\lambda(\beta)$ есть собственное значение, так что, в частности, ***каждая ветвь вещественна при вещественных*** β ***вблизи*** β_0. Поэтому

$$\alpha_1 = \lim_{\beta \downarrow \beta_0} (\lambda(\beta) - \lambda_0) |\beta - \beta_0|^{-p^{-1}}$$

вещественно и

$$e^{i\pi/p}\alpha_1 = \lim_{\beta \uparrow \beta_0} (\lambda(\beta) - \lambda_0) |\beta - \beta_0|^{-p^{-1}}$$

вещественно. Значит, если $p \neq 1$, то $\alpha_1 = 0$. По индукции можно показать, что $\alpha_j = 0$, если j/p не целое число. Следовательно, $\lambda(\beta)$ в самом деле аналитична в точке $\beta = \beta_0$. ∎

Теперь мы рассмотрим специальный случай $H(\beta) = H_0 + \beta V$. Допустим, что E_0 — невырожденное собственное значение H_0. Из теоремы XII.1 нам известно, что при малых β оператор $H_0 + \beta V$ имеет единственное собственное значение $E(\beta)$ вблизи E_0 и что $E(\beta)$ аналитична вблизи $\beta = 0$. Коэффициенты соответствующего ряда Тейлора называются **коэффициентами Релея — Шредингера**, а сам этот ряд Тейлора называется **рядом Релея — Шредингера**. Мы можем воспользоваться результатами Дополнения, чтобы найти формулы для коэффициентов. Эти формулы проще, если H_0 самосопряжен, так что ограничимся этим случаем. $E(\beta)$ есть единственное собственное значение $H_0 + \beta V$ вблизи E_0, так что если $|E - E_0| < \varepsilon$ и ε мало, то $E(\beta)$ — единственное собственное значение $H_0 + \beta V$ в круге $\{E \mid |E - E_0| < \varepsilon\}$. Из функционального исчисления следует, что

$$P(\beta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|E-E_0|=\varepsilon} (H_0+\beta V-E)^{-1}\, dE$$

есть проектор на собственный вектор с собственным значением $E(\beta)$. Мы покажем в теореме XII.9, что $(H_0+\beta V-E)^{-1}$ аналитична по β вблизи $\beta=0$. Таким образом, $P(\beta)$ аналитичен по β в точке $\beta=0$. В частности, если Ω_0 есть невозмущенный собственный вектор, то $P(\beta)\Omega_0 \neq 0$ при малых β, так как $P(\beta)\Omega_0 \to \Omega_0$, когда $\beta\to 0$. Так как $P(\beta)\Omega_0$ — ненормированный собственный вектор оператора $H(\beta)$, то

$$E(\beta) = \frac{(\Omega_0,\ H(\beta)\, P(\beta)\, \Omega_0)}{(\Omega_0,\ P(\beta)\, \Omega_0)} = E_0 + \beta\frac{(\Omega_0,\ VP(\beta)\, \Omega_0)}{(\Omega_0,\ P(\beta)\, \Omega_0)}.$$

Эта формула крайне важна в построении теории возмущений и играет критическую роль в рассуждениях § 2—4. Действительно, она показывает, что для того чтобы найти ряд Тейлора для $E(\beta)$, мы должны найти только ряд Тейлора для $P(\beta)$. С этой целью следует найти ряд Тейлора для $(H_0+\beta V-E)^{-1}$ и проинтегрировать его. Но разложение Тейлора для $(H_0+\beta V-E)^{-1}$ есть просто ряд геометрической прогрессии:

$$(H_0+\beta V-E)^{-1} = (H_0-E)^{-1} - \beta(H_0-E)^{-1}V(H_0-E)^{-1} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n\beta^n(H_0-E)^{-1}[V(H_0-E)^{-1}]^n + \ldots\ .$$

Этот ряд не только прост сам по себе, но для него также существует простая форма остаточного члена.

Таким образом, ряд Релея — Шредингера для $E(\beta)$ имеет вид

$$E(\beta) = E_0 + \beta\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\beta^n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\beta^n},$$

где

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i} \oint\limits_{|E-E_0|=\varepsilon} (\Omega_0,\ [V(H_0-E)^{-1}]^{n+1}\,\Omega_0)\, dE,$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i} \oint\limits_{|E-E_0|=\varepsilon} (\Omega_0, (H_0-E)^{-1}[V(H_0-E)^{-1}]^n\,\Omega_0)\, dE.$$

Из-за контурных интегралов и деления двух степенных рядов формулы коэффициентов Релея — Шредингера довольно сложны. Для иллюстрации сосчитаем $E(\beta)$ до порядка β^4. Так как H_0 самосопряжен, можно выбрать базис собственных векторов

$\Omega_0, \ldots, \Omega_{n-1}$ так, что $H\Omega_i = E_i\Omega_i$. Пусть $V_{ij} = (\Omega_i, V\Omega_j)$. Тогда

$$b_0 = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|E-E_0|=\varepsilon}(\Omega_0, (H_0-E)^{-1}\Omega_0)\,dE = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|E-E_0|=\varepsilon}(E_0-E)^{-1}\,dE = 1,$$

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|E-E_0|=\varepsilon}V_{00}(E_0-E)^{-2}\,dE = 0,$$

$$b_2 = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|E-E_0|=\varepsilon}(E_0-E)^{-2}\sum_{i=0}^{n}(E_i-E)^{-1}V_{0i}V_{i0}\,dE.$$

Член с $i=0$ в этой последней сумме совершенно отличен от членов с $i \neq 0$. В самом деле,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|E-E_0|=\varepsilon}(E_0-E)^{-3}\,dE = 0,$$

в то время как

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|E-E_0|=\varepsilon}(E_0-E)^{-2}(E_i-E)^{-1}\,dE = (E_i-E_0)^{-2}.$$

Поэтому

$$b_2 = -\sum_{i\neq 0}(E_i-E_0)^{-2}V_{0i}V_{i0}.$$

Подобным образом,

$$b_3 = \sum_{i\neq 0\neq j}[(E_i-E_0)^{-1}(E_j-E_0)^{-2} + (E_i-E_0)^{-2}(E_j-E_0)^{-1}]V_{0i}V_{ij}V_{j0} - 2\sum_{i\neq 0}(E_i-E_0)^{-3}V_{0i}V_{i0}V_{00}.$$

$$a_0 = V_{00},$$

$$a_1 = -\sum_{i\neq 0}(E_i-E_0)^{-1}V_{0i}V_{i0},$$

$$a_2 = \sum_{i\neq 0\neq j}(E_i-E_0)^{-1}(E_j-E_0)^{-1}V_{0i}V_{ij}V_{j0} - 2\sum_{i\neq 0}(E_i-E_0)^{-2}V_{0i}V_{i0}V_{00},$$

$$a_3 = -\sum_{\substack{i\neq 0\neq j\\ k\neq 0}}(E_i-E_0)^{-1}(E_j-E_0)^{-1}(E_k-E_0)^{-1}V_{0i}V_{ij}V_{jk}V_{k0} + 2\sum_{i\neq 0\neq j}[(E_i-E_0)^{-1}(E_j-E_0)^{-2} + (E_j-E_0)^{-1}(E_i-E_0)^{-2}]V_{00}V_{0i}V_{ij}V_{j0} + 2\sum_{i\neq 0\neq j}(E_i-E_0)^{-2}(E_j-E_0)^{-1}V_{0i}V_{i0}V_{0j}V_{j0} - 3\sum_{i\neq 0}(E_i-E_0)^{-3}V_{0i}V_{i0}V_{00}^2.$$

Итак, если записать $E(\beta)=E_0+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta^n$, мы сосчитали

$$\alpha_1=a_0=V_{00},$$

$$\alpha_2=a_1=-\sum_{i\neq 0}(E_i-E_0)^{-1}V_{0i}V_{i0},$$

$$\alpha_3=a_2-b_2a_0=\sum_{i\neq 0\neq j}(E_i-E_0)^{-1}(E_j-E_0)^{-1}V_{0i}V_{ij}V_{j0}-$$
$$-\sum_{i\neq 0}(E_i-E_0)^{-2}V_{0i}V_{i0}V_{00},$$

$$\alpha_4=a_3-b_3a_0-b_2a_1=$$
$$=-\sum_{\substack{i\neq 0\neq j\\ k\neq 0}}(E_i-E_0)^{-1}(E_j-E_0)^{-1}(E_k-E_0)^{-1}V_{0i}V_{ij}V_{jk}V_{k0}+$$
$$+\sum_{i\neq 0\neq j}[(E_i-E_0)^{-1}(E_j-E_0)^{-2}+$$
$$+(E_i-E_0)^{-2}(E_j-E_0)^{-1}]V_{00}V_{0i}V_{ij}V_{j0}+$$
$$+\sum_{i\neq 0\neq j}(E_i-E_0)^{-2}(E_j-E_0)^{-1}V_{0i}V_{i0}V_{0j}V_{j0}-$$
$$-\sum_{i\neq 0}(E_i-E_0)^{-3}V_{0i}V_{i0}V_{00}^2.$$

Из этих элементарных, но скучных вычислений можно извлечь несколько выводов.

(i) n-й коэффициент Релея — Шредингера α_n существенно сложнее, чем главный член

$$(-1)^{n+1}\sum_{i_1\neq 0,\ i_2\neq 0,\ \ldots,\ i_{n-1}\neq 0}\prod_{j=1}^{n-1}(E_{i_j}-E_0)^{-1}V_{0i_1}V_{i_1i_2}\ \ldots\ V_{i_{n-1}0},$$

вид которого легко угадывается из вида члена второго порядка, знакомого по всем учебникам квантовой механики.

(ii) Знаменатель в $(\Omega_0,\ VP(\beta)\Omega_0)/(\Omega_0,\ P(\beta)\Omega_0)$ не привносит новых трудностей в ряд Тейлора, но фактически приводит к сокращению некоторых членов, уже имеющихся в числителе.

(iii) Наконец, самое главное: члены ряда Тейлора очень сложны, хотя они и происходят из простого ряда. Это подсказывает нам, что простейший объект для изучения есть резольвента: для получения точных теорем относительно $E(\beta)$ в бесконечномерном случае мы будем, как правило, сначала доказывать результаты для резольвенты, а потом получать сведения о собственных значениях при помощи формул, которые определяют собственное значение как отношение контурных интегралов от матричных элементов резольвенты.

В качестве последнего результата в конечномерной теории возмущений будет приведена

Теорема XII.4. Пусть Ω_0 — невырожденный собственный вектор оператора T_0, такой, что $T_0\Omega_0 = E_0\Omega_0$, и пусть $T(\beta)$ — матрично-значная аналитическая функция, причем $T(0) = T_0$. Тогда при малых β существует векторнозначная аналитическая функция $\Omega(\beta)$ удовлетворяющая условию $T(\beta)\Omega(\beta) = E(\beta)\Omega(\beta)$, где $E(\beta)$ — собственное значение $T(\beta)$ вблизи E_0. Более того, если $T(\beta)$ самосопряжен при вещественных β, то $\Omega(\beta)$ можно выбрать так, что $\|\Omega(\beta)\| = 1$ при вещественных β.

Доказательство. Возьмем

$$\psi(\beta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|E-E_0|=\varepsilon} (T(\beta) - E)^{-1}\Omega_0\, dE \equiv P(\beta)\Omega_0.$$

Тогда $\psi(\beta)$ аналитична и является собственным вектором. Так как $\psi(\beta) \to \Omega_0$ при $\beta \to 0$, $(\Omega_0, \psi(\beta)) \neq 0$ при малых β. Пусть $\Omega(\beta) = (\Omega_0, \psi(\beta))^{-1/2}\psi(\beta)$. Тогда $\Omega(\beta)$ нормирован, когда $T(\beta)$ самосопряжен при вещественных β, поскольку в этом случае $(\Omega_0, \psi(\beta)) = (\Omega_0, P(\beta)\Omega_0) = \|\psi(\beta)\|^2$. ∎

В ситуации, описываемой теоремой Реллиха, также можно построить собственные векторы, аналитически зависящие от β; см. задачи 16 и 17.

Дополнение к § XII.1. Алгебраическая и геометрическая кратность собственных значений конечных матриц

Для начала напомним несколько элементарных определений, относящихся к корням алгебраических уравнений.

Определение. Корень λ_0 алгебраического уравнения $F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ называется **невырожденным** или **простым**, если $F'(\lambda_0) \neq 0$. Эквивалентным образом, λ_0 прост, если в разложении $F(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$ точно при одном значении i мы имеем $\lambda_i = \lambda_0$. Говорят, что λ_0 имеет **кратность** m, если $F'(\lambda_0) = \ldots = F^{(m-1)}(\lambda_0) = 0$, $F^{(m)}(\lambda_0) \neq 0$, или, эквивалентным образом, если точно m из λ_i равны λ_0. Собственное значение матрицы называется **простым** или **невырожденным**, если оно является невырожденным корнем векового уравнения. Вообще, **алгебраическая кратность** собственного значения есть его кратность как корня векового, или характеристического, уравнения.

Связь между алгебраической кратностью и геометрической кратностью выясняется из следующего ряда замечаний.