Теорема XII.4. Пусть Ω_0 — невырожденный собственный вектор оператора T_0, такой, что $T_0\Omega_0 = E_0\Omega_0$, и пусть $T(\beta)$ — матричнозначная аналитическая функция, причем $T(0) = T_0$. Тогда при малых β существует векторнозначная аналитическая функция $\Omega(\beta)$ удовлетворяющая условию $T(\beta)\Omega(\beta) = E(\beta)\Omega(\beta)$, где $E(\beta)$ — собственное значение $T(\beta)$ вблизи E_0. Более того, если $T(\beta)$ самосопряжен при вещественных β, то $\Omega(\beta)$ можно выбрать так, что $\|\Omega(\beta)\| = 1$ при вещественных β.

Доказательство. Возьмем

$$\psi(\beta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|E-E_0|=\varepsilon} (T(\beta) - E)^{-1}\Omega_0\, dE \equiv P(\beta)\Omega_0.$$

Тогда $\psi(\beta)$ аналитична и является собственным вектором. Так как $\psi(\beta) \to \Omega_0$ при $\beta \to 0$, $(\Omega_0, \psi(\beta)) \neq 0$ при малых β. Пусть $\Omega(\beta) = (\Omega_0, \psi(\beta))^{-1/2}\psi(\beta)$. Тогда $\Omega(\beta)$ нормирован, когда $T(\beta)$ самосопряжен при вещественных β, поскольку в этом случае $(\Omega_0, \psi(\beta)) = (\Omega_0, P(\beta)\Omega_0) = \|\psi(\beta)\|^2$. ∎

В ситуации, описываемой теоремой Реллиха, также можно построить собственные векторы, аналитически зависящие от β; см. задачи 16 и 17.

Дополнение к § XII.1. Алгебраическая и геометрическая кратность собственных значений конечных матриц

Для начала напомним несколько элементарных определений, относящихся к корням алгебраических уравнений.

Определение. Корень λ_0 алгебраического уравнения $F(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ называется **невырожденным** или **простым**, если $F'(\lambda_0) \neq 0$. Эквивалентным образом, λ_0 прост, если в разложении $F(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$ точно при одном значении i мы имеем $\lambda_i = \lambda_0$. Говорят, что λ_0 имеет **кратность** m, если $F'(\lambda_0) = \ldots = F^{(m-1)}(\lambda_0) = 0$, $F^{(m)}(\lambda_0) \neq 0$, или, эквивалентным образом, если точно m из λ_i равны λ_0. Собственное значение матрицы называется **простым** или **невырожденным**, если оно является невырожденным корнем векового уравнения. Вообще, **алгебраическая кратность** собственного значения есть его кратность как корня векового, или характеристического, уравнения.

Связь между алгебраической кратностью и геометрической кратностью выясняется из следующего ряда замечаний.

(i) Пусть $\mu(\lambda)$—алгебраическая кратность λ. Из основной теоремы алгебры следует, что $\sum_{\lambda\in\mathbb{C}}\mu(\lambda)=n$, если T есть $n\times n$-матрица.

(ii) Пусть $m(\lambda)=\dim\{v\,|\,T(v)=\lambda v\}$ есть **геометрическая кратность**, а соответствующее подпространство есть **геометрическое собственное подпространство.** Тогда $m(\lambda)\leqslant\mu(\lambda)$.

(iii) Если T самосопряжен, то $m(\lambda)=\mu(\lambda)$.

(iv) В общем случае $\mu(\lambda)=\dim\{v\,|\,(T-\lambda)^k v=0$ для некоторого $k\}$. Это пространство называется **обобщенным** или **алгебраическим собственным пространством**, отвечающим λ.

Утверждения (ii) и (iv) становятся очевидными, если известно, что T можно привести к жордановой нормальной форме, т. е. существует базис, в котором T блочно-диагональна:

$$T=\left[\begin{array}{c|c|c|c} T_{\lambda_1} & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & \ddots & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & T_{\lambda_n}\end{array}\right]\qquad T_{\lambda_l}=\begin{bmatrix}\lambda_l & x & 0 & & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_l & x & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_l & x & & 0\\ & \cdots & & & & \\ & \cdots & & & & x\\ & \cdots & & & & \lambda_l\end{bmatrix}$$

где x равен всегда 0 или 1. В этом случае обобщенное собственное пространство $\{v\,|\,(T-\lambda_i)^k v=0\}$ натянуто на $\mu(\lambda_i)$ базисных элементов, ассоциированных с блоком T_{λ_i}, и, очевидно, $\mu(\lambda_i)$—это число, указывающее кратность λ_i как корня уравнения $\det(T-\lambda)=0$.

Из того, что любая матрица T может быть приведена к жордановой нормальной форме, легко также увидеть (см. задачу 2), что если ε выбрано достаточно малым, то

$$P_{\lambda_i}=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_i|=\varepsilon}(T-\lambda)^{-1}\,d\lambda$$

есть проектор на обобщенное собственное пространство, ассоциированное с λ_i, и что $P_{\lambda_i}P_{\lambda_j}=\delta_{ij}P_{\lambda_i}$. На самом деле один из способов установить свойства (i)—(iv) заключается в использовании этих P_{λ_i} (см. задачи 3 и 4).

XII.2. Регулярная теория возмущений

Обратимся теперь к главному результату этой главы и докажем, что при очень широких условиях ряд Релея—Шредингера имеет ненулевой радиус сходимости для возмущений неограниченных операторов в бесконечномерных гильбертовых пространствах. Один из примеров, где эти результаты применимы,—это оператор $H(\beta)=-\Delta+\beta V$ в $\mathbb{R}^3$, где $V\in L^2$ вещественнозначна, а β ве-