(i) Пусть $\mu(\lambda)$—алгебраическая кратность λ. Из основной теоремы алгебры следует, что $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{C}} \mu(\lambda)=n$, если T есть $n\times n$-матрица.

(ii) Пусть $m(\lambda)=\dim\{v\,|\,T(v)=\lambda v\}$ есть **геометрическая кратность**, а соответствующее подпространство есть **геометрическое собственное подпространство.** Тогда $m(\lambda)\leqslant\mu(\lambda)$.

(iii) Если T самосопряжен, то $m(\lambda)=\mu(\lambda)$.

(iv) В общем случае $\mu(\lambda)=\dim\{v\,|\,(T-\lambda)^k v=0$ для некоторого $k\}$. Это пространство называется **обобщенным** или **алгебраическим собственным пространством**, отвечающим λ.

Утверждения (ii) и (iv) становятся очевидными, если известно, что T можно привести к жордановой нормальной форме, т. е. существует базис, в котором T блочно-диагональна:

$$T=\left[\begin{array}{c:c:c:c} T_{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & T_{\lambda_n} \end{array}\right] \qquad T_{\lambda_l}=\begin{bmatrix} \lambda_i & x & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_l & x & & 0 \\ & \cdots & & & & \\ & \cdots & & & & x \\ & \cdots & & & & \lambda_l \end{bmatrix}$$

где x равен всегда 0 или 1. В этом случае обобщенное собственное пространство $\{v\,|\,(T-\lambda_i)^k v=0\}$ натянуто на $\mu(\lambda_i)$ базисных элементов, ассоциированных с блоком T_{λ_i}, и, очевидно, $\mu(\lambda_i)$—это число, указывающее кратность λ_i как корня уравнения $\det(T-\lambda)=0$.

Из того, что любая матрица T может быть приведена к жордановой нормальной форме, легко также увидеть (см. задачу 2), что если ε выбрано достаточно малым, то

$$P_{\lambda_i}=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda-\lambda_i|=\varepsilon}(T-\lambda)^{-1}\,d\lambda$$

есть проектор на обобщенное собственное пространство, ассоциированное с λ_i, и что $P_{\lambda_i}P_{\lambda_j}=\delta_{ij}P_{\lambda_i}$. На самом деле один из способов установить свойства (i)—(iv) заключается в использовании этих P_{λ_i} (см. задачи 3 и 4).

XII.2. Регулярная теория возмущений

Обратимся теперь к главному результату этой главы и докажем, что при очень широких условиях ряд Релея—Шредингера имеет ненулевой радиус сходимости для возмущений неограниченных операторов в бесконечномерных гильбертовых пространствах. Один из примеров, где эти результаты применимы,—это оператор $H(\beta)=-\Delta+\beta V$ в $\mathbb{R}^3$, где $V\in L^2$ вещественнозначна, а β вещественно и положительно. В § XIII.4 мы убедимся, что $\sigma_{ess}(H(\beta)) = [0, \infty)$, а в § XIII.1 — что $\inf \sigma(H(\beta)) \equiv E(\beta)$ есть монотонно убывающая функция β. Если V отрицательна в некоторой области $\mathbb{R}^3$, то $E(\beta)$ будет отрицательным при β, бо́льших некоторого β_0, и, следовательно, в силу результатов о $\sigma_{ess}(H(\beta))$, будет собственным значением. Разумно задать вопрос, будет ли эта «энергия основного состояния» $E(\beta)$ аналитична по β, хотя бы в окрестности интервала (β_0, ∞).

Этот раздел делится на четыре части. (1) Короткое обсуждение дискретных спектров не обязательно самосопряженных операторов. (2) Доказательство аналитичности дискретных собственных значений в невырожденном случае для «аналитических семейств операторов». Это общая теория регулярных возмущений. Она имеет многочисленные приложения в квантовой механике, где собственные значения — это возможные значения энергии. По этой причине мы иногда будем говорить **«энергетический уровень»** вместо «собственное значение». Другое название, которое мы заимствуем из квантовой механики, — **константа связи**. Так мы будем называть переменную β. (3) Два простых критерия (тип (A) и тип (B)) того, что $H_0 + \beta V$ — аналитическое семейство; они позволят применять общую технику к конкретным случаям. (4) Короткое обсуждение вырожденной теории возмущений.

Мы определили дискретный спектр самосопряженного оператора A в § VII.3. Для таких операторов $\lambda \in \sigma_{disc}(A)$ означает, что λ есть изолированная точка $\sigma(A)$ и $\dim P_{\{\lambda\}} < \infty$, где P_Ω — прсекторнозначная мера, ассоциированная с A. В случае общего оператора, очевидно, следует сохранить требование изолированности λ в $\sigma(A)$. Спектральный проектор мы заменим проектором, введенным в § XII.1.

Теорема XII.5. Предположим, что A — замкнутый оператор, и пусть λ — изолированная точка $\sigma(A)$. Точнее, допустим, что $\{\mu \mid |\mu - \lambda| < \varepsilon\} \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$. Тогда

(a) для любого $0 < r < \varepsilon$

$$P_\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\mu-\lambda|=r} (A-\mu)^{-1}\, d\mu$$

существует и не зависит от r;

(b) $P_\lambda^2 = P_\lambda$. Таким образом, P_λ — проектор (*не обязательно ортогональный*).

(c) Если $G_\lambda = \operatorname{Ran} P_\lambda$ и $F_\lambda = \operatorname{Ker} P_\lambda$, то G_λ и F_λ — дополнительные (но не обязательно ортогональные) замкнутые подпространства, т. е. $G_\lambda + F_\lambda = \mathscr{H}$ и $G_\lambda \cap F_\lambda = \{0\}$. Более того, A оставляет инвариантными G_λ и F_λ в следующем точном смысле: $G_\lambda \subset D(A)$, $AG_\lambda \subset G_\lambda$, $F_\lambda \cap D(A)$ плотно в F_λ и $A[F_\lambda \cap D(A)] \subset F_\lambda$.

(d) Если $\psi\in G_\lambda$ и G_λ конечномерно, то $(A-\lambda)^n\psi=0$ для некоторого n. Если $B\equiv A\restriction F_\lambda$, то $\lambda\notin\sigma(B)$.

Доказательство. (a) Мы знаем уже, что $(A-\mu)^{-1}$ есть аналитическая функция на $\mathbb{C}\setminus\sigma(A)\equiv\rho(A)$. Значит, этот интеграл существует как риманов интеграл со значениями в банаховом пространстве. Его независимость от r есть следствие интегральной теоремы Коши.

(b) Пусть $r<R<\varepsilon$. Тогда, пользуясь уравнением для резольвенты, имеем

$$P_\lambda^2=(2\pi i)^{-2}\oint_{|\mu-\lambda|=r}\oint_{|\nu-\lambda|=R}(A-\mu)^{-1}(A-\nu)^{-1}d\nu\,d\mu=$$

$$=(2\pi i)^{-2}\oint_{|\mu-\lambda|=r}\oint_{|\nu-\lambda|=R}(\nu-\mu)^{-1}[(A-\nu)^{-1}-(A-\mu)^{-1}]d\mu\,d\nu=$$

$$=(2\pi i)^{-2}\left[\oint_{|\nu-\lambda|=R}d\nu(A-\nu)^{-1}\oint_{|\mu-\lambda|=r}d\mu(\nu-\mu)^{-1}-\right.$$

$$\left.-\oint_{|\mu-\lambda|=r}d\mu(A-\mu)^{-1}\oint_{|\nu-\lambda|=R}d\nu(\nu-\mu)^{-1}\right]=$$

$$=(2\pi i)^{-2}\left[\oint_{|\nu-\lambda|=R}(A-\nu)^{-1}0d\nu-\oint_{|\mu-\lambda|=r}(2\pi i)(A-\mu)^{-1}d\mu\right]=P_\lambda.$$

(c) То, что $G_\lambda=\operatorname{Ker}(1-P_\lambda)$ и $F_\lambda=\operatorname{Ker}P_\lambda$ суть замкнутые дополнительные подпространства, есть результат элементарной алгебры (см. задачу 6). Пусть $\psi=P_\lambda\psi\in G_\lambda$. Поскольку P_λ задается римановым интегралом, $\psi=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n$, где

$$\psi_n=\sum_{i=1}^{n}c_i^{(n)}(A-\mu_i^{(n)})^{-1}\psi$$

и $c_i^{(n)}$ и $\mu_i^{(n)}$ выбраны так, что суммы сходятся к $-(2\pi i)^{-1}\times$ $\times\oint(A-\mu)^{-1}\psi d\mu$. Простой расчет, основанный на формуле $A(A-\mu)^{-1}=1+\mu(A-\mu)^{-1}$, доказывает, что $\psi_n\to\psi$ и что $\{A\psi_n\}$ есть последовательность Коши. Так как A замкнут, мы заключаем, что $\psi\in D(A)$, и описанная выше процедура приближения показывает, что $A\psi=AP_\lambda\psi=P_\lambda(A\psi)$. Следовательно, $A\psi\in G_\lambda$. Доказательство утверждений относительно $D(A)$ и F_λ мы оставляем читателю.

(d) Предположим, что $A\psi=\nu\psi$. Тогда

$$P_\lambda\psi=(-2\pi i)^{-1}\oint_{|\mu-\lambda|=r}(\nu-\mu)^{-1}\psi\,d\mu=\begin{cases}\psi, & \text{если } \nu=\lambda,\\ 0, & \text{если } \nu\neq\lambda.\end{cases}$$

Отсюда следует, что единственное собственное значение $A\upharpoonright G$ есть λ. Если G_λ конечномерно, то жорданова нормальная форма оператора $C\equiv A\upharpoonright G_\lambda$ имеет единственное λ на диагонали и некоторое количество единиц выше диагонали. Таким образом, $(C-\lambda)^{(\dim G_\lambda)}=0$, т. е. $(A-\lambda)^n\psi=0$ для всех $\psi\in G_\lambda$.

Наконец, положим

$$R_\lambda=(-2\pi i)^{-1}\oint\limits_{|\mu-\lambda|=r}(\lambda-\mu)^{-1}(A-\mu)^{-1}\,d\mu.$$

Проделав вычисления того же типа, что в (b), найдем, что $R\,P_\lambda=P_\lambda R_\lambda$ и $(A-\lambda)R_\lambda=R_\lambda(A-\lambda)=1-P_\lambda$. Равенство $R_\lambda(A-\lambda)=$ $=1-P_\lambda$ имеет смысл операторного тождества на векторах из $D(A)$. Таким образом, R_λ переводит F_λ в себя и $(B-\lambda)R_\lambda=$ $=R_\lambda(B-\lambda)=I\upharpoonright F_\lambda$. ∎

Теперь мы можем определить дискретный спектр.

Определение. Точка $\lambda\in\sigma(A)$ называется **дискретной**, если она изолирована и P_λ (заданный по теореме XII.5) конечномерен; если P_λ одномерен, то мы называем λ **невырожденным** собственным значением.

Читатель должен проверить, что это определение дискретного спектра находится в согласии с определением, данным в гл. VII и VIII, когда A самосопряжен. Заметим, что если λ — невырожденное собственное значение, то любое $\psi\in\operatorname{Ran}P_\lambda$ удовлетворяет $A\psi=\lambda\psi$. Чтобы завершить обсуждение дискретного спектра, докажем теорему, обратную к теореме XII.5.

Теорема XII.6. Пусть A — оператор с $\{\mu\,|\,|\mu-\lambda|=r\}\subset\rho(A)$. Тогда $P=(-2\pi i)^{-1}\oint_{|\mu-\lambda|=r}(A-\mu)^{-1}\,d\mu$ есть проектор. Если его размерность $n<\infty$, то A имеет не более n точек спектра в $\{\mu\,|\,|\mu-\lambda|<r\}$ и каждая из них дискретна. Если $n=1$, то в $\{\mu\,|\,|\mu-\lambda|<r\}$ имеется точно одна спектральная точка и она невырожденна.

Доказательство. Доказательство теоремы XII.5 (b) проходит без всяких изменений и показывает, что P есть проектор, а из доказательства (c) следует, что $G=\operatorname{Ran}P$ и $F=\operatorname{Ker}P$ суть замкнутые дополнительные инвариантные подпространства. Пусть $A_1=A\upharpoonright G$ и $A_2=A\upharpoonright F$. Как при доказательстве теоремы XII.5 (d), убеждаемся, что $\nu\notin\sigma(A_2)$, если $|\nu-\lambda|<r$. Следовательно, $(A-\nu)^{-1}$ существует при таких ν тогда и только тогда, когда существует $(A_1-\nu)^{-1}$. Если G конечномерно, то A_1 имеет собственные значения $\nu_1,\ldots,\nu_k(k\leqslant n)$, так что $\sigma(A)\cap\{\nu\,|\,|\nu-\lambda|<r\}$ есть конечное множество. Чтобы убедиться в том, что каждая точка спектра в этом круге дискретна, заметим, что если P_ν есть спектральный проектор из

теоремы XII.5 и ν лежит внутри круга, то $P_\nu P = PP_\nu = P_\nu$. Следовательно, $\operatorname{Ran} P_\nu \subset \operatorname{Ran} P$, что завершает доказательство. ▮

Закончив таким образом краткое обсуждение дискретных спектров, мы можем перейти к настоящему предмету нашего исследования.

Определение. Операторнозначная функция (возможно, неограниченная) $T(\beta)$ в комплексной области R называется **аналитическим семейством** или **аналитическим семейством в смысле Като** тогда и только тогда, когда

(i) при всяком $\beta \in R$ оператор $T(\beta)$ замкнут и его резольвентное множество непусто;

(ii) при всяком $\beta_0 \in R$ существует некоторое $\lambda_0 \in \rho(T(\beta_0))$, такое, что $\lambda_0 \in \rho(T(\beta))$ при β, близких к β_0, и $(T(\beta)-\lambda_0)^{-1}$ есть аналитическая операторнозначная функция β вблизи β_0.

Если $T(\beta)$ — семейство ограниченных операторов, это определение эквивалентно определению ограниченных операторнозначных аналитических функций (задача 8). Число λ_0 в вышеприведенном определении не играет никакой специальной роли, как показывает следующая

Теорема XII.7. Пусть $T(\beta)$ — аналитическое семейство в области R. Тогда область

$$\Gamma = \{\langle\beta, \lambda\rangle \mid \beta \in R,\ \lambda \in \rho(T(\beta))\}$$

открыта и функция $(T(\beta)-\lambda)^{-1}$, определенная на Γ, есть аналитическая функция двух переменных.

Доказательство. Пусть $\langle\beta_0, \lambda_1\rangle \in \Gamma$, и допустим, что $(T(\beta)-\lambda_0)^{-1}$ существует и аналитична по β при β, близких к β_0. В силу первого резольвентного тождества, $1-(\lambda_1-\lambda_0)(T(\beta_0)-\lambda_0)^{-1}$ имеет обратный оператор, равный $(T(\beta_0)-\lambda_0)(T(\beta_0)-\lambda_1)^{-1}$. Так как множество обратимых операторов в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ открыто, $[1-(\lambda-\lambda_0)(T(\beta)-\lambda_0)^{-1}]$ обратим при λ вблизи λ_1 и β вблизи β_0. При таких $\langle\beta, \lambda\rangle$ оператор $T(\beta)-\lambda$ имеет обратный, равный

$$(T(\beta)-\lambda_0)^{-1}[1-(\lambda-\lambda_0)(T(\beta)-\lambda_0)^{-1}]^{-1},$$

так что $\langle\beta, \lambda\rangle \in \Gamma$. Значит, Γ открыто. Чтобы доказать аналитичность $(T(\beta)-\lambda)^{-1}$, заметим, что $1-(\lambda-\lambda_0)(T(\beta)-\lambda_0)^{-1}$ аналитична при λ вблизи λ_0 и β вблизи β_0 и ее значения принадлежат множеству обратимых операторов. Из одной общей теоремы (задача 9) следует тогда, что $(1-(\lambda-\lambda_0)(T(\beta)-\lambda_0)^{-1})^{-1}$, а следовательно, и $(T(\beta)-\lambda)^{-1}$ аналитична. ▮

Для того чтобы заготовить все нужное для доказательства теоремы Като — Реллиха, остается доказать одну простую техническую лемму.

Лемма. Если P и Q — два (не обязательно ортогональных) проектора и $\dim(\operatorname{Ran} P) \neq \dim(\operatorname{Ran} Q)$, то $\|P-Q\| \geqslant 1$. В частности, если $P(x)$ есть непрерывная проекторнозначная функция x на связном топологическом пространстве, то $\dim(\operatorname{Ran} P(x))$ есть константа.

Доказательство. Без потери общности допустим, что $\dim(\operatorname{Ran} P) < \dim(\operatorname{Ran} Q)$. Положим $F = \operatorname{Ker} P$ и $E = \operatorname{Ran} Q$. Тогда $\dim(F^{\perp}) = \dim(\operatorname{Ran} P) < \dim E$. В результате $F \cap E \neq \{0\}$ (см. задачу 4 к гл. X). Пусть $\psi \neq 0$, $\psi \in F \cap E$. Тогда $P\psi = 0$, $Q\psi = \psi$, так что $\|(P-Q)\psi\| = \|\psi\|$. Отсюда следует, что $\|P-Q\| \geqslant 1$. Последнее утверждение леммы следует из элементарного рассуждения, основанного на связности. ■

Теорема XII.8 (теорема Като — Реллиха). Пусть $T(\beta)$ — аналитическое семейство в смысле Като. Пусть E_0 — невырожденное собственное значение $T(\beta_0)$. Тогда при β, близком к β_0, существует в точности одна точка $E(\beta) \in \sigma(T(\beta))$ вблизи E_0 и эта точка изолирована и невырожденна. $E(\beta)$ есть аналитическая функция β при β, близких к β_0, и существует аналитический собственный вектор $\Omega(\beta)$ при β вблизи β_0. Если при вещественных $\beta - \beta_0$ оператор $T(\beta)$ самосопряжен, то $\Omega(\beta)$ можно выбрать так, что он будет нормирован при вещественных $\beta - \beta_0$.

Доказательство. Выберем ε таким, что единственной точкой из $\sigma(T(\beta_0))$ внутри $\{E \mid |E-E_0| \leqslant \varepsilon\}$ будет E_0. Так как окружность $\{E \mid |E-E_0| = \varepsilon\}$ компактна, а множество Γ из последней теоремы открыто, можно выбрать такое δ, что $E \notin \sigma(T(\beta))$ при $|E-E_0| = \varepsilon$ и $|\beta-\beta_0| \leqslant \delta$. Положим $N = \{\beta \mid |\beta-\beta_0| \leqslant \delta\}$.
Тогда

$$P(\beta) = -(2\pi i)^{-1} \oint_{|E-E_0|=\varepsilon} (T(\beta)-E)^{-1}\, dE$$

существует и аналитичен при $\beta \in N$. Из невырожденности E_0 как собственного значения $T(\beta_0)$ следует, что $P(\beta_0)$ одномерен. В силу последней леммы отсюда вытекает, что $P(\beta)$ одномерен при всех $\beta \in N$. Следовательно, по теореме XII.6, существует точно одно собственное значение $E(\beta)$ оператора $T(\beta)$, такое, что $|E(\beta)-E_0| < \varepsilon$ при $\beta \in N$, и это собственное значение невырожденно. Аналитичность $E(\beta)$ следует из формулы

$$(E(\beta) - E_0 - \varepsilon)^{-1} = \frac{(\Omega_0, (T(\beta) - E_0 - \varepsilon)^{-1} P(\beta)\,\Omega_0)}{(\Omega_0,\ P(\beta)\,\Omega_0)}.$$

Мы получим аналитический собственный вектор, выбирая $\Omega(\beta) = P(\beta)\,\Omega_0$ или

$$\Omega(\beta) = (\Omega_0,\ P(\beta)\,\Omega_0)^{-1/2}\, P(\beta)\,\Omega_0$$

в вещественном случае, где Ω_0 — невозмущенный собственный вектор. ▮

Итак, мы видим, как просто доказывается аналитичность энергетических уровней по константе связи, *коль скоро* нам известно, что $T(\beta)$ — аналитическое семейство. В этом не было бы большой пользы, если бы мы не располагали удобными критериями аналитичности $T(\beta)$. По счастью, есть два очень простых таких критерия, отражающих обычный дуализм оператор — форма. Мы подробно обсудим операторный критерий и кратко критерий в терминах форм.

Определение. Пусть R — связная область в комплексной плоскости, и пусть для каждого $\beta \in R$ задан $T(\beta)$ — замкнутый оператор с непустым резольвентным множеством. Будем говорить, что **$T(\beta)$ — аналитическое семейство типа (А)**, тогда и только тогда, когда

(i) операторная область определения $T(\beta)$ есть некоторое множество D, независимое от β;

(ii) $T(\beta)\psi$ есть векторнозначная аналитическая функция β для всякого $\psi \in D$.

Разумеется, каждое семейство типа (А) есть аналитическое семейство в смысле Като. Общий случай этой теоремы мы рассмотрим в задачах, а здесь займемся лишь линейным случаем $T(\beta) = H_0 + \beta V$. Сначала мы докажем лемму, которая интересна сама по себе, так как она представляет собой удобный признак того, что семейство функций есть семейство типа (А).

Лемма. Пусть H_0 — замкнутый оператор с непустым резольвентным множеством. Определим $H_0 + \beta V$ на $D(H_0) \cap D(V)$. Тогда $H_0 + \beta V$ есть аналитическое семейство типа (А) вблизи $\beta = 0$ в том и только том случае, когда

(a) $D(V) \supset D(H_0)$;

(b) для некоторых a и b и для всех $\psi \in D(H_0)$

$$\|V\psi\| \leqslant a\|H_0\psi\| + b\|\psi\|.$$

Таким образом, $H_0 + \beta V$ типа (А) тогда и только тогда, когда V H_0-ограничен в смысле § X.2.

Доказательство. Предположим сначала, что $H_0 + \beta V$ — аналитическое семейство типа (А). Тогда $D(H_0) = D(H_0 + \beta V) = D(H_0) \cap D(V)$, так что (а) выполнено. Так как H_0 замкнут, то $D(H_0)$ с нормой $|||\psi||| = \|H_0\psi\| + \|\psi\|$ есть банахово пространство $\hat{D}$. Фиксируем малое положительное β, так чтобы β и $-\beta$ оба находились в области аналитичности. Отображение $H_0 + \beta V\colon \hat{D} \to \mathscr{H}$ всюду определено и обладает в $\hat{D} \times \mathscr{H}$ замкнутым графиком, поскольку этот график замкнут в $\mathscr{H}\times\mathscr{H}$ в более слабой топологии. Следовательно, по теореме о замкнутом графике,

$$\|(H_0+\beta V)\psi\|\leqslant a_1|||\psi||| \quad \text{и} \quad \|(H_0-\beta V)\psi\|\leqslant a_2|||\psi|||.$$

Отсюда

$$\|V\psi\|\leqslant(2\beta)^{-1}[\|(H_0+\beta V)\psi\|+\|(H_0-\beta V)\psi\|]\leqslant(2\beta)^{-1}(a_1+a_2)|||\psi|||,$$

так что условие (b) тоже выполнено.

Теперь, напротив, допустим, что (a) и (b) выполнены. Тогда для $\psi\in D(H_0)$

$$\|H_0\psi\|\leqslant\|(H_0+\beta V)\psi\|+|\beta|\|V\psi\|\leqslant$$
$$\leqslant\|(H_0+\beta V)\psi\|+|\beta|a\|H_0\psi\|+|\beta|b\|\psi\|.$$

Значит, если $|\beta|<a^{-1}$, имеем

$$\|H_0\psi\|\leqslant(1-|\beta|a)^{-1}\|(H_0+\beta V)\psi\|+(1-|\beta|a)^{-1}b|\beta|\|\psi\|.$$

Следовательно, $H_0+\beta V$ замкнут на $D(H_0)$, поскольку если $\psi_n\to\psi$ в $\mathscr{H}$, причем $\psi_n\in D(H_0)$ и $(H_0+\beta V)\psi_n$ — последовательность Коши, то и $H_0\psi_n$ есть последовательность Коши вследствие приведенного выше неравенства и, значит, $\psi\in D(H_0)$. То, что $(H_0+\beta V)\psi$ аналитична для $\psi\in D(H_0)$, очевидно. ∎

Из этого доказательства вытекает, что если V бесконечно мал относительно H_0, то $H_0+\beta V$ есть *целое* семейство типа (A).

Пример 1. Пусть $V\in L^2(\mathbb{R}^3)+L^\infty(\mathbb{R}^3)$, и пусть $H_0=-\Delta$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$. В более общей постановке пусть $V=\sum V_{ij}$ с $V_{ij}\in L^2+L^\infty$ и $H_0=-\Delta$ на $L^2(\mathbb{R}^{3n})$. Тогда $H_0+\beta V$ есть целое аналитическое семейство типа (A).

Пример 2. Можно показать, что если $V\ll H_0$ и $W\ll H_0$, то $W\ll H_0+V$ (задача 11). Поэтому, положив $H_0=-\Delta_1-\Delta_2-$ $-2/r_1-2/r_2$ на $L^2(\mathbb{R}^6)$ и $V=|r_1-r_2|^{-1}$, мы увидим, что $H_0+\beta V$ есть аналитическое семейство типа (A). В приближении бесконечной массы ядра H_0+V представляет собой гамильтониан атома гелия (кинематика разобрана в § XI.5).

Теорема XII.9. Пусть $H_0+\beta V$ — аналитическое семейство типа (A) в некоторой области R. Тогда $H_0+\beta V$ — аналитическое семейство в смысле Като. В частности, если $0\in R$ и если E_0 — изолированное невырожденное собственное значение H_0, то существует единственная точка $E(\beta)\in\sigma(H_0+\beta V)$ вблизи E_0 и для малых $|\beta|$, которая является изолированным невырожденным собственным значением. Более того, $E(\beta)$ аналитична вблизи $\beta=0$.

Доказательство. Поскольку аналитичность — свойство локальное, допустим, что $0\in R$, и докажем аналитичность в смысле Като вблизи $\beta=0$. Выберем $\lambda \notin \sigma(H_0)$. Тогда $(H_0-\lambda)^{-1}$ и $H_0(H_0-\lambda)^{-1}=1+\lambda(H_0-\lambda)^{-1}$ ограничены. Значит, для любого $\varphi \in \mathscr{H}$

$$\|V(H_0-\lambda)^{-1}\varphi\| \leqslant a\|H_0(H_0-\lambda)^{-1}\varphi\|+b\|(H_0-\lambda)^{-1}\varphi\| \leqslant$$
$$\leqslant (a\|H_0(H_0-\lambda)^{-1}\|+b\|(H_0-\lambda)^{-1}\|)\|\varphi\|.$$

Следовательно, $V(H_0-\lambda)^{-1}$ ограничен; значит, для малых β обратный $[1+\beta V(H_0-\lambda)^{-1}]^{-1}$ существует и аналитичен по β (поскольку задается геометрическим рядом). Прямое вычисление (задача 12) показывает, что $(H_0-\lambda)^{-1}[1+\beta V(H_0-\lambda)^{-1}]^{-1}$ есть оператор, обратный к $(H_0+\beta V-\lambda)$, так что при малых β имеем $\lambda \notin \sigma(H_0+\beta V)$ и $(H_0+\beta V-\lambda)^{-1}$ аналитичен по β. Это доказывает, что $H_0+\beta V$ есть аналитическое семейство в смысле Като вблизи $\beta=0$. Записывая теперь $H_0+\beta V=(H_0+\beta_0 V)+(\beta-\beta_0)V$, докажем аналитичность в $\beta=\beta_0$. ∎

Пример 1 (заново). Из теорем X.15 и XII.9 вытекает, что $E_0(\beta)$ — наименьшее собственное значение оператора $-\Delta+\beta V$ — есть аналитическая функция β в окрестности (β_0, ∞), где $\beta_0=\inf\{\beta>0 \mid E_0(\beta)<0\}$. Применяя теорему XII.9, мы предполагаем невырожденность основного состояния, что будет доказано в § XIII.12.

Пример 2 (заново). Для оператора $h \equiv -\Delta_1-2/r_1$ задача о собственных значениях решается точно. Его наименьшее собственное значение есть $E=-1$. Оператор H_0 имеет вид $h\otimes 1+1\otimes h$ на $L^2(\mathbb{R}^3)\otimes L^2(\mathbb{R}^3)=L^2(\mathbb{R}^6)$, так что энергия основного состояния этого оператора равна -2. Для малых $|\beta|$ энергия основного состояния $E(\beta)$ аналитична, и ее коэффициенты Тейлора при $\beta=0$ задаются формулой Релея — Шредингера, обсуждавшейся в § 1.

Физически нас интересует энергия $E(1)$ основного состояния атома гелия. Немедленно возникает вопрос, имеет ли ряд Тейлора для $E(\beta)$ в точке $\beta=0$ радиус сходимости, бóльший 1. В теореме XII.11 мы получим прямые нижние оценки на радиус сходимости ряда Релея — Шредингера, однако они будут грубыми, и мы не сумеем непосредственно воспользоваться ими для доказательства того, что $\beta=1$ находится внутри круга сходимости. Возможно, с помощью тяжких трудов удастся показать, что $\beta=1$ действительно лежит внутри круга сходимости (мы думаем, что это так), но ведь вопрос этот совершенно академический! В самом деле, при $\beta=1$, даже если ряд сходится, нужно огромное число членов, для того чтобы хорошо приблизить $E(1)$, а коэффициенты Релея — Шредингера высшего порядка очень трудно считать. Так, например, приближение первого порядка $(\Omega_0, V\Omega_0)$ для разности $E(1)-E(0)$ расходится с экспериментом примерно на 15%. Оказывается, другие методы, которые мы рассмотрим в

§ XIII.2, позволяют получить совпадение с экспериментом с точностью, лучшей чем 1% (а если учесть различные релятивистские поправки, то даже с точностью до одной миллионной). Однако при малых β теория возмущений точнее. Оказывается, энергия основного состояния Li^+ прямо связана с $E(4/9)$ и задается приближением первого порядка с точностью до 5%. Значение $E(1/4)$, которое связано с энергией основного состояния Be^{++}, задается этим приближением с точностью до 2%.

Пример 3 (сверхтонкая структура атома водорода). С теорией возмущений связано одно из самых поразительных достижений квантовой физики в смысле совпадения теории с экспериментом. В обычной модели атома водорода есть один энергетический уровень около —13 эВ, энергия основного состояния. Но в реальном атоме есть два уровня; это расщепление обязано своим происхождением взаимодействию между магнитными моментами электрона и протона. Излучение, вызванное переходом между этими уровнями, наблюдают радиоастрономы, изучая межгалактические газовые облака, и именно этот переход доминирует в водородном мазере. По этой последней причине разность энергий между этими уровнями очень точно измерена. В единицах с $\hbar=1$, когда ΔE измеряется в герцах (Гц) = число колебаний в секунду, эта разность равна

$$\Delta E\,(1s_{1/2}) = 1\,420\,405\,751,800 \text{ Гц}.$$

Существует старая теория магнитных взаимодействий, принадлежащая Ферми и Сегре и основанная на классических моделях взаимодействующих магнитов. В потенциал Ферми—Сегре входит константа связи β, составленная из фундаментальных постоянных (магнитные моменты электрона и протона, электрический заряд), спин-спиновое взаимодействие и множитель $\rho(r)$ — эффективное распределение заряда протона. На практике $\rho(r)$ аппроксимируется δ-функцией, и, таким образом, этот случай технически оказывается за пределами той математической теории, которой мы занимаемся, однако гладкая функция $\rho(r)$ с пиком в нуле может быть включена в нашу теорию и приводит примерно к тому же результату в низшем порядке теории возмущений.

При сравнении теории с экспериментом возникает интересная задача. Физические постоянные, которые требуются, чтобы сосчитать β, известны лишь с точностью до 10^{-5} или 10^{-6}, а $\Delta E\,(1s_{1/2}) = \beta a_1 + \beta^2 a_2 + \ldots$, где $\beta \approx 10^{-4}$ и a_1, a_2, измеренные в единицах энергии основного состояния водорода, порядка 1. Для действительно аккуратного сравнения с экспериментом рассматривается еще сверхтонкое расщепление первого возбужденного состояния $\Delta E\,(2s_{1/2}) = \beta b_1 + \beta^2 b_2$. Теперь, если посмотреть на отношение $\Delta E\,(2s_{1/2})/\Delta E\,(1s_{1/2})$ то, поскольку уже само β порядка 10^{-4}, ошибка в β в шестом знаке приводит к ошибке в $(a_1+\beta a_2)/(b_1+\beta b_2)$ только в десятом знаке! Эксперимент дает

$$\frac{\Delta E\,(2s_{1/2})}{\Delta E\,(1s_{1/2})}=\frac{1}{8}\,(1{,}000\,034\,495).$$

Теория Ферми — Сегре (с релятивистскими поправками) в низшем порядке теории возмущений дает

$$\frac{\Delta E\,(2s_{1/2})}{\Delta E\,(1s_{1/2})}=\frac{1}{8}\,(1{,}000\,034\,45).$$

Еще лучшее согласие было бы даже странным, так как этот расчет не принимает во внимание конечного размера ядра, поправок за счет сильных взаимодействий и т. п.

Вернемся теперь к общим критериям того, что линейная функция $H_0+\beta V$ будет аналитическим семейством в смысле Като. Есть признак в терминах форм, совершенно аналогичный операторному определению семейства типа (А). **Аналитическое семейство типа (b)** есть семейство замкнутых строго m-секториальных форм $q(\beta)$, по одной для каждого β в некоторой области R комплексной плоскости, таких, что

(i) область определения формы $q(\beta)$ есть некоторое подпространство F, независимое от β;

(ii) $(\psi, q(\beta)\psi)$ есть аналитическая функция β в R для любого $\psi\in F$.

Если $q(\beta)$ — аналитическое семейство типа (b), то всякому $\beta\in R$ по теореме VIII.16 отвечает единственный замкнутый оператор $T(\beta)$. Операторы $T(\beta)$ называются **аналитическим семейством типа (B)**. Как и для типа (А), всякое аналитическое семейство типа (B) есть аналитическое семейство в смысле Като, и $H_0+\beta V$, определенный в смысле формы на $Q(H_0)\cap Q(V)$, задает аналитическое семейство типа (B) вблизи $\beta=0$ тогда и только тогда, когда V H_0-ограничен как форма.

Методами, связанными с критерием типа (B), можно воспользоваться для расширения результатов, которые мы обсудили в примере 1 выше, на потенциалы из класса Рольника $R+L^\infty$. Методы типа (B) приводят к свойствам сильной аналитичности $H_0+\beta V$, если H_0 и V положительны:

Теорема XII.10. Пусть H_0 положителен и самосопряжен, и пусть V самосопряжен. Положим $V_+={}^1/_2(V+|V|)$; $V_-={}^1/_2(|V|-V)$. Предположим, что

(i) $Q(V_+)\cap Q(H_0)$ плотно;

(ii) V_- H_0-ограничен как форма с относительной гранью нуль.

Тогда $H_0+\beta V$ есть аналитическое семейство типа (B) в плоскости с разрезом $\{\beta\,|\,\beta\notin(-\infty,0]\}$.

Ссылки на литературу, содержащую доказательство этой теоремы, можно найти в Замечаниях.

Пример 4. Из обсуждения в § XIII.12 будет следовать, что основное состояние оператора $-d^2/dx^2+x^2+\beta x^4$ невырожденно, если $\beta>0$. Поэтому теорема XII.10 утверждает, что энергия его основного состояния $E(\beta)$ аналитична в окрестности положительной вещественной полуоси.

Существуют примеры аналитических семейств, не принадлежащие ни к типу (А), ни к типу (В). Например, пусть $T(\beta)$ есть аналитическое семейство типа (А), и пусть C — любой ограниченный самосопряженный оператор. Тогда $U(\beta)=\exp(i\beta C)$ есть целая аналитическая функция. Нетрудно убедиться что $\tilde{T}(\beta)=U(\beta)T(\beta)U(\beta)^{-1}$, определенный на $U(\beta)D$, задает аналитическое семейство. Однако C и T могут быть выбраны так, что ни $D(\tilde{T}(\beta))$, ни $Q(\tilde{T}(\beta))$ не постоянны.

Мы хотим сделать несколько замечаний, причем некоторые из них — это предупреждения о возможных западнях. Во-первых, заметим, что, как и в § 1, имеются явные формулы для коэффициентов ряда Тейлора для $E(\beta)$, задаваемые контурными интегралами от резольвенты. Если H_0 имеет чисто дискретный спектр, то можно проинтегрировать и получить такие же формулы, как в предыдущем разделе. Если H_0 самосопряжен, то опять можно взять эти контурные интегралы и получить спектральные интегралы вместо сумм; например, если E_0 — изолированное невырожденное собственное значение H_0, так что $\operatorname{dist}(E_0, \sigma(H_0)\setminus E_0)>\varepsilon$, то

$$\alpha_2=-\int\limits_{|\lambda-E_0|>\varepsilon}(\lambda-E_0)^{-1}\,d(V\Omega_0, P_\lambda V\Omega_0).$$

Во-вторых, мы предупреждаем читателя, что степенной ряд $E(\beta)$ может иметь больший радиус сходимости, чем круг, в котором $H(\beta)$ имеет в качестве собственного значения $E(\beta)$.

Пример 5. Пусть $H_0=-\Delta-1/r$ и $V=1/r$. Тогда собственные значения оператора $H_\beta=H_0+\beta V$ при малых β суть $-{}^1/_4 n^{-2}(1-\beta)^2$, $n=1, 2, \ldots$. В частности, энергия основного состояния ($n=1$) $E_0(\beta)=-{}^1/_4+{}^1/_2\,\beta-{}^1/_4\,\beta^2$ задается функцией, имеющей аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость. Но при $\beta>1$ оператор H_β вообще не имеет собственных значений!

Значит, одна из черт конечномерной теории отсутствует: вообще говоря, аналитическое продолжение собственного значения не обязано быть собственным значением. Однако в одном важном специальном случае можно доказать, что аналитическое продолжение собственного значения есть собственное значение (см. задачу 13).

Наконец, отметим, что можно получить явные нижние оценки радиуса сходимости ряда Тейлора:

Теорема XII.11. Предположим, что $\|V\varphi\| \leqslant a\|H_0\varphi\| + b\|\varphi\|$. Пусть H_0 самосопряжен и имеет изолированное невырожденное собственное значение E_0 и пусть $\varepsilon = {}^1/_2 \operatorname{dist}(E_0, \sigma(H_0)\diagdown\{E_0\})$. Определим

$$r(a, b, E_0, \varepsilon) = [a + \varepsilon^{-1}[b + a(|E_0| + \varepsilon)]]^{-1}.$$

Тогда собственное значение $E(\beta)$ оператора $H_0 + \beta V$ вблизи E_0 аналитично в круге радиуса $r(a, b, E_0, \varepsilon)$.

В задаче 14 от читателя требуется доказать эту теорему.

* *
*

Последний вопрос регулярной теории возмущений, который мы обсудим,— это случай, когда E_0 есть изолированное вырожденное собственное значение $T(\beta_0)$ с конечной кратностью. Учитывая опыт конечномерного случая, мы будем предполагать, что $T(\beta)$ самосопряжен при вещественных β. Если $T(\beta)$ — семейство Като, то мы без затруднений докажем, что $P(\beta) = (-2\pi i)^{-1}\oint (T(\beta) - E)^{-1}\, dE$ аналитичен по β, когда β лежат около β_0. Мы сталкиваемся, таким образом, с задачей нахождения собственных значений $H(\beta)$, суженного на *переменное* конечномерное подпространство $\operatorname{Ran} P(\beta)$. Чтобы свести это к истинно конечномерной задаче, нам потребуется следующий технический результат Като, имеющий также и другие приложения (см. задачи 15 и 17).

Теорема XII.12. Пусть R — связная односвязная область комплексной плоскости, содержащая 0. Пусть $P(\beta)$ — проекторнозначная аналитическая функция в R. Тогда существует аналитическое семейство $U(\beta)$ обратимых операторов со свойством

$$U(\beta)P(0)U(\beta)^{-1} = P(\beta).$$

Более того, если $P(\beta)$ самосопряжен при вещественных β в R, то $U(\beta)$ может быть выбран унитарным для вещественных β.

Доказательство мы отложим до конца этого раздела.

Теорема XII.13. Пусть $T(\beta)$ — аналитическое семейство в смысле Като при β вблизи 0, т. е. $T(\beta)$ самосопряжен при вещественных β. Пусть E_0 — дискретное собственное значение кратности m. Тогда существуют m не обязательно различных однозначных функций, аналитических вблизи $\beta = 0$: $E^{(1)}(\beta)$, ..., $E^{(m)}(\beta)$ с $E^{(k)}(0) = E_0$, таких, что эти функции суть собственные значения $T(\beta)$ при β вблизи нуля (индексы у $E^{(1)}(0)$, ..., $E^{(m)}(0)$ указывают на вырождение собственного значения). Более того, это единственные собственные значения вблизи E_0.

Доказательство. Так как E_0 — изолированная точка в $\sigma(T(0))$, а $T(\beta)$ — аналитическое семейство, то $P(\beta) = (-2\pi i)^{-1} \times \times \oint (T(\beta)-E)^{-1}\,dE$ существует и аналитичен по β при малых β. Из доказательства теоремы XII.6 видно, что

$$\sigma(T(\beta) \restriction \operatorname{Ran} P(\beta)) = \sigma(T(\beta)) \cap \{E \mid |E-E_0| < \varepsilon\}.$$

Из теоремы XII.12 мы знаем, что существует семейство $U(\beta)$, аналитическое вблизи $\beta=0$, унитарное при вещественных β и такое, что $U(\beta)P(0)U(\beta)^{-1}=P(\beta)$. Пусть $\tilde{T}(\beta)=U(\beta)^{-1}T(\beta)U(\beta)$. Тогда $\operatorname{Ran} P(0)$ есть инвариантное подпространство для всех таких $\tilde{T}(\beta)$. Следовательно, $S(\beta) \equiv \tilde{T}(\beta) \restriction \operatorname{Ran} P(0)$ есть конечномерное аналитическое семейство операторов, самосопряженных при вещественных β. Утверждение теоремы теперь вытекает из теоремы Реллиха (теорема XII.3). ∎

Так как мы свели бесконечномерную задачу к конечномерной, то из существования аналитических собственных векторов в конечномерном случае вытекает их существование и в бесконечномерном случае.

Пример 1 (заново). Если $H_0+\beta_0 V$ имеет n собственных значений в $(-\infty, 0)$, то $H_0+\beta V$ имеет по меньшей мере n собственных значений при малых $|\beta-\beta_0|$, и те из них, которые лежат вблизи собственных значений $H_0+\beta_0 V$, аналитичны по β вблизи β_0.

Наконец, докажем теорему XII.12. Идею доказательства мы получим, дифференцируя $U(\beta)P(0)U(\beta)^{-1}=P(\beta)$. Найдем $P'(\beta)=[U'(\beta)U(\beta)^{-1},\ P(\beta)]$, где $[A,\ B]=AB-BA$. Итак, мы ищем оператор $Q(\beta)$, удовлетворяющий условию $P'(\beta)=[Q(\beta),\ P(\beta)]$, а затем решаем дифференциальное уравнение $U'(\beta) = Q(\beta)U(\beta)$.

Лемма. Пусть R есть связное односвязное подмножество $\mathbb{C}$, такое, что $0 \in R$, и пусть $A(\beta)$ — аналитическая функция на R со значениями во множестве ограниченных операторов на некотором банаховом пространстве X. Тогда для любого $x_0 \in X$ существует единственная функция $f(\beta)$, аналитическая в R и со значениями в X, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{d}{d\beta} f(\beta) = A(\beta) f(\beta), \qquad f(0)=x_0. \tag{2}$$

Доказательство. Согласно стандартным методам аналитического продолжения, достаточно предположить, что R есть круг радиуса r_0, и показать, что аналитическое решение существует внутри

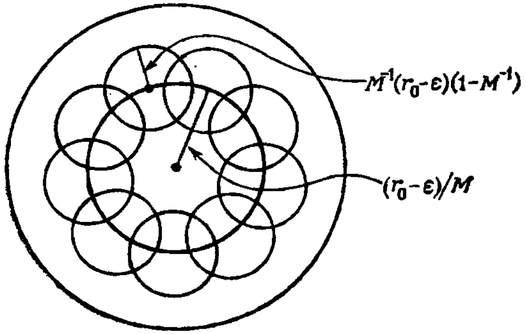

Рис. XII.1.

круга радиуса $r_0-2\varepsilon$ с любым ε. Заметим сначала, что единственность следует из (2): если $f(\beta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n\beta^n$ и $A(\beta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n\beta^n$, то

$$f_0=x_0, \tag{3a}$$

$$f_n=n^{-1}\left[\sum_{k=0}^{n-1} A_k f_{n-1-k}\right]. \tag{3b}$$

Теперь покажем, что если f_n определены формулами (3), то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n\beta^n$ сходится при $|\beta|<r_0-2\varepsilon$. Пусть $M=\max\{1+\|A(\beta)\| \mid |\beta|\leqslant r_0-\varepsilon\}$. В силу интегральной формулы Коши $\|A_n\|<M(r_0-\varepsilon)^{-n}$. Простая индукция, основанная на (3), показывает, что $\|f_n\|<(M(r_0-\varepsilon)^{-1})^n\|x_0\|$. Следовательно, $f(\beta)$ аналитична в круге радиуса $(r_0-\varepsilon)/M$. Повторяя ту же аргументацию в точке β, такой, что $|\beta|$ близок к $(r_0-\varepsilon)/M$, можно доказать, что f аналитична в круге радиуса $(r_0-\varepsilon)M^{-1}+M^{-1}(r_0-\varepsilon)\times(1-M^{-1})$. (См. рис. XII.1.) После конечного числа повторений мы получим аналитичность в круге радиуса $r_0-2\varepsilon$. ■

Доказательство теоремы XII.12. Мы разделим доказательство на четыре части.

(i) Пусть $Q(\beta)=[P'(\beta), P(\beta)]$. Имеем $P^2(\beta)=P(\beta)$, так что

$$P'(\beta)=P'(\beta)P(\beta)+P(\beta)P'(\beta). \tag{4}$$

Следовательно, $P(\beta)P'(\beta)P(\beta)=2P(\beta)P'(\beta)P(\beta)$, т. е. $P(\beta)\times P'(\beta)P(\beta)=0$. В результате

$$[Q(\beta), P(\beta)]=P'(\beta)P(\beta)+P(\beta)P'(\beta)-2P(\beta)P'(\beta)P(\beta)=P'(\beta)$$

в силу (4).

(ii) Пользуясь леммой с $X=\mathscr{L}(\mathscr{H})$, решим уравнения $dU/d\beta=Q(\beta)U(\beta)$ и $dV/d\beta=-V(\beta)Q(\beta)$ с начальными условиями

$U(0) = 1 = V(0)$. Тогда $U(\beta)V(\beta) = V(\beta)U(\beta) = 1$; в частности, $U(\beta)$ обратим. В самом деле,

$$\frac{d}{d\beta}(V(\beta)U(\beta)) = \frac{dV}{d\beta}U(\beta) + V(\beta)\frac{dU}{d\beta} = 0,$$

и, следовательно, $VU \equiv 1$. С другой стороны, если $F(\beta) = U(\beta)V(\beta)$, то $F(\beta)$—решение дифференциального уравнения $dF/d\beta = Q(\beta)F(\beta) - F(\beta)Q(\beta)$; $F(0) = 1$. Поскольку $F(\beta) \equiv 1$ есть решение этого уравнения с данным начальным условием, мы заключаем, что вследствие единственности решения, доказанной в лемме, $F(\beta) = 1$.

(iii) $U(\beta)P(0)V(\beta) = P(\beta)$. В самом деле, положим $\tilde{P}(\beta) = U(\beta)P(0)V(\beta)$. Тогда $d\tilde{P}(\beta)/d\beta = [Q(\beta), \tilde{P}(\beta)]$ с начальным условием $\tilde{P}(0) = P(0)$. Но, с другой стороны, согласно (i), $P(\beta)$ есть также решение уравнения $dP(\beta)/d\beta = [Q(\beta), P(\beta)]$ с $P(\beta)|_{\beta=0} = P(0)$. В силу единственности решения дифференциального уравнения, $\tilde{P}(\beta) = P(\beta)$.

(iv) Наконец, мы должны доказать, что $U(\beta)$ унитарен при вещественных β, если $P(\beta)$ самосопряжен при вещественных β. Допустим, что $P(\beta)^* = P(\beta)$, если $\beta = \bar{\beta}$. Из принципа симметрии Шварца следует, что $P(\beta)^* = P(\bar{\beta})$ при всех β. По определению Q, $Q(\beta)^* = -Q(\bar{\beta})$. Положим $\tilde{V}(\beta) = U(\bar{\beta})^*$. Тогда $d\tilde{V}/d\beta = -\tilde{V}(\beta)Q(\beta)$; $\tilde{V}(0) = 1$. В силу единственности решения дифференциального уравнения, $\tilde{V}(\beta) = V(\beta)$. Следовательно, при вещественных β имеем $U(\beta)^* = \tilde{V}(\beta) = V(\beta) = U(\beta)^{-1}$, так что U унитарен. ∎

XII.3. Асимптотическая теория возмущений

Элегантный аппарат регулярной теории возмущений, развитый в предыдущем разделе, не всегда применим даже к тем случаям, которые кажутся совсем простыми. Рассмотрим в $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ семейство гамильтонианов $H(\beta) = H_0 + \beta V$, где $H_0 = -d^2/dx^2 + x^2$ и $V = x^4$. Мы обсуждали самосопряженность этого семейства с различных точек зрения в гл. X. При любом $\beta > 0$ оператор $H(\beta)$ самосопряжен на $D(H_0) \cap D(V) = D(p^2) \cap D(x^4)$; см. задачу 23 к гл. X. Поскольку $D(H_0) = D(p^2) \cap D(x^2)$, очевидно, что область определения изменяется при включении возмущения. Значит, критерий аналитичности семейства операторов, используемый в теореме XII.9, уже неприменим. Подобным же образом меняется и область определения формы $Q(H(\beta))$. Фактически никакие критерии аналитичности здесь не могут выполняться, потому что разложение около точки $\beta = 0$ *расходится.*

Разные авторы пользовались следующим рассуждением, чтобы предсказать расходимость ряда теории возмущений для собственных значений оператора $H(\beta)$ при $\beta \neq 0$. Если β отрицательно,