$U(0)=1=V(0)$. Тогда $U(\beta)V(\beta)=V(\beta)U(\beta)=1$; в частности, $U(\beta)$ обратим. В самом деле,

$$\frac{d}{d\beta}(V(\beta)U(\beta))=\frac{dV}{d\beta}U(\beta)+V(\beta)\frac{dU}{d\beta}=0,$$

и, следовательно, $VU\equiv 1$. С другой стороны, если $F(\beta)=U(\beta)V(\beta)$, то $F(\beta)$—решение дифференциального уравнения $dF/d\beta=Q(\beta)F(\beta)-F(\beta)Q(\beta)$; $F(0)=1$. Поскольку $F(\beta)\equiv 1$ есть решение этого уравнения с данным начальным условием, мы заключаем, что вследствие единственности решения, доказанной в лемме, $F(\beta)=1$.

(iii) $U(\beta)P(0)V(\beta)=P(\beta)$. В самом деле, положим $\tilde{P}(\beta)=U(\beta)P(0)V(\beta)$. Тогда $d\tilde{P}(\beta)/d\beta=[Q(\beta),\ \tilde{P}(\beta)]$ с начальным условием $\tilde{P}(0)=P(0)$. Но, с другой стороны, согласно (i), $P(\beta)$ есть также решение уравнения $dP(\beta)/d\beta=[Q(\beta),\ P(\beta)]$ с $P(\beta)|_{\beta=0}=P(0)$. В силу единственности решения дифференциального уравнения, $\tilde{P}(\beta)=P(\beta)$.

(iv) Наконец, мы должны доказать, что $U(\beta)$ унитарен при вещественных β, если $P(\beta)$ самосопряжен при вещественных β. Допустим, что $P(\beta)^*=P(\beta)$, если $\beta=\bar{\beta}$. Из принципа симметрии Шварца следует, что $P(\beta)^*=P(\bar{\beta})$ при всех β. По определению Q, $Q(\beta)^*=-Q(\bar{\beta})$. Положим $\tilde{V}(\beta)=U(\bar{\beta})^*$. Тогда $d\tilde{V}/d\beta=-\tilde{V}(\beta)Q(\beta)$; $\tilde{V}(0)=1$. В силу единственности решения дифференциального уравнения, $\tilde{V}(\beta)=V(\beta)$. Следовательно, при вещественных β имеем $U(\beta)^*=\tilde{V}(\beta)=V(\beta)=U(\beta)^{-1}$, так что U унитарен. ∎

XII.3. Асимптотическая теория возмущений

Элегантный аппарат регулярной теории возмущений, развитый в предыдущем разделе, не всегда применим даже к тем случаям, которые кажутся совсем простыми. Рассмотрим в $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R})$ семейство гамильтонианов $H(\beta)=H_0+\beta V$, где $H_0=-d^2/dx^2+x^2$ и $V=x^4$. Мы обсуждали самосопряженность этого семейства с различных точек зрения в гл. X. При любом $\beta>0$ оператор $H(\beta)$ самосопряжен на $D(H_0)\cap D(V)=D(p^2)\cap D(x^4)$; см. задачу 23 к гл. X. Поскольку $D(H_0)=D(p^2)\cap D(x^2)$, очевидно, что область определения изменяется при включении возмущения. Значит, критерий аналитичности семейства операторов, используемый в теореме XII.9, уже неприменим. Подобным же образом меняется и область определения формы $Q(H(\beta))$. Фактически никакие критерии аналитичности здесь не могут выполняться, потому что разложение около точки $\beta=0$ *расходится*.

Разные авторы пользовались следующим рассуждением, чтобы предсказать расходимость ряда теории возмущений для собственных значений оператора $H(\beta)$ при $\beta\neq 0$. Если β отрицательно, то $x^2+\beta x^4 \to -\infty$, когда $x \to \pm\infty$, так что $H_0+\beta V$ качественно совершенно отличен от H_0 (он на самом деле даже не самосопряжен в существенном). По этой причине естественно ожидать, что ряд теории возмущений при отрицательных β будет расходиться. Но, поскольку степенные ряды сходятся в круге, эти ряды не могут сходиться ни при каком β. Независимо от того, готовы ли мы принять эти наводящие соображения, они приводят к правильному выводу. Тщательный анализ позволяет доказать, что коэффициенты Релея—Шредингера a_n для энергии основного состояния $E_0(\beta)$ удовлетворяют условию $|a_n| \geqslant AB^n\Gamma(n/2)$ с подходящими константами A и B.

Таким образом, мы должны решить, имеют ли ряды теории возмущений какой-либо смысл в этом случае. Именно этим вопросом мы займемся в этом и в следующем разделах. Интерес к расходящимся рядам теории возмущений выходит далеко за рамки нерелятивистской квантовой теории. В некоторых (в настоящее время не до конца формализованных) квантовых теориях поля наиболее полезным вычислительным средством служит другой ряд теории возмущений, называемый рядом Гелл-Манна — Лоу или рядом Фейнмана. В некоторых случаях доказано, что эти ряды расходятся, и считается, что они расходятся и в других случаях. По этой причине, и в особенности благодаря сходству между некоторыми гамильтонианами теории поля и $p^2+x^2+\beta x^4$ (см. § X.7), задачи, которыми мы займемся в этом разделе, существенны для квантовой теории поля.

Проще всего формальный ряд интерпретировать как асимптотический.

Определение. Пусть f — функция, определенная на положительной вещественной полуоси. Будем говорить, что формальный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ **асимптотический для** f при $z \downarrow 0$, тогда и только тогда, когда для каждого фиксированного N

$$\lim_{z\downarrow 0}\left(f(z)-\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right)\Big/ z^N = 0.$$

Пусть f определена в некотором секторе комплексной плоскости $\{z \mid 0<|z|<B,\ |\arg z|\leqslant\theta\}$; мы будем говорить, что ряд $\sum a_n z^n$ **асимптотический** для f при $|z|\to 0$ **равномерно в секторе,** если для каждого N

$$\lim_{\substack{|z|\to 0\\ |\arg z|\leqslant\theta}}\left(f(z)-\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right)\Big/ z^N = 0.$$

Если $\sum a_n z^n$ — асимптотический ряд для f, мы иногда будем писать

$$f \underset{z\downarrow 0}{\sim} \sum a_n z^n.$$

Заметим, что если $f \sim \sum a_n z^n$ и $f \sim \sum b_n z^n$ при $z \downarrow 0$, то

$$\lim_{z \downarrow 0} \left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} b_n z^n \right) \Big/ z^N = 0$$

для всех N, так что $a_n = b_n$ при всех n. Значит, *любая функция f имеет не более одного асимптотического ряда при $z \downarrow 0$.*

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(z) = \exp(-z^{-1})$ при $z > 0$. Тогда $z^{-n} f(z) \to 0$ при $z \downarrow 0$, так что f имеет нулевой асимптотический ряд. Фактически нулевой ряд является асимптотическим равномерно в любом секторе $|\arg z| \leqslant \theta$ с $\theta < \pi/2$.

Этот пример иллюстрирует важную черту асимптотических рядов: *две различные функции могут иметь один и тот же асимптотический ряд.* Если говорится, что $f(z)$ имеет некоторый определенный асимптотический ряд, то это еще не дает никаких сведений о значении $f(z)$ для некоторого фиксированного отличного от нуля значения z. Нам известно, что $f(z)$ хорошо аппроксимируется посредством $a_0 + a_1 z$, когда z становится «малым», но это определение ничего не говорит о том, насколько мало «малое» z. Если асимптотический ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ не сходится, то типичное поведение таково: при «малом» z небольшое число первых частных сумм даст довольно хорошее приближение к $f(z)$, но, когда $N \to \infty$, эти суммы начинают сильно осциллировать и больше не служат хорошим приближением к $f(z)$. Для примера мы покажем сейчас, что ряд Релея—Шредингера для энергии основного состояния $E_0(\beta)$ гамильтониана $p^2 + x^2 + \beta x^4$ $(\beta > 0)$ является асимптотическим для $E_0(\beta)$ при $\beta \downarrow 0$. Для $\beta = 0{,}2$ вариационные методы (см. § XIII.2) дают значение $E_0(\beta) = 1{,}118292\ldots$. Первые 15 частных сумм приведены в следующей таблице:

N	$\sum_{n=0}^{N} a_n (0{,}2)^n$	N	$\sum_{n=0}^{N} a_n (0{,}2)^n$
1	1,150000	9	2,353090
2	1,097500	10	—2,442698
3	1,153750	11	13,253968
4	1,105372	12	—42,333586
5	1,176999	13	168,895730
6	1,049024	14	—796,466406
7	1,314970	15	3005,179546
8	0,686006		

Мы видим, таким образом, типичное поведение: сначала колебания около правильного ответа (на самом деле даже не очень около!) и затем страшная раскачка. И по мере того, как N становится больше, положение только ухудшается: 50-я частная сумма имеет порядок величины 10^{45}, а тысячный член — порядок 10^{2000}.

Пример 2. Пусть $f \in C^\infty([-1, 1])$. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ является асимптотическим для f при $x \downarrow 0$ или $x \uparrow 0$. В самом деле, по формуле Тейлора с остаточным членом, имеем оценку

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right| \leqslant \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sup_{|a| \leqslant |x|} [|f^{(n+1)}(a)|].$$

Так как функции класса C^∞ могут быть неаналитическими, этот пример показывает что асимптотический ряд может не сходиться; но даже если ряд сходится, его сумма может не иметь ничего общего с функцией f (см. пример 1).

Мы определили аналитические семейства на открытых множествах. Допуская некоторую вольность речи, будем говорить, что семейство аналитично в замкнутом множестве, если оно непрерывно по норме на этом множестве и аналитично в его внутренности.

Теорема XII.14. Пусть H_0 — самосопряженный оператор. Допустим, что $H(\beta)$ — аналитическое семейство в области $\{\beta \mid 0 < |\beta| < B, |\arg \beta| \leqslant \theta\}$ и выполнены следующие условия:

(a) $\lim\limits_{\substack{|\beta| \to 0 \\ |\arg\beta| \leqslant \theta}} \|(H(\beta) - \lambda)^{-1} - (H_0 - \lambda)^{-1}\| = 0$ для некоторого $\lambda \notin \sigma(H_0)$;

(b) существует замкнутый симметрический оператор V, такой, что $C^\infty(H_0) \subset D(V)$ и $V[C^\infty(H_0)] \subset C^\infty(H_0)$;

(c) $C^\infty(H_0) \subset D(H(\beta))$ при всех β в указанном секторе, и для $\psi \in C^\infty(H_0)$ имеем $H(\beta)\psi = H_0\psi + \beta V\psi$.

Пусть E_0 — изолированное невырожденное собственное значение H_0. Тогда, если $|\beta|$ мало и $|\arg\beta| \leqslant \theta$, существует в точности одно собственное значение $E(\beta)$ оператора $H(\beta)$ вблизи E_0. Более того, формальный ряд Релея — Шредингера $\sum a_n \beta^n$ для собственного значения оператора $H_0 + \beta V$ почленно конечен и является асимптотическим для $E(\beta)$ равномерно в этом секторе. Именно, для всех N

$$\lim_{\substack{|\beta| \to 0 \\ |\arg\beta| \leqslant \theta}} \left| E(\beta) - \sum_{n=0}^{N} a_n \beta^n \right| / \beta^N = 0.$$

Это главный результат настоящего раздела. Результат состоит из нескольких различных утверждений, по этой причине мы разделим и доказательство на несколько лемм. Первое утверждение заключается в том, что если β мало, то вблизи E_0 существует собственное значение $E(\beta)$ оператора $H_0+\beta V$. Мы подчеркнем это свойство, дав ему специальное название — устойчивость. В § 5 и 6 мы обсудим ситуации, когда устойчивость не имеет места. Второе утверждение относится к асимптотическому характеру ряда для $E(\beta)$. Аналогичный результат имеет место для собственного вектора, отвечающего $E(\beta)$ (см. задачу 24). Главный способ доказательства асимптотичности уже знаком нам по § 2. Это формулы

$$E(\beta)=\frac{(\Omega_0,\ (H_0+\beta V)\,P(\beta)\,\Omega_0)}{(\Omega_0,\ P(\beta)\,\Omega_0)} \quad \text{и} \quad P(\beta)=-\frac{1}{2\pi i}\oint (H(\beta)-E)^{-1}\,dE.$$

Как мы видели, эти формулы позволяют свести сложную структуру коэффициентов Релея — Шредингера к некоторым простым операциям с геометрическими рядами. Мы будем использовать главным образом остаточный член в этих рядах.

Определение. Пусть $A(\beta)$ — семейство операторов на множестве $\{\beta \mid 0<|\beta|<B,\ |\arg\beta|\leqslant\theta\}$. Предположим, что существует такой оператор A_0, что для некоторого $\lambda\notin\sigma(A_0)$

$$\underset{\substack{|\beta|\to 0\\ |\arg\beta|<\theta}}{s\text{-}\lim}\ (A(\beta)-\lambda)^{-1}=(A_0-\lambda)^{-1}.$$

Изолированное невырожденное собственное значение E_0 оператора A_0 называется **устойчивым**, если $A(\beta)$ имеет точно одно собственное значение вблизи E_0 при малых β и это собственное значение изолировано и невырожденно. Таким образом, E_0 устойчиво, если для всякого достаточно малого ε существует такое δ, что из $|\beta|<\delta$ и $|\arg\beta|\leqslant\theta$ следует, что в $\{E \mid |E-E_0|\leqslant\varepsilon\}$ имеется ровно одна точка из $\sigma(A(\beta))$ и эта точка является невырожденным собственным значением.

Лемма 1. Если выполнено условие (а) теоремы XII.14, то всякое изолированное невырожденное собственное значение оператора H_0 устойчиво.

Доказательство. Применяя первую резольвентную формулу, убеждаемся, что если $(H(\beta)-\lambda)^{-1}\to(H_0-\lambda)^{-1}$ по норме для некоторого $\lambda\notin\sigma(H_0)$, то резольвента сходится при всех $\lambda\notin\sigma(H_0)$ и сходимость равномерна на компактных множествах из $\rho(H_0)$. Значит, если ε задано так, что H_0 имеет лишь одно собственное значение в $\{E \mid |E-E_0|<\varepsilon\}$, то для некоторого δ заключаем, что $E \notin \sigma(H(\beta))$ при $|\beta| < \delta$, $|\arg\beta| \leqslant \theta$ и $|E - E_0| = \varepsilon$. Стало быть, при малых $|\beta|$

$$P(\beta) = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{|E-E_0|=\varepsilon} (H(\beta) - E)^{-1} dE$$

существует и сходится по норме к

$$P_0 = \frac{-1}{2\pi i} \oint_{|E-E_0|=\varepsilon} (H_0 - E)^{-1} dE$$

при $|\beta| \to 0$. По теореме XII.5, P_0 есть проектор на собственный вектор оператора H_0, отвечающий собственному значению E_0. В силу леммы, предшествующей теореме XII.8, $P(\beta)$ одномерен, если $|\beta|$ мало. Таким образом, лемма 1 следует из теоремы XII.6. ∎

Теперь мы построим асимптотический ряд для $P(\beta)\Omega_0$.

Лемма 2. Предположим, что выполнены условия теоремы XII.14 и что Ω_0 — собственный вектор H_0 с собственным значением E_0. При малых $|\beta|$ пусть $\Omega(\beta) = P(\beta)\Omega_0$, где $P(\beta)$ задается вышеприведенными формулами. Тогда для всех N

$$\lim_{\substack{|\beta| \to 0 \\ |\arg\beta| < \theta}} \left\| \Omega(\beta) - \sum_{n=0}^{N} \varphi_n \beta^n \right\| \Big/ |\beta|^N = 0,$$

где

$$\varphi_n = (-1)^{n+1} (2\pi i)^{-1} \oint_{|E-E_0|=\varepsilon} (H_0 - E)^{-1} [V(H_0 - E)^{-1}]^n \Omega_0 \, dE.$$

Доказательство. Пусть $|E - E_0| = \varepsilon$. Формально

$$(H(\beta) - E)^{-1} = \sum_{n=0}^{N} (-\beta)^n (H_0 - E)^{-1} [V(H_0 - E)^{-1}]^n +$$
$$+ (-\beta)^{N+1} (H(\beta) - E)^{-1} [V(H_0 - E)^{-1}]^{N+1}.$$

Применим теперь обе части этого формального равенства к Ω_0. Так как $\Omega_0 \in C^\infty(H_0)$, обе части по условию (b) корректно определены. По условию (c) обе части дают один и тот же результат при действии на них оператора $H(\beta) - E$. Поскольку $E \notin \sigma(H(\beta))$, обе части равны. Применяя теорему о замкнутом графике, можно доказать, что $[V(H_0 - E)^{-1}]^N \Omega_0$ непрерывно по E на $\{E \mid |E - E_0| = \varepsilon\}$

(см. задачу 25). Следовательно,

$$\frac{1}{|\beta|^N}\left\|\Omega(\beta)-\sum_{n=0}^{N}\varphi_n\beta^n\right\|=$$

$$=\frac{|\beta|}{2\pi}\left\|\oint_{|E-E_0|=\varepsilon}(H(\beta)-E)^{-1}[V(H_0-E)^{-1}]^{N+1}\Omega_0\,dE\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon|\beta|\sup_{\substack{|E-E_0|=\varepsilon\\ |\beta|<\delta\\ |\arg\beta|<\theta}}\|(H(\beta)-E)^{-1}\|\,\|[V(H_0-E)^{-1}]^{N+1}\Omega_0\|\to$$

$\to 0$ при $|\beta|\to 0$. ∎

Чтобы завершить доказательство теоремы, нам потребуется еще такая лемма, доказательство которой мы отнесем к задаче 26 (с).

Лемма 3. Пусть f и g — две функции, определенные в секторе $\{\beta\,|\,0<|\beta|<B, |\arg\beta|\leqslant\theta\}$. Допустим, что $f\underset{\beta\to 0}{\sim}\sum a_n\beta^n$ и $g\underset{\beta\to 0}{\sim}\sum b_n\beta^n$, причем $b_0\neq 0$. Если $\sum c_n\beta^n$ — формальный ряд для $\sum a_n\beta^n/\sum b_n\beta^n$, то он является асимптотическим для функции $h(\beta)=f(\beta)/g(\beta)$ при $\beta\to 0$.

Доказательство теоремы XII.14. Так как лемма 1 уже доказана, то остается только доказать, что ряд Релея — Шредингера почленно конечен и является асимптотическим. В силу леммы 2 и условия (b) ряды для $(H(\beta)\Omega_0, P(\beta)\Omega_0)$ и $(\Omega_0, P(\beta)\Omega_0)$ почленно конечные и асимптотические. Так как $\lim\limits_{|\beta|\to 0}(\Omega_0, P(\beta)\Omega_0)=1\neq 0$, то с помощью леммы 3 доказательство завершается. ∎

Наконец, зададимся вопросом: когда условие (a) может быть доказано? Сформулируем в этой связи две общие теоремы. Мы наметим доказательство лишь одной из них (см. в Замечаниях ссылки на литературу, где приведены полные доказательства). Как и в гл. XIII, мы будем говорить, что два ограниченных снизу самосопряженных оператора удовлетворяют условию $A\leqslant B$, если $Q(B)\subset Q(A)$ и $(\varphi, A\varphi)\leqslant(\varphi, B\varphi)$ при всех $\varphi\in Q(B)$.

Теорема XII.15. Предположим, что H_0 и V самосопряжены. Предположим далее, что

(i) $H_0\geqslant 0$;

(ii) при любом $a>0$ существует такое b, что

$$V_-\leqslant aH_0+b$$

(V_- есть отрицательная часть V, даваемая спектральной теоремой; если, в частности, $V\geqslant 0$, то $V_-=0$, так что (ii) выполнено);

(iii) при некоторых c и d

$$|V| \leqslant cH_0^2 + d.$$

Тогда $H_0 + \beta V$ есть аналитическое семейство типа (B) в плоскости с разрезом $\{\beta \mid |\arg \beta| < \pi,\ |\beta| > 0\}$ и при любом $\theta < \pi$

$$\lim_{\substack{|\beta| \to 0 \\ |\arg \beta| \leqslant \theta}} \|(H(\beta) - \lambda)^{-1} - (H_0 - \lambda)^{-1}\| = 0.$$

Теорема XII.16. Допустим, что H_0 и V — самосопряженные операторы. Допустим далее, что

(i) $H_0 \geqslant 0$;

(ii) при любом $a > 0$ существует такое b, что $V_- \leqslant aH_0 + b$;

(iii) при некотором d, некотором $c < 1$ и некотором B

$$\pm \beta [H_0^{1/2}, [H_0^{1/2}, V]] \leqslant c(H_0^2 + \beta^2 V^2) + d, \quad \text{если } 0 < \beta < B;$$

(iv) при всех $e > 0$ существует такое f, что

$$\pm \beta i [H_0, V] \leqslant e(H_0^2 + \beta^2 V^2) + f, \quad \text{если } 0 < \beta < B;$$

(v) при некоторых $p > 1$, g и h

$$|V|^{2/p} \leqslant gH_0^2 + h;$$

(vi) $H_0 + \beta V$ самосопряжен в существенном на $D(H_0) \cap D(V)$, если $0 < \beta < B$.

Тогда $H_0 + \beta V$ есть аналитическое семейство типа (B) в плоскости с разрезом и при любом $\theta < \pi$

$$\lim_{\substack{|\beta| \to 0 \\ |\arg \beta| \leqslant \theta}} \|(H(\beta) - \lambda)^{-1} - (H_0 - \lambda)^{-1}\| = 0.$$

Если, кроме того,

(iii′), (iv′) для любого B можно так выбрать d, f, чтобы выполнялись неравенства из (iii), (iv);

(vi′) оператор $H_0 + \beta V$ самосопряжен в существенном на $D(H_0) \cap D(V)$ при всех $\beta > 0$,

то $H(\beta)$ есть аналитическое семейство типа (A) в плоскости с разрезом.

Главная идея доказательства теоремы XII.16 состоит в том, чтобы воспользоваться условиями (ii), (iii) и (iv) для доказательства «квадратичных» оценок. Именно, при данном $\theta < \pi$ можно найти такие α, $\gamma > 0$, что

$$H_0^2 + |\beta|^2 V^2 \leqslant \alpha (H_0 + \beta V)^* (H_0 + \beta V) + \gamma$$

при всех β, таких, что $0<|\beta|<B$, $|\arg\beta|<\theta$. Отсюда следует, что $H_0+\beta V$ замкнут на $D(H_0)\cap D(V)$ (задача 27). Запишем теперь

$$\|(H_0+\beta V-\lambda)^{-1}-(H_0-\lambda)^{-1}\|\leqslant$$
$$\leqslant|\beta|^{1/p}\|(H(\beta)-\lambda)^{-1}|\beta V|^{1-1/p}|V|^{1/p}(H_0-\lambda)^{-1}\|.$$

По квадратичной оценке $(H(\beta)-\lambda)^{-1}|\beta V|^{1-1/p}$ равномерно ограничен в секторе $\{\beta\,|\,0<\beta<B, |\arg\beta|<\theta\}$. В силу (v), $|V|^{1/p}(H_0-\lambda)^{-1}$ ограничен. Следовательно, $\|(H_0+\beta V-\lambda)^{-1}-(H_0-\lambda)^{-1}\|$ стремится к нулю не медленнее, чем $|\beta|^{1/p}$.

Пример 3 (ангармонический осциллятор). Пусть $H_0=-d^2/dx^2+x^2$ на $L^2(\mathbb{R})$ и $V=x^{2m}$. Тогда все условия теоремы XII.16 выполнены. Действительно, (i) и (ii) проверяются непосредственно; (vi) было доказано в примере 2 § X.4 и примере 2 § X.9. Чтобы доказать (iii) и (iv), следует проделать явные вычисления с операторами рождения и уничтожения A, $A^\dagger$, введенными в дополнении к § V.3 (см. задачу 28). Чтобы убедиться, что (v) выполняется с $p=m$ надо опять воспользоваться операторами A, $A^\dagger$ (задача 28). Поскольку V оставляет $C^\infty(H_0)$ инвариантным и применима теорема XII.16, выполнены все условия теоремы XII.14. Стало быть, собственные значения оператора $p^2+x^2+\beta x^{2m}$ имеют ряды Релея — Шредингера в качестве асимптотических рядов равномерно в секторах $|\arg\beta|\leqslant\theta<\pi$. Можно также доказать, что собственные значения имеют аналитическое продолжение на многолистные поверхности $|\arg\beta|\leqslant\theta$, $0<\beta<B_\theta$ при любом $\theta<(m+1)\pi/2$ и ряд будет асимптотическим на многолистной поверхности.

Пример 4 (теория поля $(\varphi^4)_2$ с пространственным обрезанием). Пусть H_0 — гамильтониан свободного бозонного поля с массой $m_0>0$ в двумерном пространстве-времени. Пусть $V=\int g(x):\varphi^4(x):dx$ с $g\in L^1\cap L^2$ и $g\geqslant 0$ (как обсуждалось в § X.7). Тогда можно доказать выполнение всех условий теоремы XII.16 (или теоремы XII.15). Единственное изолированное собственное значение H_0 — это фоковский вакуум. Теорема XII.14 в сформулированном виде неприменима, поскольку $C^\infty(H_0)$ не инвариантно относительно V. Однако, если N — оператор числа частиц, то V и $(H_0-E)^{-1}$ оставляют $C^\infty(N)$ инвариантным, а $\Omega_0\in C^\infty(N)$. Легко обобщить метод теоремы XII.14 для доказательства того, что ряд Релея — Шредингера является асимптотическим в случае, когда инвариантность $C^\infty(H_0)$ заменяется инвариантностью $C^\infty(N)$. На этом пути мы приходим к заключению, что энергия основного состояния гамильтониана $H_0+\beta V$ обладает асимптотическим рядом. Коэффициенты этого ряда задаются суммами диаграмм типа диаграмм Фейнмана (см. Замечания).

Если выполнено условие (а) теоремы XII.14, то эта теорема — удобное средство для доказательства устойчивости, однако есть такие случаи, когда оно не выполнено, но устойчивость может быть доказана следующим способом.

Теорема XII.16$^1/_2$. Пусть H_0 — замкнутый оператор и P — конечномерный *ортогональный* проектор, такой, что $\operatorname{Ran} P \subset D(H_0)$ и $H_0 P = P H_0$. Допустим, что оператор $H_0 \restriction \operatorname{Ran}(1-P)$ секториальный с сектором $S_0 \equiv \{z \mid |\arg z| \leqslant \theta_0 < \pi/2\}$ и что $H_0 \restriction \operatorname{Ran} P$ имеет спектр вне S_0. Пусть V — замкнутый секториальный оператор с сектором S_0. Допустим, что $\operatorname{Ran} P \subset D(V) \cup D(V^*)$. Пусть E_0 — изолированное невырожденное собственное значение оператора $H_0 \restriction \operatorname{Ran} P$. Тогда для любых $\varepsilon, \delta > 0$ существует такое B, что сумма в смысле форм $H_0 + \beta V$ имеет в точности одно собственное значение $E(\beta)$ в $\{E \mid |E - E_0| < \varepsilon\}$ при β в области $Q \equiv \{\beta \mid |\arg \beta| \leqslant \leqslant \pi/2 - \theta_0 - \delta,\ |\beta| \leqslant B\}$. Это собственное значение невырожденно, это единственная спектральная точка оператора $H_0 + \beta V$ вблизи E_0 и

$$\sup \{ \| (H_0 + \beta V - E)^{-1} \| \mid |E - E_0| = \varepsilon,\ \beta \in Q \} < \infty.$$

Более того, допустим, что $H_0 \Omega_0 = E_0 \Omega_0$ и что $((H_0 - E)^{-1} V)^j \times \times (H_0 - E)^{-1} \Omega_0 \in D(V)$ при $|E - E_0| = \varepsilon$ для $j = 0, 1, \ldots, k$. Тогда коэффициенты Релея — Шредингера для $E(\beta)$ конечны по меньшей мере до порядка β^{k+1} и ряд Релея — Шредингера является асимптотическим в области Q по меньшей мере до этого порядка.

Доказательство. Достаточно доказать только устойчивость, так как утверждение об асимптотических рядах следует тогда из доказательств лемм 2 и 3. Напишем $V = V_1 + V_2$, где $V_1 = = (1-P) V (1-P)$, $V_2 = V - V_1$; V_2 — ограниченный оператор конечного ранга, так как $\operatorname{Ran} P \subset D(V) \cup D(V^*)$. Очевидно, $H_0 + \beta V_1$ секториален на $\operatorname{Ran}(1-P)$ при $\beta \in Q$ независимо от того, какие мы выберем B и δ и равен H_0 на $\operatorname{Ran} P$. Так как βV_2 ограничен, мы можем изучать его действие на $\sigma(H_0 + \beta V_1)$ при помощи регулярной теории возмущений. Результат состоит в том, что при малых β интересующая нас верхняя грань конечна, так что проектор $-(2\pi i)^{-1} \int (H_0 + \beta V - E)^{-1} dE$ имеет постоянную размерность. ∎

Пример 5. Пусть $H_0 = -\Delta + W$, где W — вещественнозначная функция, $W(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Пусть $V = |x|$ (можно взять и $V = |x|^n$). В этом случае $H_0 + \beta V \to H_0$ в смысле сильной резольвентной сходимости. Равномерной резольвентной сходимости здесь не может быть, так как $(H_0 + \beta V - i)^{-1}$ компактен (см. § XIII.14), а $(H_0 - i)^{-1}$ не компактен. Следовательно, теорема XII.14 неприменима.

Если у H_0 есть отрицательные собственные значения, мы можем выбрать P проектором на соответствующие собственные векторы (или на те, которые отвечают m низшим собственным значениям; в таком случае мы добавим к H_0 константу, для того чтобы обеспечить секториальность $H_0 \upharpoonright (1-P)$ относительно сектора S_0). Так как собственные векторы H_0 убывают экспоненциально (см. § XIII.11), то $\operatorname{Ran} P \subset D(V) = D(V^*)$, так что условия первой части теоремы XII.16$^1/_2$ выполнены. Более того, при очень слабых предположениях о W можно показать, пользуясь методом § XIII.11, что при E вблизи E_0 и малых a оператор $(H_0 - E)^{-1}$ есть ограниченное отображение $\mathscr{H}_a$ на себя, где

$$\mathscr{H}_a = \{\psi \mid \|\psi\|_a = \|e^{a|x|}\psi\|_2 < \infty\}.$$

Так как $\Omega_0 \in \mathscr{H}_a$ при малых a и V ограничен как оператор из $\mathscr{H}_a$ в $\mathscr{H}_{a/2}$, мы можем проверить условие второй части теоремы XII.16$^1/_2$ при любом k. Следовательно, ряд Релея—Шредингера асимптотический во всех порядках и при любом β, удовлетворяющем условию $\operatorname{Re}\beta > 0$. Если $\beta < 0$, то собственное значение не устойчиво, однако ряд Релея—Шредингера, как мы увидим в § 5, сохраняет свое значение.

Наконец, рассмотрим пример, который показывает, что иногда и при неустойчивых собственных значениях удается доказать, что ряд Релея—Шредингера асимптотический. Однако это требует подробного рассуждения. Этот пример также весьма наглядно иллюстрирует, что две различные функции могут иметь один асимптотический ряд.

Пример 6 (потенциал двойной ямы). Рассмотрим семейство операторов на $L^2(\mathbb{R})$:

$$H(\beta) = -d^2/dx^2 + x^2 + 2\beta x^3 + \beta^2 x^4.$$

Поскольку полный потенциал можно записать в виде $x^2(1+\beta x)^2$, то, очевидно, $H(\beta)$ при любом $\beta \geqslant 0$ ограничен снизу. Применяя методы гл. X, мы видим, что $H(\beta)$ самосопряжен в существенном на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, а методы § XIII.4 или § XIII.14 показывают, что он имеет чисто дискретный спектр и полный набор собственных векторов. Хотя $H(\beta)$ не линеен по β, нетрудно обобщить формулы, полученные в § 1, и получить формальные ряды для собственных значений: следует писать $2\beta x^3 + \beta^2 x^4$ вместо V в формулах § 1 вплоть до порядка n, а затем собрать все члены порядка n. Так как $(\Omega_n, (2\beta x^3 + \beta^2 x^4)\Omega_m) = 0$, если $|n-m| > 4$ для невозмущенных собственных векторов Ω_n оператора $H(0)$, то все суммы в определении ряда Релея—Шредингера конечны, и мы получаем для собственных значений $H(\beta)$ формальный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n$. Так как вся задача инвариантна по отношению к одновременной замене $x \to -x$, $\beta \to -\beta$, то $a_{2n+1} = 0$ при всех n.

До сих пор эта задача как будто не слишком отличается от ангармонического осциллятора примера 3, и действительно, если заменить 2 в члене $2\beta x^3$ на некоторое θ, $-2<\theta<2$, то можно доказать резольвентную сходимость по норме при $\beta\downarrow 0$. Однако заметим, что полный потенциал исчезает также при $x=-\beta^{-1}$. Действительно, сдвигая x на $-{}^1/_2\beta^{-1}$, мы получим унитарно эквивалентный оператор

$$\tilde{H}(\beta)=-d^2/dx^2+{}^1/_{16}\beta^{-2}-{}^1/_2x^2+\beta^2x^4.$$

Так как потенциальный член в $\tilde{H}(\beta)$ симметричен относительно замены $x\mapsto -x$, то очевидно что потенциал в $H(\beta)$ имеет две идентичные ямы: одну с центром в $x=0$ и вторую — в $x=-\beta^{-1}$. В результате при весьма малых β мы ожидаем наличия двух собственных значений вблизи E_0 — энергии основного состояния оператора $H(0)$, так как можно получить два почти ортогональных вектора с энергией около E_0, пользуясь основным состоянием $\Omega_0(x)$ оператора $H(0)$ и сдвинутым состоянием $\Omega_0(x+\beta^{-1})$. По этой причине мы будем обозначать собственные значения $H(\beta)$ при $\beta>0$ символами $E_0(\beta)<E_0'(\beta)<E_1(\beta)<E_1'(\beta)<\ldots$ а соответствующие собственные векторы — символами $\Omega_0(x,\beta)$, $\Omega_0'(x,\beta)$ и т. д. Во избежание недоразумений штрих будет употребляться ниже только для различения этих двух серий, а не для производных; E_0, E_1, ... — это те собственные значения $\tilde{H}(\beta)$, собственные функции которых инвариантны относительно замены $x\mapsto -x$, а E_0', E_1', ... — те, чьи собственные функции нечетны относительно замены $x\mapsto -x$. Мы ожидаем, что при $\beta\downarrow 0$ *оба* значения $E_0(\beta)$ и $E_0'(\beta)$ приближаются к E_0, т. е. собственное значение E_0 оператора $H(0)$ *неустойчиво*. Более того, у нас есть основания ожидать, что $E_0(\beta)-E_0'(\beta)$ стремится к нулю очень быстро, а именно как $\exp(-a\beta^{-2})$ с соответствующим a. В самом деле, истинные собственные функции $\tilde{H}(\beta)$ четны или нечетны относительно $x\mapsto -x$. Если мы начинаем в момент $t=0$ с состояния типа $N(\beta)^{-1}[\Omega_0(x,\beta)+ +\Omega_0'(x,\beta)]$, сосредоточенного около $x=0$, то по прошествии времени $t=\pi/(E_0'-E_0)$ это состояние, развиваясь в согласии с динамикой, описываемой $H(\beta)$, окажется сосредоточенным в $x=-\beta^{-1}$, т. е. оно пройдет сквозь потенциальный барьер между двумя ямами. Стало быть, $E_0'(\beta)-E_0(\beta)$ должна быть того же порядка, что вероятность туннельного эффекта, а эта последняя имеет порядок $\exp(-d\sqrt{h})$, где d — ширина барьера, т. е. $1/\beta$, а h — высота барьера, т. е. $\beta^{-2}/16$.

Итак, мы ожидаем, что два собственных значения $E_0(\beta)$ и $E_0'(\beta)$ приближаются к единому собственному значению E_0 оператора $H(0)$ и что оба они имеют в качестве асимптотического ряда один и тот же ряд Релея — Шредингера. Мы наметим доказательство этих фактов, оставляя все детали читателю (задача 36).

Рассуждение здесь довольно сложное, и мы будем свободно пользоваться средствами из гл. XIII. Мы установим три факта. (i) При $\beta\downarrow 0$ и $E_i(\beta)$, и $E_i'(\beta)$ приближаются к $E_i(0)\equiv E_i$ и, в частности, существует независимый от β промежуток между $E_0'(\beta)$ и $E_1(\beta)$ при $\beta\to 0$. (ii) Мы докажем, что $\exp(-a\beta^{-2})\leqslant \leqslant E_0'(\beta)-E_0(\beta)\leqslant \exp(-b\beta^{-2})$ при $\beta\downarrow 0$ с соответствующими a и b (iii) Мы покажем, что $E_0(\beta)$ (а значит, в силу (ii), и $E_0'(\beta)$) имеет ряд Релея—Шредингера в качестве асимптотического ряда.

Как первый шаг к установлению (i) рассмотрим операторы $H^{\mathrm D}(a)$ и $H^{\mathrm N}(a)$ на $L^2(-a, a)$, задаваемые посредством $-d^2/dx^2+x^2$ с граничными значениями Дирихле (соответственно Неймана) в $x=\pm a$. Пусть $E_n^{\mathrm D}(a)$ и $E_n^{\mathrm N}(a)$ обозначают собственные значения $H^{\mathrm D}(a)$ и $H^{\mathrm N}(a)$. Пусть E_n обозначает собственные значения $-d^2/dx^2+x^2$ на всем $L^2(\mathbb{R})$. Методы § XIII.15 позволяют получить неравенства

$$E_n^{\mathrm N}(a)\leqslant E_n\leqslant E_n^{\mathrm D}(a), \tag{5a}$$

если $a^2\geqslant E_n=2n+1$. (Это условие понадобилось нам для того, чтобы, когда в $L^2(\mathbb{R})$ будет сформулирована краевая задача с граничными условиями Неймана в $x=\pm a$, наименьшие собственные значения для интервалов $|x|\geqslant a$ были больше E_n.) Мы покажем, что

$$E_n^{\mathrm D}(a)\leqslant E_n^{\mathrm N}(a)+\exp(-ca^2) \tag{5b}$$

при больших a. Насколько больших — зависит от n. Пусть $\psi_n^{\mathrm N}(x; a)$ обозначает n-й нормированный собственный вектор оператора $H^{\mathrm N}(a)$. Мы утверждаем, что при достаточно больших a

$$|\psi_n^{\mathrm N}(a;\ a)|\leqslant \exp(-{}^1/_{12}\,a^2). \tag{6}$$

Чтобы доказать (6), рассмотрим $\varphi(x)$ — решение уравнения $-\varphi''+x^2\varphi=E_n^{\mathrm N}(a)\varphi$ с граничными условиями $\varphi'(a)=0$, $\varphi(a)=1$. Выберем a настолько большим, чтобы было $a>16$ и $(a/2)^2\geqslant \geqslant(a^2/9)+(2n+1)$. Тогда в интервале $[{}^1/_2\,a, a]$ имеем $x^2-E_n^{\mathrm N}(a)\geqslant \geqslant a^2/9$, так как $E_n^{\mathrm N}(a)\leqslant 2n+1$. Следовательно, в силу рассуждений, построенных на сравнении, такого типа, какими мы пользовались в § XI.2, $\varphi(x)\geqslant \operatorname{ch}({}^1/_3\,a(x-a))$ при $x\in[{}^1/_2\,a,\ a]$. В частности, $\varphi(x)\geqslant {}^1/_2\exp({}^1/_{12}\,a^2)$ при $x\in[{}^1/_2\,a,\ {}^3/_4\,a]$, и, значит, так как $a>16$,

$$\int_{a/2}^{3a/4} |\varphi(x)|^2dx\geqslant \operatorname{ch}({}^1/_6\,a^2).$$

Поскольку $\psi_n^{\mathrm N}(x;\ a)$ отличается от φ только множителем нормировки, (6) выполнено. Для дальнейших нужд заметим, что аналогичные рассуждения показывают, что

$$\left|\frac{\partial\psi_n^{\mathrm D}}{\partial x}(a;\ a)\right|\leqslant \exp(-ca^2). \tag{6'}$$

Фиксируем теперь n_0 и выберем a_0 так, чтобы (6) выполнялось для $n=0, 1, \ldots, n_0$ и чтобы было $a \geqslant a_0$. Положим

$$\eta_i(x) = \begin{cases} \psi_i^N(x;\ a) - \psi_i^N(a;\ a), & i=0,\ 2,\ \ldots, \\ \psi_i^N(x;\ a) - a^{-1}x\psi_i^N(a;\ a), & i=1,\ 3,\ \ldots. \end{cases}$$

Тогда $\eta_i(x)$ исчезают при $x = \pm a$, так что они будут подходящими пробными функциями для $H^D(a)$, т. е. они лежат в $Q(H^D(a))$. Вследствие (6) $\Delta_{ij} = (\eta_i,\ \eta_j)$ и $E_{ij} = (\eta_i,\ H^D(a)\eta_j)$ удовлетворяют при $0 \leqslant i,\ j \leqslant n_0$ неравенствам

$$|\Delta_{ij} - \delta_{ij}| \leqslant d \exp\left(-\frac{1}{20}a^2\right), \qquad |E_{ij} - E_i^N(a)\delta_{ij}| \leqslant d \exp\left(-\frac{1}{20}a^2\right)$$

при подходящем d. Пусть $E_{(i)}$ будет i-м собственным значением $\Delta^{-1/2}E\Delta^{-1/2}$, где $\Delta = \{\Delta_{ij}\}$ и $E = \{E_{ij}\}$. По методу Релея — Ритца из § XIII.2, $E_{(i)} \geqslant E_i^D(a)$ (для $i=0,\ \ldots,\ n_0$), и в силу предыдущих неравенств

$$\|\Delta^{-1/2}E\Delta^{-1/2} - E_i^N\delta_{ij}\| \leqslant d_1 \exp(-{}^1/_{20}a^2).$$

Следовательно, $|E_{(i)} - E_i^N| \leqslant d_1 \exp(-{}^1/_{20}a^2)$, так что (5b) выполняется.

Теперь мы можем установить (i). Из формы $\tilde{H}(\beta)$ видно, что E_i (соответственно E_i') есть собственное значение с номером $i+1$ оператора $-d^2/dx^2 + x^2 + 2\beta x^3 + \beta^2 x^4$ на $L^2(-{}^1/_2\beta^{-1},\ \infty)$ с граничными условиями Неймана (соответственно Дирихле) в $x = -\beta^{-1}/2$. Фиксируем $a > \sqrt{2n+1}$ и наложим дополнительное граничное условие Дирихле или Неймана в $x = \pm a$. Пусть $E_{i,\,D}(\beta,\ a)$, $E_{i,\,N}(\beta,\ a)$, $E'_{i,\,D}(\beta,\ a)$, $E'_{i,\,N}(\beta,\ a)$ обозначают соответствующие собственные значения. При помощи «вилки» Дирихле — Неймана (§ XIII.15) получаем

$$E_{i,\,N}(\beta,\ a) \leqslant E_i(\beta) \leqslant E_{i,\,D}(\beta,\ a)$$

и аналогично для штрихованных величин. Устремляя β к нулю, мы видим, что

$$E_i^N(a) \leqslant \underline{\lim}\, E_i(\beta) \leqslant \overline{\lim}\, E_i(\beta) \leqslant E_i^D(a),$$

где $E_i^N(a)$ определен выше. Устремляя теперь a к ∞ и пользуясь неравенствами (5), мы видим, что $|E_i(\beta) - E_i| \to 0$ при $\beta \to 0$.

В качестве подготовки к доказательству (ii) заметим, что $\|\Omega_i(\beta) - \tilde{\Omega}_i(\beta)\| \to 0$ и $\|\Omega_i'(\beta) - \tilde{\Omega}_i'(\beta)\| \to 0$ при $\beta \downarrow 0$, где $\tilde{\Omega}_i(x,\ \beta) = 2^{-1/2}(\Omega_i(x) + \Omega_i(x+\beta^{-1}))$ и $\tilde{\Omega}_i'(x,\ \beta) = 2^{-1/2}(\Omega_i(x) - \Omega_i(x+\beta^{-1}))$. Действительно, $\tilde{\Omega}_i$ четна относительно отражения в $x = -{}^1/_2\beta^{-1}$ и

$$\|(H(\beta) - E_i(\beta))\tilde{\Omega}_i\| \to 0$$

при $\beta \downarrow 0$. Так как $H(\beta)$ имеет лишь одно собственное значение с четной собственной функцией вблизи $E_l(\beta)$, получаем, что $\|\Omega_l(\beta)-\tilde{\Omega}_l(\beta)\| \to 0$. Аргументация для штрихованных величин аналогична. В частности,

$$\int_{-{}^1/_2\beta^{-1}}^{\infty} \Omega_l(x, \beta)\,\Omega_l'(x, \beta)\,dx \to \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad \beta \downarrow 0. \tag{7}$$

Пользуясь (7), граничными условиями при $x = -{}^1/_2\beta^{-1}$ и интегрируя по частям

$$\int_{-{}^1/_2\beta^{-1}}^{\infty} [\Omega_l(H(\beta)\,\Omega_l') - \Omega_l'(H(\beta)\,\Omega_l)]\,dx,$$

находим, что

$$\frac{1}{2}(E_l' - E_l) = \Omega_l\left(-\frac{1}{2}\beta^{-1}, \beta\right)\frac{d}{dx}\Omega_l'\left(-\frac{1}{2}\beta^{-1}, \beta\right). \tag{8}$$

При помощи метода, которым мы доказывали (6) и (6′), исходя из того, что на $(-{}^1/_2\beta^{-1}, 0)$ выполнено ${}^1/_4x^2 \leqslant x^2(1+\beta x)^2 \leqslant x^2$, легко показать, что правая часть (8) ограничена снизу величиной $\exp(-a\beta^{-2})$, а сверху — величиной $\exp(-b\beta^{-2})$. Это завершает доказательство (ii).

Обратимся теперь к (iii). При $\varphi \in \mathcal{S}$, как легко видеть, $(H(\beta) - H(0))\varphi \to 0$, когда $\beta \downarrow 0$. Так как спектр $H(\beta)$ стремится к спектру $H(0)$ в силу (i), очевидно, что $(H(\beta)-z)^{-1} - (H(0)-z)^{-1} \to 0$ сильно при $\beta \downarrow 0$, если $z \neq 2n+1$. В частности, если

$$P(\beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-1|={}^1/_2} (z - H(\beta))^{-1}\,dz$$

то $P(\beta) \to P(0)$ сильно, когда $\beta \downarrow 0$. Разумеется, $P(0)$ — проектор ранга 1, а $P(\beta)$ при $\beta \neq 0$ — проектор ранга 2. Как обычно, $e(\beta) \equiv (\Omega_0, P(\beta)\,\Omega_0)^{-1}(\Omega_0, H(\beta)\,P(\beta)\,\Omega_0)$ имеет в качестве асимптотического ряда ряд Релея — Шредингера. Далее, $e(\beta) = \theta(\beta)\,E_0(\beta) + (1-\theta(\beta))\,E_0'(\beta)$ с подходящей функцией $\theta(\beta)$. Поскольку $E_0 - E_0' \to 0$ быстрее, чем любая степень β, оба $E_0(\beta)$ и $E_0'(\beta)$ имеют в качестве асимптотического ряда один и тот же ряд Релея — Шредингера.