

## ХII.6. Резонансы и золотое правило Ферми

*Всякий раз как возникает потребность в анализе или в высшей алгебре, вы должны воспринимать это как тревожный сигнал о том, что оператор пытается подменить опыт теорией.*

В. ГРЭМ, «РАЗУМНЫЙ ВКЛАДЧИК»

До сих пор мы рассматривали последовательно все более сингулярные возмущения изолированных собственных значений. В § 2 был рассмотрен случай, когда существуют и возмущенное собственное значение, и сходящийся ряд теории возмущений, а в § 3 и 4 — случай, когда возмущенное собственное значение существует, но соответствующий ряд теории возмущений расходится. В примерах § 5 не существует и возмущенного собственного значения. В этом разделе будет разобран еще более сингулярный, но, как мы увидим, важный для физики случай, когда не только не существует возмущенного собственного значения, но еще и невозмущенное собственное значение не изолировано.

Простой пример этого явления возникает, если

$$H_0 = -\Delta_1 - \frac{2}{r_1} - \Delta_2 - \frac{2}{r_2}$$

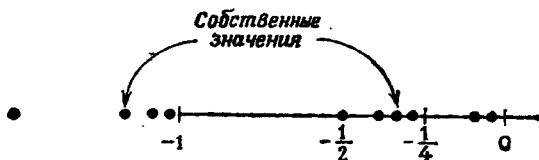
и  $V = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^{-1}$  на  $L^2(\mathbb{R}^6)$ . Точки  $\mathbb{R}^6$  мы будем записывать в виде  $\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \rangle$ , где  $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3$ . Если пренебречь релятивистскими эффектами и перейти к пределу бесконечной массы ядра, то  $H_0 + V$  — это гамильтониан атома гелия. Если  $h = -\Delta - 2/r$  на  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , то  $H_0 = 1 \otimes h + h \otimes 1$ . Так как  $h$  и  $H_0$  самосопряжены, можно применить теорему VIII.33 и выразить спектр  $H_0$  через спектр  $h$  при естественном отождествлении  $L^2(\mathbb{R}^6)$  с  $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^3)$ . Собственные значения  $h$  известны, это  $\{-1/n^2\}_{n=1}^{\infty}$ , так что  $H_0$  имеет собственные значения

$$\{E_{n,m}\} = \left\{ -\left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} \right) \right\}_{n,m=1}^{\infty}.$$

Далее,  $\sigma_{\text{ess}}(h) = [0, \infty)$ , так что  $\sigma_{\text{ess}}(H_0) = [-1, \infty)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma(H_0) &= \{x + y \mid x, y \in [0, \infty) \cup \{-1/n^2\}_{n=1}^{\infty}\} = \\ &= \left\{ -1 - \frac{1}{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty} \cup [-1, \infty). \end{aligned}$$

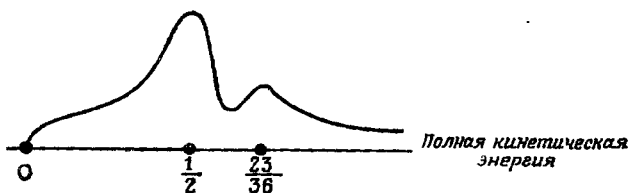
Таким образом, собственные значения  $E_{n,m}$  лежат в непрерывном спектре, если  $n \geq 2$  и  $m \geq 2$  (рис. XII.2). Когда возмущение  $V$  включено, из физических соображений мы ожидаем, что собственные значения, находящиеся в непрерывном спектре, «растворятся». Это ожидание совершенно справедливо, с точностью до двух пояснений, которые мы обсудим в Замечаниях. Однако в физических проявлениях атома гелия остается «память» об этих

Рис. XII.2. Спектр  $H_0$ .

собственных значениях  $H_0$ . При рассеянии электронов на ионах гелия наблюдаются «пики» в сечении рассеяния при полных энергиях системы  $H^+ + e$  вблизи энергий  $E_{n,m}$  (практически на общем фоне выделяются пики только при малых  $m$  и  $n$ ) (рис. XII.3). Похожие пики обнаруживаются и в поглощении света гелием, т. е. при частотах падающего излучения, при которых энергия кванта света близка к разности  $E_{n,m}$  и  $E_{1,1}$  (= энергия основного состояния), свет сильно поглощается (рис. XII.4). Подчеркнем, что наши графики для рассеяния и поглощения очень схематичны. В частности, энергии  $E_{n,m}$  сдвинуты за счет возмущения  $V$ .

Не только положения этих пиков, отвечающие так называемым состояниям Оже, или автоионизации, поддаются наблюдению, но и ширина этих пиков довольно хорошо описывается с помощью вычислительного метода, называемого золотым правилом Ферми. Этот метод выводится чисто эвристически, и мы опишем вывод в Замечаниях. Вывод основан на физической модели механизма, который приводит к появлению пиков. В остальной части этого раздела мы прежде всего выделим математическую величину, отвечающую ширине пиков, а затем покажем, как золотое правило Ферми следует из теории регулярных возмущений Като—Реллиха, по крайней мере для атома гелия. Подчеркнем, что золотое правило Ферми успешно применяется во многих ситуациях, где оно до сих пор не имеет строгого обоснования.

Наша интерпретация золотого правила Ферми будет состоять из трех шагов, из которых два «квазиматематические», а последний — строго математический. Цель первых двух шагов — выделить такую величину, которая подходит для точного математи-

Рис. XII.3. Схематическое изображение сечения упругого рассеяния в реакции  $e + He^+ \rightarrow e + He^+$ .

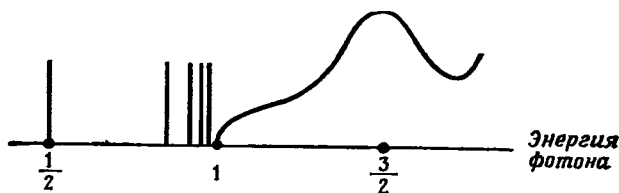


Рис. XII.4. Схематическое изображение сечения поглощения в процессе  $\text{He} + \gamma$ .

ческого анализа. Хотя эта величина и не является в точности шириной пика, мы свяжем ее с шириной при помощи цепочки нестрогих рассуждений. Это положение довольно обычно в математической физике: точные математические величины не совпадают с величинами, наблюдаемыми в эксперименте, но связаны с ними посредством некоторых нестрогих рассуждений. Так что в ряде проблем математической физики непременно наличествует этот внематематический привкус.

На первом шаге мы свяжем ширину пиков с мнимой частью положения полюсов «амплитуды рассеяния». Второй шаг — отыскание полюсов аналитического продолжения резольвенты. Таким образом, квазиматематическая часть анализа состоит в замене неточного понятия «ширина пика» точным — «мнимая часть положения полюса на втором листе аналитического продолжения среднего значения резольвенты по состояниям из некоторого плотного множества». Изучая эту точную величину, мы докажем, что она равна мнимой части собственного значения некоторого несамосопряженного оператора. Главным техническим приемом этого доказательства будет метод скейлинга (масштабных преобразований), который мы дальше будем изучать в § XIII.10.

Рассеяние в квантовой механике описывается квадратом модуля «амплитуды рассеяния» (см. § XI.6). Амплитуда рассеяния, являющаяся комплекснозначной функцией энергии и угла рассеяния, в типичных случаях (см. § XI.7) есть аналитическая функ-

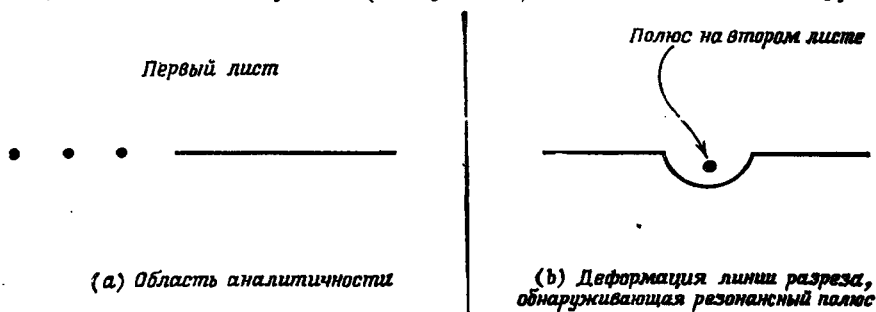


Рис. XII.5. Продолжение амплитуды рассеяния.

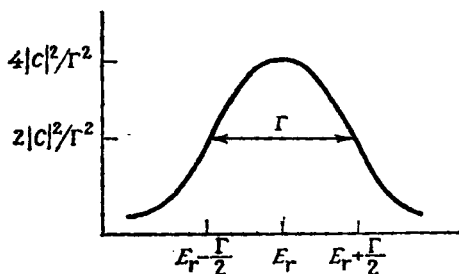


Рис. XII.6. Резонансный пик Брейта—Вигнера.

ция энергии в плоскости с разрезом  $C \setminus \sigma(H)$ , где  $H$  — гамильтониан взаимодействующей квантовой системы. Предположим, что амплитуда рассеяния  $f(E)$  имеет аналитическое продолжение на второй лист (рис. XII.5) и что на втором листе есть простой полюс, расположенный в точке  $E_r - i\Gamma/2$  очень близко от вещественной оси. Тогда

$$f(E) = \frac{C}{E - E_r + i\Gamma/2} + f_b(E),$$

где фоновая часть  $f_b$  аналитична в точке  $E = E_r - i\Gamma/2$ . Если полюс очень близок к вещественной оси и  $f_b(E_r)$  не слишком велика, то

$$|f(E)|^2 = \frac{|C|^2}{(E - E_r)^2 + \Gamma^2/4} + R,$$

где остаток  $R$  мал около  $E = E_r$ . На рис. XII.6 изображен график, называемый резонансом Брейта—Вигнера:  $|C|^2 ((E - E_r)^2 + \Gamma^2/4)^{-1}$ . Заметим, что его ширина на половине максимума есть как раз  $\Gamma$ . Этот полюс амплитуды  $f(E)$  называется резонансным полюсом, а  $\Gamma$  называется шириной резонанса. Если полюсной член много больше, чем фоновый член при  $E = E_r$ , то  $\Gamma$  есть приблизительно ширина «пика» в  $|f(E)|^2$ . Так мы решили первую половину «квазиматематической» задачи — сформулировали понятие ширины пика.

В связи со второй половиной нашей задачи обратимся к тому известному факту, что амплитуда рассеяния связана с граничным значением резольвенты  $(H - E)^{-1}$ , когда  $E$  приближается к вещественной оси из верхней полуплоскости (см. § XI.6 и XI.7). Поэтому будем искать метод продолжения  $(\psi, (H - E)^{-1}\psi) = R_\psi(E)$  на второй лист. Если мы найдем, что такое продолжение возможно для плотного множества  $\psi \in \mathcal{H}$  и что для этого плотного множества функция  $R_\psi(E)$  имеет полюс при  $E = E_r - i\Gamma/2$ , то мы будем связывать  $E$  с резонансным полюсом, а  $\Gamma$  — с шириной резонанса. Разумеется, требуется какое-то основание, дающее нам право считать, что полюс связан именно с  $H$ , а не с

некоторым частным выбором плотного множества  $\psi$ , поэтому мы будем рассматривать лишь такие  $\psi$ , для которых  $(\psi, (H_0 - z)^{-1}\psi)$  также имеет продолжение на второй лист, но без полюса в  $E_r - 1/2i\Gamma$ .

Итак, мы завершили программу отыскания нужной математической величины:

**Определение.** Пусть существует такое плотное множество векторов  $D \subset \mathcal{H}$ , что для всех  $\psi \in D$  обе функции  $(\psi, (H - z)^{-1}\psi) = R_\psi(z)$  и  $(\psi, (H_0 - z)^{-1}\psi) = R_\psi^{(0)}(z)$  имеют аналитическое продолжение на второй лист (через вещественную ось из верхней полуплоскости первого листа). Если  $R_\psi^{(0)}(z)$  аналитична в  $z_0 = E_r - 1/2i\Gamma$ , а  $R_\psi(z)$  при некотором  $\psi$  имеет полюс в  $z_0$ , то будем называть  $z_0$  резонансным полюсом, а  $\Gamma$  — шириной резонанса.

Хотелось бы считать величину  $\Gamma$  шириной пика, но это не всегда правильно. Во-первых, формула, связывающая амплитуду рассеяния с резольвентой, не всегда включает в себя средние только по векторам из  $D$ , а во-вторых, может оказаться, что нельзя пренебречь «фоном».

Для изучения резонансных полюсов нам потребуется технический прием, основанный на масштабных преобразованиях. Здесь мы лишь наметим основные идеи этого приема и применим его к оператору  $h = -\Delta - 2/r$  и к гамильтониану гелия. Детальное изложение этих методов и их применения к общему классу операторов мы отложим до § XIII.10. Для вещественных  $\theta$  определим  $u(\theta)$  на  $L^2(\mathbb{R}^3)$  формулой

$$(u(\theta)f)(r) = e^{3\theta/2} f(e^\theta r);$$

$u(\theta)$  образуют однопараметрическую группу унитарных преобразований пространства  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Легко видеть, что  $u(\theta)$  оставляет инвариантной  $D(h) = D(-\Delta)$  и что

$$h(\theta) \equiv u(\theta) h u(\theta)^{-1} = -e^{-2\theta} \Delta - 2e^{-\theta}/r.$$

Первый факт принципиальной важности, следующий из теорем X.12 и XII.9, состоит в том, что  $h(\theta)$  допускает продолжение до семейства операторов, аналитических в смысле Като во всей плоскости.

Найдем спектр  $h(\theta)$ . Спектр  $-\Delta$  есть  $[0, \infty)$ . Из теоремы XIII.14 и того, что  $r^{-1}(-\Delta + 1)^{-1}$  есть оператор Гильберта — Шмидта, следует, что  $-\Delta - 2e^\theta/r$  имеет спектр  $[0, \infty)$  и, возможно, множество изолированных точек вне  $[0, \infty)$ , даже когда  $\theta$  не вещественно. Далее, каждая такая точка вне  $[0, \infty)$  есть собственное значение конечной кратности. Следовательно,  $h(\theta)$  имеет спектр  $\{e^{-2\theta}\lambda \mid \lambda \in [0, \infty)\}$  плюс, возможно, дополнительный дискретный спектр. Точки дискретного спектра задаются аналитическими функциями  $f(\theta)$  (с возможными алгебраическими

особенностями) в соответствии с теоремами XII.8 и XII.13. Но

$$u(\theta_0) h(\theta_1 + i\theta_2) u(\theta_0)^{-1} = h(\theta_1 + \theta_0 + i\theta_2)$$

с вещественными  $\theta_1, \theta_2, \theta_0$ . Значит,  $h(\theta_1 + i\theta_2)$  унитарно эквивалентен  $h(\theta_1 + \theta_0 + i\theta_2)$ , и потому они имеют одни и те же собственные значения. Вследствие этого функции  $f(\theta)$  постоянны, если постоянна  $\text{Im } \theta$ . Так как  $f(\theta)$  аналитичны, то они постоянны при всех  $\theta$ . При  $\theta = 0$  имеем  $\sigma_{pp}(h) = \{-1/n^2\}_{n=1}^{\infty}$ , так что

$$\sigma(h(\theta)) = \{e^{-2\theta\lambda} | \lambda \in [0, \infty)\} \cup \{-1/n^2\}_{n=1}^{\infty}$$

(рис. XII.7). Мы не доказали, что  $h(\theta)$  не может иметь собственных значений в секторе  $0 > \arg \lambda > -2 \text{Im } \theta$ , но детальный анализ с использованием явных решений уравнения Шредингера с кулоновым потенциалом показывает, что их там нет,

Рассмотрим масштабные преобразования  $H_0$  и  $H_0 + \beta V$ . Определим  $U(\theta)$  на  $\mathbb{R}^6$  формулой  $(U(\theta)F)(r_1, r_2) = e^{i\theta F}(e^{\theta r_1}, e^{\theta r_2})$  при вещественных  $\theta$ . Аналогично, для вещественных  $\theta$  положим  $V(\theta) \equiv U(\theta)VU(\theta)^{-1} = e^{-\theta V}$  и  $H_0(\theta) = U(\theta)H_0U(\theta)^{-1} = h(\theta) \otimes 1 + 1 \otimes h(\theta)$ . И  $H_0(\theta)$ , и  $V(\theta)$  имеют аналитические продолжения типа (A) на всю комплексную область. Для всех  $\theta$  оператор  $H_0(\theta)$  имеет вид  $A \otimes 1 + 1 \otimes B$ , хотя  $A$  и  $B$  не самосопряжены. В § XIII.9 мы докажем, что

$$\sigma(A \otimes 1 + 1 \otimes B) = \{x + y | x \in \sigma(A), y \in \sigma(B)\}.$$

Следовательно,

$$\sigma(H_0(\theta)) = \{x + y | x, y \in \sigma(h_0(\theta))\} =$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{n^2} + \lambda e^{-2\theta} \mid \lambda \geq 0 \right\} \cup \left\{ -\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \mid n, m \text{ целые} \right\} \cup$$

$$\cup \{ \lambda e^{-2\theta} \mid \lambda \geq 0 \}$$

(рис. XII.8). В частности, собственные значения, погруженные в  $\sigma(H_0)$ , суть изолированные дискретные собственные значения  $H_0(\theta)$  при невещественных  $\theta$ . Все собственные значения  $E_{n,m}$  ( $n, m \geq 2$ ) вырождены. Можно воспользоваться симметриями и разложить  $L^2(\mathbb{R}^6)$  в бесконечную прямую сумму пространств  $\mathcal{H}_k$ , каждое из которых остается инвариантным под действием операторов  $H_0(\theta)$ ,  $V(\theta)$ . При фиксированных  $n$  и  $m$  каждое  $E_{n,m}$  есть собственное значение лишь для конечного числа операторов  $H_0(\theta) \upharpoonright \mathcal{H}_k$ , при-

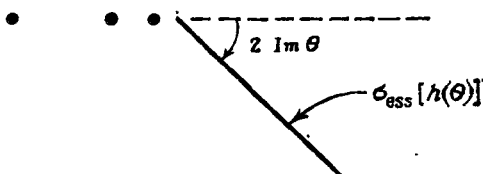
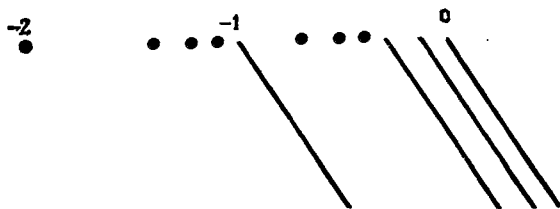
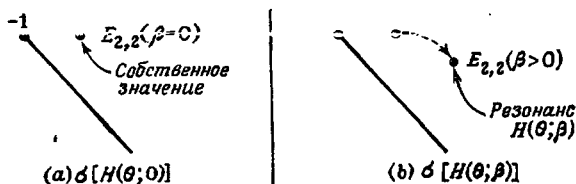


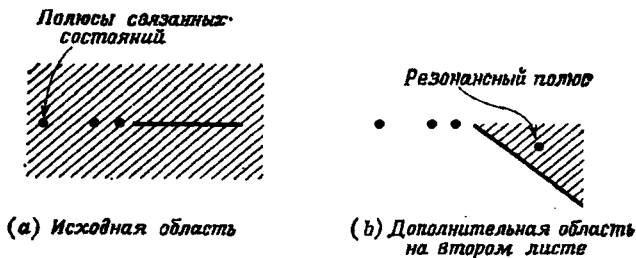
Рис. XII.7.  $\sigma(h(\theta))$ ,  $0 \leq \text{Im } \theta \leq \pi/2$ .

Рис. XII.8.  $\sigma(H_0(\theta))$ .

чем для некоторых из  $\mathcal{H}_k$  собственное значение  $E_{n,m}$  невырождено. Для каких  $\mathcal{H}_k$  оно есть собственное значение  $H_0(\theta) \uparrow \mathcal{H}_k$  и для каких оно невырождено — зависит от  $n$  и  $m$ . Ниже мы ограничимся рассмотрением тех  $\mathcal{H}_k$ , для которых  $E_{n,m}$  невырождено, но при этом не будем вводить новых обозначений. Некоторые детали теории с вырождением и разложение с учетом симметрий мы рассмотрим в Замечаниях.

Пусть  $H(\theta; \beta) = H_0(\theta) + \beta V(\theta)$ . Согласно теории регулярных возмущений, описанной в § 2, если  $\theta$  фиксировано и  $|\beta|$  достаточно мало, то  $H(\theta; \beta)$  имеет собственное значение вблизи  $E_{n,m}$ , которое задается сходящимся степенным рядом по  $\beta$  (рис. XII.9 (а), (б)). Теперь фиксируем  $\beta$  и будем менять  $\theta$ . Так как  $H(\theta; \beta)$  есть аналитическое семейство по  $\theta$  при фиксированном  $\beta$ , мы будем получать собственное значение  $E^{(\theta)}(\beta)$  до тех пор, пока собственное значение остается изолированным. Функция  $E^{(\theta)}(\beta)$  аналитична по  $\theta$  при фиксированном  $\beta$ . Поскольку  $H(\theta; \beta)$  и  $H(\theta'; \beta)$  унитарно эквивалентны при вещественном  $\theta = \theta'$ ,  $E^{(\theta)}(\beta)$  — постоянная функция  $\theta$ . Мы можем теперь доказать, что  $\text{Im} E_{2,2}^{(\theta_0)}(\beta_0) \leq 0$ , если  $\beta_0$  вещественно и  $\text{Im} \theta_0 > 0$ . В самом деле, предположим, что  $\text{Im} E_{2,2}^{(\theta_0)}(\beta_0) > 0$ . Тогда собственное значение останется изолированным, если мы продолжим  $\theta$  к нулю, сохраняя  $\text{Im} \theta \geq 0$ . Отсюда следовало бы, что  $H(0; \beta_0)$  имеет комплексное собственное значение, что невозможно. Следовательно,  $\text{Im} E_{2,2}^{(\theta)}(\beta) \leq 0$ . Если  $\text{Im} E_{2,2}^{(\theta_0)}(\beta) < 0$  и мы попробуем продолжить  $\theta$  к нулю, то существенный спектр сольется с собственным значением, нарушая применимость дискретной теории возмущений. Значит, нет ника-

Рис. XII.9. Траектория  $E(\beta, \theta)$  при фиксированном  $\theta$ ;  $\text{Im} \theta > 0$ .

Рис. XII.10. Область аналитичности  $R_\Psi(E)$ .

кого противоречия между самосопряженностью  $H_0 + \beta_0 V$  при вещественных  $\beta_0$  и появлением комплексных собственных значений  $E_{2, \frac{1}{2}}^{(\theta_0)}(\beta_0)$  в нижней полуплоскости, при вещественном  $\beta_0$  и  $\text{Im } \theta_0 > 0$ .

Второе принципиальное замечание состоит в том, что эти комплексные собственные значения  $H(\theta; \beta)$  связаны с полюсами резольвенты оператора  $H(\beta) = H_0 + \beta V$  на втором листе. Пусть  $\psi \in \mathcal{H}$  — такой вектор, что  $U(\theta)\psi$  имеет аналитическое продолжение на всю  $\mathbb{C}$ . Выберем  $\psi$  так, что он будет аналитическим вектором для инфинитезимального генератора группы  $U(\theta)$ . Рассмотрим функцию  $R_\Psi(E) = (\psi, (H_0 + \beta V - E)^{-1} \psi)$ , первоначально определенную в плоскости с разрезом  $\mathbb{C} \setminus \sigma(H_0 + \beta V)$ . При вещественных  $\theta$

$$\begin{aligned} R_\Psi(E) &= (U(\theta)\psi, U(\theta)(H_0 + \beta V - E)^{-1}U(\theta)^{-1}U(\theta)\psi) = \\ &= (U(\theta)\psi, (H(\theta; \beta) - E)^{-1}U(\theta)\psi). \end{aligned}$$

Фиксируем  $E$  в верхней полуплоскости. Тогда последняя формула имеет место в силу аналитического продолжения, если  $0 \leq \text{Im } \theta < \pi/2$ . Следовательно, мы можем продолжить  $R_\Psi(E)$  через вещественную ось на части второго листа (рис. XII.10). Поскольку  $(H(\theta; \beta) - E)^{-1}$  имеет полюсы, когда  $E$  есть собственное значение  $H(\theta; \beta)$ , аналитическое продолжение  $R_\Psi(E)$  будет иметь полюсы в комплексных собственных значениях  $H(\theta; \beta)$ . В итоге комплексные собственные значения  $H(\theta; \beta)$  суть положения полюсов резольвенты на втором листе.

Ширина этих резонансных полюсов по определению есть мнимая часть  $E^{(\theta)}(\beta)$ . В свою очередь  $E^{(\theta)}(\beta)$  при фиксированном  $\theta$  и малых  $\beta$  задается сходящимся рядом теории возмущений

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n$ . Вследствие нашей основной аргументации о постоянстве по  $\theta$  коэффициенты  $a_n$  не зависят от  $\theta$ . Очевидно, что  $a_0$  вещественно, а так как  $\text{Im } E \leq 0$  при всех вещественных  $\beta$ , то и  $\text{Im } a_1 = 0$ . Таким образом,  $a_2$  есть первый из коэффициентов  $a_n$ , для которого, возможно,  $\text{Im } a_n \neq 0$ . Если ряд теории возмущений быстро сходится, то  $|\text{Im } E(\beta)| = \Gamma/2 \approx (\text{Im } a_2) \beta^2$ . Следова-



тельно,

$$\Gamma \approx (\beta^2) (2 \operatorname{Im} a_2).$$

Здесь  $a_2$  — коэффициент Релея — Шредингера, и его можно сосчитать методами § 1. Именно, если  $\Omega(\theta; 0)$  — невозмущенный собственный вектор  $H(\theta; 0) \equiv H_0(\theta) + \Omega(\theta; 0)$  комплексно сопряжен ему как элемент  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , то (задача 33)

$$a_2 = (2\pi i)^{-1} \oint_{|E-E_0|=\varepsilon} \overline{(\Omega(\theta; 0), V(H_0(\theta) - E)^{-1} V \Omega(\theta; 0))} \frac{dE}{E - E_0},$$

где  $E_0$  — невозмущенное собственное значение. Рассмотрим теперь функцию

$$f(\theta, E) = \overline{(\Omega(\theta; 0), V(\theta)(H_0(\theta) - E)^{-1} V(\theta)\Omega(\theta; 0))} - \\ - |(\Omega(\theta; 0), V(\theta)\Omega(\theta; 0))|^2 (E_0 - E)^{-1}.$$

Функция  $f(\theta, E)$  аналитична в  $E = E_0$  при фиксированных  $\theta$  с  $\operatorname{Im} \theta > 0$ , так как мы явно вычли полюсной член. Следовательно, по интегральной теореме Коши

$$a_2 = f(\theta, E)|_{E=E_0} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(\theta, E_0 + i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(\theta = 0, E_0 + i\varepsilon).$$

На последнем шаге мы воспользовались тем, что при  $\operatorname{Im} E > 0$  значение  $f(\theta, E)$  определено при  $\operatorname{Im} \theta = 0$  и не зависит от  $\theta$  в полосе  $0 \leq \operatorname{Im} \theta < \pi/2$ . Следовательно,

$$\operatorname{Im} a_2 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2i} [(\Omega_0, V \{ (H_0 - E_0 - i\varepsilon)^{-1} - (H_0 - E_0 + i\varepsilon)^{-1} \} V \Omega_0) - \\ - |(\Omega_0, V \Omega_0)|^2 \{ (E - E_0 - i\varepsilon)^{-1} - (E - E_0 + i\varepsilon)^{-1} \} |_{E=E_0}].$$

По формуле Стоуна (теорема VII.13),  $\operatorname{Im} a_2$  есть функция спектральных проекторов оператора  $H_0$  за вычетом проектора на собственный вектор  $\Omega_0$ , который убирается вычитанием полюса. Теперь мы можем доказать такую теорему:

**Теорема XII.24** (золотое правило Ферми для состояний Оже в гелии). Пусть заданы  $n$  и  $m$ , причем  $n > 1$ ,  $m > 1$ . Ограничимся подпространством с такой симметрией, что  $E_{n,m}$  в нем есть невырожденное собственное значение. Тогда для вещественных малых  $\beta$  резольвента оператора

$$-\Delta_1 - \Delta_2 - \frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_2} + \frac{\beta}{|r_1 - r_2|}$$

имеет полюс на втором листе вблизи  $E_0 \equiv a_0 = -n^{-2} - m^{-2}$ . Положение полюса дается функцией  $E(\beta)$ , аналитической при малых  $\beta$ :

$$E(\beta) = a_0 + a_1 \beta + a_2 \beta^2 + \dots$$

Пусть  $\{P_\Omega\}$  — спектральное семейство для  $H_0 = -\Delta_1 - \Delta_2 - 2/r_1 - 2/r_2$ ; положим  $\bar{P}(E) = P_{(-\infty, E) \setminus \{E_0\}}$ . Пусть  $\Omega_0$  — невозмущенный собственный вектор  $H_0$ . Тогда

(а)  $g(E) = (\Omega_0, V\bar{P}(E)V\Omega_0)$  аналитична в  $E = E_0$ ;

(б)  $\text{Im } a_2 = \pi \frac{dg}{dE} \Big|_{E=E_0}$ .

*Доказательство.* После предшествовавшего обсуждения доказать нужно только (а) и (б). По формуле Стоуна для этого достаточно показать, что

$$(\Omega_0, V \{ (H_0 - E)^{-1} - (E_0 - E)^{-1} P_{\{E_0\}} \} V \Omega_0)$$

имеет аналитическое продолжение из области  $\text{Im } E > 0$  на вещественную ось и ниже вблизи  $E = E_0$ . В самом деле, тогда  $g(E)$  есть интеграл аналитической функции и его производная есть как раз (с точностью до множителя  $\pi$ ) то выражение, которое было получено для  $\text{Im } a_2$ . Чтобы убедиться в том, что искомая функция аналитична в  $E = E_0$ , следует только показать, что  $U(\theta)V\Omega_0$  имеет аналитическое продолжение в полосу  $|\text{Im } \theta| < \varepsilon$ . Но

$$U(\theta)V\Omega_0 = [U(\theta)VU(\theta)^{-1}]U(\theta)\Omega_0 = (e^{-\theta V})[U(\theta)\Omega_0].$$

Существование аналитического продолжения для  $U(\theta)\Omega_0$  доказывается с помощью рассуждения, основанного на принципе симметрии Шварца (задача 35). ■

Итак, мы показали, что в низшем порядке теории возмущений

$$\Gamma = 2 \text{Im } a_2 = 2\pi \frac{d}{dE} (\Omega_0, V\bar{P}(E)V\Omega_0) \Big|_{E=E_0}.$$

Эта формула представляет собой золотое правило Ферми, записанное, правда, в несколько иной форме, чем принято в физической литературе.

### ЗАМЕЧАНИЯ

Изобилие разнообразных сведений о теории возмущений дискретных спектров можно найти в классической книге Т. Като, Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.

§ XII.1. Дополнительное обсуждение материала этого раздела см. у Като, гл. I и II, и у Реллиха: F. Rellich, Perturbation Theory of Eigenvalue Problems. — New York: Gordon and Breach, 1969. В книге Кноппа (К. Кнорр, Theory of Functions, Part II. — New York: Dover, 1947) обсуждаются теоремы XII.1 и XII.2 и, в частности, доказывается теорема XII.2.

Теорема Реллиха была доказана впервые в работе: F. Rellich, Störungstheorie der Spektralzerlegung, I, — Math. Ann. 113 (1937), 600—619, Чтобы