Пусть $\{P_\Omega\}$—спектральное семейство для $H_0=-\Delta_1-\Delta_2-2/r_1-2/r_2$; положим $\tilde{P}(E)=P_{(-\infty,E)\setminus\{E_0\}}$. Пусть $\Omega_0$—невозмущенный собственный вектор $H_0$. Тогда

(a) $g(E)=(\Omega_0, V\tilde{P}(E)V\Omega_0)$ аналитична в $E=E_0$;

(b) $\operatorname{Im} a_2=\pi\frac{dg}{dE}\Big|_{E=E_0}$.

*Доказательство.* После предшествовавшего обсуждения доказать нужно только (a) и (b). По формуле Стоуна для этого достаточно показать, что

$$(\Omega_0, V\{(H_0-E)^{-1}-(E_0-E)^{-1}P_{\{E_0\}}\}V\Omega_0)$$

имеет аналитическое продолжение из области $\operatorname{Im} E>0$ на вещественную ось и ниже вблизи $E=E_0$. В самом деле, тогда $g(E)$ есть интеграл аналитической функции и его производная есть как раз (с точностью до множителя $\pi$) то выражение, которое было получено для $\operatorname{Im} a_2$. Чтобы убедиться в том, что искомая функция аналитична в $E=E_0$, следует только показать, что $U(\theta)V\Omega_0$ имеет аналитическое продолжение в полосу $|\operatorname{Im}\theta|<\varepsilon$. Но

$$U(\theta)V\Omega_0=[U(\theta)VU(\theta)^{-1}]\,U(\theta)\Omega_0=(e^{-\theta}V)[U(\theta)\Omega_0].$$

Существование аналитического продолжения для $U(\theta)\Omega_0$ доказывается с помощью рассуждения, основанного на принципе симметрии Шварца (задача 35). ∎

Итак, мы показали, что в низшем порядке теории возмущений

$$\Gamma=2\operatorname{Im} a_2=2\pi\frac{d}{dE}(\Omega_0,\ V\tilde{P}(E)V\Omega_0)\,|_{E=E_0}.$$

Эта формула представляет собой золотое правило Ферми, записанное, правда, в несколько иной форме, чем принято в физической литературе.

## ЗАМЕЧАНИЯ

Изобилие разнообразных сведений о теории возмущений дискретных спектров можно найти в классической книге Т. Като, Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.

*§ XII.1.* Дополнительное обсуждение материала этого раздела см. у Като, гл. I и II, и у Реллиха: F. Rellich, Perturbation Theory of Eigenvalue Problems.—New York: Gordon and Breach, 1969. В книге Кноппа (K. Knopp, Theory of Functions, Part II. — New York: Dover, 1947) обсуждаются теоремы XII.1 и XII.2 и, в частности, доказывается теорема XII.2.

Теорема Реллиха была доказана впервые в работе: F. Rellich, Störungstheorie der Spektralzerlegung, I.—*Math. Ann.* **113** (1937), 600—619. Чтобы оценить глубину этой теоремы, заметим, что она не справедлива для аналитических возмущений, зависящих от двух параметров. В этом можно убедиться при помощи такого примера (модификация примера, рассмотренного Реллихом): пусть $T(\beta, \lambda) = \beta\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right) + \lambda\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$; $T(\beta, \lambda)$ аналитичен по $\beta$ и $\lambda$ и самосопряжен при вещественных $\beta$ и $\lambda$, однако его собственные значения $E(\beta, \lambda) = \pm\sqrt{\beta^2+\lambda^2}$ не аналитичны по двум переменным $\beta$ и $\lambda$. Теорема Реллиха распространена на различные ситуации, включающие матрицы нормальных операторов, Джемисоном (S. L. Jamison, Perturbation of normal operators. — *Proc. Amer. Math. Soc.* 5 (1954), 103—110) и Вольфом (F. Wolf, Analytic perturbations of operators in Banach spaces. — *Math. Ann.* **124** (1954), 317—333). В частности, Вольф показал, что если $A(\lambda)$ есть аналитическое семейство и $A(\lambda_n)$ нормален для последовательности $\lambda_n \to 0$, то собственные значения оператора $A(\lambda)$ аналитичны в $\lambda = 0$. Содержание этой теоремы прояснено Батлером (J. Butler, Perturbation series for eigenvalues of analytic non-symmetric operators. — *Arch. Math.* **10** (1959), 21—27); см. задачу 21.

Для $2\times2$-матриц связь между аномальным поведением жордановых форм и особенностями собственных значений проста: если $T(\beta) = T_0 + T_1\beta + \ldots + T_n\beta^n + \ldots$ есть аналитическая функция со значениями в множестве $2\times2$-матриц и с неаналитическими при $\beta = 0$ собственными значениями, то для некоторых $n$ матрицы $T_0, \ldots, T_{n-1}$ кратны $I$, а $T_n$ не диагонализуема. В общем случае связь гораздо сложнее; неявно она содержится в § II.2.3 книги Като; см. также задачу 23.

Ряд Релея — Шредингера назван так в связи с фундаментальными исследованиями лорда Релея (Релей, Теория звука. — М. — Л.: Гостехиздат, 1955) и Шредингера (E. Schrödinger, Quantisierung als Eigenwertproblem, IV. Störungstheorie mit Anwendung auf den Starkeffekt der Balmerlinien. — *Ann. Physik* **80** (1926), 437—490). Использованная при обсуждении ряда Релея—Шредингера техника проекторов восходит к Б. Секефальви-Надю (B. Sz-Nagy, Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert.—*Comm. Math. Helv.* **19** (1946/47), 347—366) и Като (T. Kato, On the convergence of the perturbation method, I, II. — *Progr. Theor. Phys.* 4 (1949), 514—523: 5 (1950), 95—101: 207—212).

*§ XII.2.* Первоначально теория регулярных возмущений появилась в работах Реллиха: F. Rellich, Störungstheorie der Spektralzerlegung I—V. — *Math. Ann.* **113** (1937), 600—619, 677—685; **116** (1939), 555—570; **117** (1940), 356—382; **118** (1942), 462—484. Упрощения в нее были внесены Надем и Като (см. замечания к § 1). Дополнительные обсуждения можно найти в книгах Реллиха и Като, а также в книге К. Фридрихса, Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1969.

Наше определение аналитического семейства слегка отличается от определения Като, данного в его книге (стр. 458), и Реллиха в третьей статье из его серии. Если $T(\beta)$ замкнут и имеет непустое резольвентное множество, определения совпадают. Определение Като — Реллиха охватывает некоторые случаи, когда $T(\beta)$ может иметь пустое резольвентное множество, но, так как эти случаи редко встречаются в практике, мы воспользовались более узким, но технически более простым определением.

Дальнейшее обсуждение приложений теории возмущений к атомной физике см. в книге Мидзусимы: M. Mizushima, Quantum Mechanics of Atomic Spectra and Atomic Structure. — New York: Benjamin, 1970. В частности, там можно найти все, что нужно, о сверхтонкой структуре атома водорода.

Теорема XII.10 доказана Б. Саймоном и Р. Хег-Кроном (B. Simon, R. Höegh-Krohn, Hypercontractive semigroups and two-dimensional self-coupled Bose fields. — *J. Funct. Anal.* — **9** (1972), 121—180. Другая техника получения оценок снизу для радиуса сходимости ряда Релея — Шредингера в специальных случаях, представляющих интерес для физики, предложена Аткинсоном (D. Atkinson, Bound state perturbation theory: A new approach.—*Nuclear Phys.* **B20** (1970), 125—158).

Теорема XII.12. была впервые доказана Като (T. Kato, On the adiabatic theorem of quantum mechanics.—*J. Phys. Soc. Japan* 5 (1950), 435—439). Более слабая теорема, достаточная для того, чтобы применить ее в теореме XII.13, как мы это сделали, содержится в работе Надя, упомянутой в замечаниях к § 1. Надь дает явную формулу для обратимого оператора $W(\beta)$, определяемого при достаточно малых $|\beta|$ посредством $W(\beta)P(0)W(\beta)^{-1}=P(\beta)$. Именно (см. задачу 19)

$$W(\beta)=[1-(P(\beta)-P(0))^2]^{-1/2}[P(\beta)P(0)+(1-P(\beta))(1-P(0))].$$

Лемму, относящуюся к теореме XII.12, можно также доказать при помощи теорем о неподвижной точке.

§ *XII.3.* Эвристические аргументы в пользу расходимости ряда теории возмущений для ангармонического осциллятора приводятся в книге Готфрида: K. Gottfried, Quantum Mechanics.—New York: Benjamin, 1966, v. 1, pp. 361—362. Образец всех подобных эвристических рассуждений дан Дайсоном (F. Dyson, Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics.—*Phys. Rev.* 85 (1952), 631—632).

Оценки, нужные для доказательства расходимости ряда теории возмущений ($|a_n|\geqslant AB^n\Gamma(n/2)$), найдены Бендером и By (C. Bender, T. T. Wu, Anharmonic oscillator.—*Phys. Rev.* **184** (1969), 1231—1260). Их доказательство построено по образцу аналогичного доказательства для теории поля с $(\varphi^4)_2$-взаимодействием у Джаффе (A. M. Jaffe, Divergence of perturbation theory for bosons.—*Commun. Math. Phys.* **1** (1965), 127—149).

Природа сингулярности собственных значений ангармонического осциллятора при $\beta=0$ изучена весьма подробно. Функция $E(\beta)$ допускает аналитическое продолжение на трехлистную поверхность, на которой точка $\beta=0$ *не является* изолированной особенностью. Этот факт был подсказан приближенными вычислениями Бендера и By (см. выше) и был доказан Саймоном (B. Simon, Coupling constant analyticity for the anharmonic oscillator.—*Ann. Phys.* 58 (1970), 76—136).

Особенно ясное обсуждение ряда Гелл-Манна—Лоу и его *формальный* вывод в квантовой теории поля можно найти в книге: Дж. Бьёркен и С. Дрелл, Релятивистская квантовая теория. Т. 1.—М.: Наука, 1978. Общая теория асимптотических рядов рассмотрена в книге В. Вазова, Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: Мир, 1968. Таблица в примере 1 заимствована из цитированной статьи Саймона в *Annals of Physics*.

Асимптотический характер ряда теории возмущений впервые доказал Титчмарш (E. Titchmarsh, Some theorems on perturbation theory I, II.—*Proc. Roy. Soc.* **A200** (1949), 34—46; **A201** (1950), 473—479). Като обобщил результаты Титчмарша (T. Kato, On the convergence of the perturbation method.—*J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. I, **6** (1951), 145—226, и Perturbation theory of semi-bounded operators.—*Math. Ann.* **125** (1953), 435—447). См. также V. Kramer, Asymptotic inverse series.—*Proc. Amer. Math. Soc.* **7** (1956), 429—437, и Asymptotic perturbation series.—*Trans. Amer. Math. Soc.* **85** (1957), 88—105.

Некоторое обобщение результатов Титчмарша на несимметрические операторы можно найти в работах Уэ: D. Huet, Phénomènes de perturbation singulière.—*C. R. Acad. Sci. Paris* **244** (1957), 1438—1440; **246** (1958), 2096—2098; **247** (1958), 2273—2276; **248** (1959), 58—60, и Phénomènes de perturbation singulière dans les problèmes aux limites.—*Ann. Inst. Fourier* **10** (1960), 1—96. Другой метод доказательства асимптотического характера рядов теории возмущений, применимый к положительным самосопряженным возмущениям положительных самосопряженных операторов, обсуждается в приложении II к статье Саймона в *Annals of Physics* и в статье Гринли: W. M. Greenlee, Singular perturbation of eigenvalues.—*Arch. Rational Mech. Anal.* 34 (1969), 143—164.

Асимптотической теории возмущений посвящена гл. VIII книги Като. Като подчеркивает, что требуется только устойчивость собственного значения и сильная резольвентная сходимость; см. также наше обсуждение теоремы XII.16$^1/_2$.

Теоремы XII.15 и XII.16 обсуждаются и доказываются в работе Саймона: B. Simon, Determination of eigenvalues by divergent perturbation series.—*Advances in Math.* 7 (1971), 240—253. Асимптотическая природа ряда теории возмущений для теорий поля $(\varphi^{2n})_2$ с пространственным обрезанием в секторах $\{\beta \mid |\arg\beta| \leqslant \theta\}$ при $\theta < \pi/2$ была впервые продемонстрирована в работе Саймона и Хег-Крона, цитированной в замечаниях к § 2. Расширение на случай $\theta < \pi$ для $(\varphi^4)_2$ (с помощью теоремы XII.15) впервые появилось в работе Саймона: B. Simon, Borel summability of the ground state energy in spatially cutoff $(\varphi^4)_2$.—*Phys. Rev. Lett.* 25 (1970), 1583—1586. Расширение на $\theta < \pi$ для общего случая $(\varphi^{2n})_2$-теорий выполнено Розеном и Саймоном (L. Rosen, B. Simon, The $(\varphi^{2n})_2$ Hamiltonian for complex coupling constant.—*Trans. Amer. Math. Soc.* 165 (1972), 365—379). Было также показано, что некоторые величины имеют асимптотические ряды и для теории поля $P(\varphi)_2$ в бесконечном объеме; наиболее ранний результат такого рода см. в работе Димока: J. Dimock, Asymptotic perturbation expansions in the $P(\varphi)_2$ quantum field theory.—*Commun. Math. Phys.* 35 (1974), 347—356.

Существует формальная связь между энергиями вакуума и суммой связных диаграмм Фейнмана без внешних линий (см. указанную выше книгу Бьёркена и Дрелла). Если модифицировать правила Фейнмана, вставляя в каждую «вершину» вместо $\delta$-функции преобразование Фурье функции $g$, т. е. пространственное обрезание, то после интегрирования по времени мы получим ряд Релея—Шредингера для энергии вакуума.

Потенциал двойной ямы вызвал большой интерес. Укажем работы Каца и Томпсона (M. Kac, C. Thompson, Phase transitions and eigenvalue degeneracy of a one dimensional anharmonic oscillator.—*Stud. Appl. Math.* 48 (1969), 257—264) и Айзексона (D. Isacson, The critical behavior of $(\varphi^4)_1$.—*Commun. Math. Phys.* 53 (1977), 257—275). В частности, Кац и Томпсон доказали, что $E_l'-E_l$ стремится к нулю как $\exp(-b\beta^{-2})$. Были также работы о суммируемости по Борелю для потенциала двойной ямы. Брезан, Паризи и Зинн-Жюстен (E. Brézin, G. Parisi, J. Zinn-Justin, Perturbation Theory at large orders for potentials with degenerate minima.—*Phys. Rev.* **D16** (1977), 408) изучали поведение коэффициентов Релея—Шредингера при больших $n$ как с помощью численных методов, так и с помощью некоторой еще не строгой теории. Их результаты наводят на мысль, что эти ряды не суммируемы по Борелю, и это было доказано Сокалом (A. Sokal, Princeton preprint, 1977).

Существует допускающая точное решение модель, похожая на потенциал двойной ямы, которая рассматривается на стр. 66—77 книги Мерцбахера (E. Merzbacher, Quantum Mechanics.—New York: Wiley, 1961) и в книге В. П. Маслова, Теория возмущений и асимптотические методы.—М.: Изд. МГУ, 1965.

Особый интерес к потенциалу двойной ямы вызван тем, что соответствующая двумерная теория поля обнаруживает совершенно другое поведение. В задаче о двойной яме, хотя разность $E_0'-E_0$ мала, она отлична от нуля и основное состояние симметрично относительно $x=-{}^1/_2\,\beta^{-1}$. В соответствующей теории поля, если выбрать симметричную предельную теорию, вакуум вырожден и (после соответствующего разложения) теории с единственным вакуумом не обладают этой симметрией. Это было доказано Глиммом, Джаффе и Спенсером (J. Glimm, A. Jaffe, T. Spencer, Phase transitions for $(\varphi^4)_2$ quantum fields.—*Commun. Math. Phys.* 45 (1975), 203—216; русский перевод в сб.: Евклидова квантовая теория поля, марковский подход.—М.: Мир, 1978, с. 46—64). Это различие между одним и двумя измерениями аналогично соответствующему поведению модели Изинга, где в двух измерениях есть фазовый переход, а в одном — нет. Мы вернемся еще к этой теме в одном из последующих томов.

*§ XII. 4.* Теорема Карлемана (теорема XII.17) доказана в его книге: T. Carleman, Les Fonctions Quasianalytiques.—Paris: Gauthier-Villars, 1926. Метод доказательства общего случая совершенно отличен от того, с помощью которого доказан частный случай — теорема XII. 18. При доказательстве этой теоремы мы следовали Харди (Г. Харди, Расходящиеся ряды.— М.: ИЛ, 1951).

Идея применить сильное асимптотическое условие к расходящимся рядам теории возмущений и, в частности, к ангармоническому осциллятору возникла в работе Граффи, Грекки и Саймона (S. Graffi, V. Grecchi, B. Simon, Borel summability: Application to the anharmonic oscillator.—*Phys. Lett.* **32B** (1970), 631—634). Теорема XII. 20 была сформулирована и доказана в статье Саймона в *Advances in Mathematics*, цитированной в замечаниях к § 3, а пример 2 рассмотрен впервые в статье Саймона в *Rhysical Reviev Letters*, также упомянутой выше. Основная литература по двумерным бозонным теориям поля обсуждалась в замечаниях к § X. 7. Пример 3 (осциллятор $x^{2n}$) рассмотрен в вышеупомянутой статье Граффи и др. Было установлено, что некоторые асимптотические ряды в теории $P(\varphi)_2$ в бесконечном объеме суммируемы по Борелю. См. J.-P. Eckmann, J. Magnen, R. Sénéor, Decay properties and Borel summability for the Schwinger functions in $P(\varphi)_2$ theories.— *Commun. Math. Phys.* **39** (1975), 251—271. Суммируемость по Борелю ряда для эффекта Зеемана (атом в постоянном магнитном поле) была установлена Авроном, Хербстом и Саймоном (J. Avron, I. Herbst, B. Simon, Schrödinger Operators with Magnetic Fields.—Preprint, 1977).

Теорема Ватсона была доказана им в работе: G. Watson, A theory of asymptotic series.—*Philos. Trans. Roy. Soc. London* Ser. A **211** (1912), 279—313. Борель предложил свой метод и показал на многих примерах его эффективность (E. Borel, Mémoire sur les séries divergentes.—*Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup.* **16** (1899), 9—136).

Метод Бореля является примером регулярного метода суммирования. Метод суммирования—это процедура, позволяющая определить сумму $\alpha$ некоторого формального ряда $\Sigma a_n$. Метод называется регулярным, если в случае ряда $\Sigma a_n$, абсолютно сходящегося к $\alpha_0$, указанная процедура применима и дает в качестве суммы $\alpha_0$. Регулярность метода Бореля, следующая из теоремы Ватсона, была впервые доказана Харди (G. Hardy, On differentiation and integration of divergent series.—*Trans. Cambridge Phil. Soc.* **19** (1904), 297—321).

Один из недостатков метода Бореля в непосредственной его форме состоит в том, что он связан с аналитическим продолжением, которое может оказаться затруднительным с вычислительной точки зрения. Эту трудность можно преодолеть, если найти конформное отображение, которое переводит область аналитичности из теоремы Ватсона в область, содержащую единичный круг, причем так, что положительная вещественная полуось отображается внутрь круга. Тогда «продолжение» можно проделать, просто суммируя степенной ряд в этой области. Подробнее см. N.-E. Nörlund, Leçons sur les séries d'interpolation.—Paris: Gauthier-Villars, 1926; G. Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformation.—Basel: Birkhäuser, 1955, B. 2, K. 11; B. Hirsbrunner, J. Loeffel, Sur les séries asymptotiques sommables selon Borel.—*Helv. Phys. Acta.* **48** (1975), 546. Последняя работа содержит приложения к осциллятору $x^4$.

Относительно другого метода суммирования — метода аппроксимантов Паде — известно, что с его помощью правильно суммируются ряды теории возмущений для возмущений типа $x^4$ и $x^6$ оператора $p^2+x^2$. Этот метод рассмотрен в статье Бейкера: G. A. Baker, The theory and application of the Padé approximant method.—*Advances Theor. Phys.* **1** (1966), 1—58. Регулярность метода Паде не установлена. Применимость этого метода к осцилляторам $x^4$ и $x^6$ доказана в статье: J. J. Loeffel, A. Martin, R. Simon and A. S. Wightman, Padé approximants and the anharmonic oscillator.—*Phys. Lett.* **30B** (1969), 656—658. Преимущество метода Паде в его расчетной простоте: есть явные формулы для аппроксимантов, и мы можем явно контролировать ошибки. Недостаток его в ограниченной применимости (численные данные показывают, что он не работает для осциллятора $x^8$) и в трудности доказательства сходимости (не доказано, что этот метод работает для двумерных осцилляторов $x^4$). Читатель может сравнить частные суммы ряда Релея — Шредингера для основного состояния гамильтониана $p^2+x^2+0{,}2\,x^4$ (точное значение $E_0 = 1{,}118292$), приведенные в § 3, с $[N, N]$-аппроксимантами Паде:

$$\begin{aligned} &E[1,1]=1{,}111111, && E[5,5]=1{,}118288,\\ &E[2,2]=1{,}117541, && E[6,6]=1{,}118292,\\ &E[3,3]=1{,}118183, && E[7,7]=1{,}118292;\\ &E[4,4]=1{,}118272, \end{aligned}$$

$[N, N]$-аппроксимант Паде находится с помощью только $2N$ коэффициентов Релея — Шредингера $a_0, a_1, \ldots, a_{2N}$.

Существует семейство возмущений дискретного спектра, которые оставляют спектр дискретным, но в то же время более сингулярны, чем другие рассмотренные нами возмущения. Типичный гамильтониан этого класса $H_0 = -d^2/dx^2 + x^2$ на $L^2(\mathbb{R}, dx)$ с $V = x^{-\alpha}$. При $\alpha > 1$ это семейство разрывно в $\lambda = 0$, если $H_0 + \lambda V$ определено как сумма форм. Фактически $H_0 + \lambda V$ сходится при $\lambda \downarrow 0$ в сильном резольвентном смысле к оператору $\tilde{H}_0$, отличному от $H_0$. Это явление было открыто Клаудером (J. Klauder, Field structure through models studies.—*Acta Phys. Austriaca Supp.* **11** (1973), 341—387) и рассматривалось далее Саймоном (B. Simon, Quadratic forms and Klauder's phenomenon: A remark on very singular perturbations.— *J. Funct. Anal.* 14 (1973), 295—298), а также Де Фачо и Хаммером (B. De Facio, C. L. Hammer, Remarks on the Klauder phenomenon.— *J. Math. Phys.* **15** (1974) 1071—1077). Если $H(\lambda)$ в точке $\lambda = 0$ приравнять $\tilde{H}_0$, то полученное так семейство будет аналитично в $\lambda = 0$ при $1 \leqslant \alpha < 2$. При $2 \leqslant \alpha < 3$ собственные значения задаются асимптотическим рядом до первого порядка, пока $\lambda > 0$. Но для $\alpha \geqslant 3$ собственные значения приближаются к собственным значениям $\tilde{H}_0$ медленнее, чем линейно по $\lambda$. (Именно, при $\alpha > 3$

$$E(\lambda) - E(0) = c\lambda^{1/(\alpha-2)} + o(\lambda^{1/(\alpha-2)}),$$

где $c \neq 0$, и при $\alpha = 3$

$$E(\lambda) - E(0) = c\lambda \ln \lambda + O(\lambda).)$$

Эти явления далее обсуждаются в работах: J. Klauder, L. Detwiler, Supersingular quantum perturbations.—*Phys. Rev.* **D11** (1975), 1436—1441; W. Greenlee, Singular perturbation theory for semi-bounded operators.—*Bull. Amer. Math. Soc.* 82 (1976), 341—344; E. Harrell, II, Singular Perturbation Potentials.—*Ann. Phys.* **105** (1977), 379—406.

*§ XII. 5.* То, что шредингерова теория эффекта Штарка не совсем удовлетворительна вследствие появления непрерывного спектра в $(-\infty, \infty)$, было впервые отмечено Оппенгеймером (R. Oppenheimer, Three notes on the quantum theory of aperiodic effects.— *Phys. Rev.* **31** (1928), 66—81). Одна из интерпретаций ряда теории возмущений для этого случая, которую мы ниже обсудим, предложена Титчмаршем (E. C. Titchmarsh, Some theorems on perturbation theory, III, IV, V.—*Proc. Roy. Soc.* **A207** (1951), 321—328; **A210** (1951), 30—47; *J. Analyse Math.* 4 (1954/56), 187—208). В последней статье определено понятие «спектральной концентрации».

Выделению понятия спектральной концентрации и его связи с псевдособственными векторами способствовали следующие работы: K. Friedrichs, Über die Spektralzerlegung eines Integraloperators.— *Math. Ann.* 115 (1938), 249—272; On the perturbation of continuous spectra.—*Comm. Pure Appl. Math.* **1** (1948), 361—406; статья Като в *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, цитированная в замечаниях к § 3; K. Friedrichs, P. Rejto, On a perturbation through which a discrete spectrum can become continuous.—*Comm. Pure. Appl. Math.* 15 (1962), 219—235. Аналог теоремы XII. 22 для порядка $p$ доказан Ридделем: R. C. Riddell, Spectral concentration for self-adjoint operators.—*Pacific J. Math.* **23** (1967), 377—401. Независимо одна половина расширенной теоремы (о том, что псевдособственный вектор $p$-го порядка приводит к спектральной концентрации $p$-го порядка), а также вся теорема XII.22 были доказаны Конли и Рейто (C. C. Conley, P. A. Rejto, Spectral concentration II: General Theory.. In: Perturbation Theory and its Application in Quantum Mechanics (C. H. Wilcox, ed.).— New York: Wiley, 1966). Наше доказательство теоремы XII.23 взято у Конли и Рейто. В их статье также подробно рассмотрен эффект Штарка в порядке $p > 1$. Более подробное обсуждение теории спектральной концентрации и еще некоторые ее применения см. у Веселича: K. Veselič, On spectral concentration for some classes of self-adjoint operators.— *Glasnik Math.* Ser. III 4 (1969), 213—228; The nonrelativistic limit of the Dirac equation and spectral concentration.— *Glasnik Math.* Ser. III 4 (1969), 231—240. В этой последней статье Веселич рассмотрел гамильтониан Дирака $H = H_0+V(x)-mc^2$, где $V(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$. Гамильтониан $H$ имеет непрерывный спектр в $(-\infty, \infty)$ при любых $c$, так как для состояний с отрицательной энергией эффективный потенциал стремится к $-\infty$ при $|x| \to \infty$. Когда $c \to \infty$, для $H$ наблюдается концентрация спектра вблизи собственных значений $-\Delta + V$.

Спектральные свойства гамильтониана эффекта Штарка рассмотрены в примере 8 § XIII.4 и в замечаниях к этому разделу.

Для класса моделей, тесно связанных с эффектом Штарка, но обладающих сферической симметрией, так что к ним применимы методы обыкновенных дифференциальных уравнений (например, $-d^2/dx^2 + |x| - \beta x^2$ или $-\Delta - 1/r - \beta |r|$), Титчмарш обнаружил следующее явление: $H$ имеет непрерывный спектр, сконцентрированный вокруг псевдособственных значений (для $\beta > 0$ в двух указанных примерах), но псевдособственные значения имеют более сильный смысл — функция Грина (ядро резольвенты) имеет аналитическое продолжение ниже вещественной оси с полюсом в точке $E(\beta)$ на втором листе. Ряд Релея — Шредингера является асимптотическим для $\operatorname{Re} E(\beta)$, а $\operatorname{Im} E(\beta)$ стремится к нулю скорее, чем любое $\beta^n$. Это можно сравнить с явлением, рассмотренным в § 6. Полюсы на втором листе наличествуют в обоих случаях, однако в одном случае (эффект Штарка) ширина есть $o(\beta^n)$ при всех $n$, а в другом случае (эффект Оже) она есть $O(\beta^2)$. Это отражается на степени концентрации спектра: в одном случае (эффект Штарка) концентрация происходит во всех порядках, а в другом — только во втором порядке, но не в высших порядках (мы рассматриваем спектральную концентрацию в случае Оже в замечаниях к § 6).

Отметим, что в физической литературе мнимую часть полюса на втором листе иногда называют «естественной» шириной. В наблюдаемую ширину дает вклад также взаимодействие с радиационным полем (радиационная ширина) и тепловое движение источников (тепловая ширина, или допплерова ширина).

Концентрация спектра в эффекте Штарка для гелия изучалась П. Рейто (P. Rejto, Second order concentration near the binding energy of the helium Schrödinger operator.— *Israel J. Math.* **6** (1968), 311—337; Spectral concentration for the helium Schrödinger operator.— *Helv. Phys. Acta* **43** (1970), 652—667). Пользуясь теоремами X.38 и XIII.39, легко проверить выполнение условий теоремы XII.22 в этом случае.

При обсуждении спектральной концентрации в электрических полях полезно иметь в виду, что собственные функции $H_0$ убывают быстрее, чем обратные полиномы, в том смысле, что $\psi \in D(r^n)$ при всех $n$. Результаты такого рода доказываются в § XIII.11.

Есть такой случай, когда собственные значения оказываются «поглощенными» непрерывным спектром, который гораздо менее сингулярен, чем все другие примеры, рассмотренные в этом разделе. Это аналитическое семейство типа (A), где дискретное собственное значение приближается к непрерывному спектру, когда $\beta$ приближается к некоторой критической константе связи. Некоторые сведения об этом случае можно найти у Саймона (B. Simon, On the absorption of eigenvalues by continuous spectrum in regular perturbation problems.— *J. Funct. Anal.* 25 (1977), 338—344).

§ *XII.6.* Мысль о связи между полюсами на втором листе амплитуды рассеяния и резонансами была высказана в ранние годы квантовой теории Вайскопфом и Вигнером (V. Weisskopf, E. P. Wigner, Berechnung der natürlichen Linienbreite auf Grund der Diracschen Lichttheorie.— *Z. Phys.* **63** (1930), 54 — 73). Идея рассматривать вместо полюсов резольвенту есть дальнейшее уточнение этой схемы, которое обсуждается в следующих работах: J. Schwinger, Field theory of unstable particles.— *Ann. Phys.* **9** (1960), 169—193; C. Lovelace, Three particle systems and unstable particles.— In: Strong Interactions and High Energy Physics: 1963 Scottish Universities Summer School (R. C. Moorhouse, ed.).— Oliver and Boyd, 1964; A. Grossman, Nested Hilbert space in quantum mechanics, I.— *J. Math. Phys.* **5** (1964), 1025—1037. Конечно, между этой идеей и работой Титчмарша, описанной в конце замечаний к § 5, существует прямая связь.

Многие ранние попытки понять резонансы со строгой точки зрения приводили к подходящим несамосопряженным моделям, часто с компактным $H^*—H$. Типичный пример — работа М. С. Лившица, Метод несамосопряженных операторов в дисперсионной теории.— *УМН,* **12** (1957), 212—218. Обзор разных попыток такого рода см. в работе: C. L. Dolph, Recent developments in some non-self-adjoint problems of Mathematical Physics.— *Bull. Amer. Math. Soc.* **67** (1961), 1—69.

Попытки обнаружить полюсы на втором листе и связанные с этим явления, такие, как спектральная концентрация в резольвентах самосопряженных операторов, полученных с помощью возмущений операторов с собственными значениями, лежащими в непрерывном спектре, были предприняты Фридрихсом в его статье в *Comm. Pure Appl. Math.* цитированной в замечаниях к § 5, и в серии статей Хауленда: J. S. Howland, Perturbation of embedded eigenvalues by operators of finite rank.— *J. Math. Anal. Appl.* **23** (1968), 575—584; Embedded eigenvalues and virtual poles.—*Pacific J. Math.* **29** (1969), 565—582; Spectral concentration and virtual poles.— *Amer. J. Math.* **91** (1969), 1106—1126; On the Weinstein—Aronszajn formula.— *Arch. Rational Mech. Anal.* 39 (1970), 323—339. Во всех этих статьях рассматриваются компактные (и даже в большинстве случаев конечного ранга) возмущения. Возмущения же в § 6 не являются даже относительно компактными. Недавно (и приблизительно в одно время с работой Саймона, о которой ниже) Хауленд расширил метод Фридрихса на модели, подобные автоионизации. Эта работа обсуждается в статьях: J. S. Howland, Perturbation of embedded eigenvalues.— *Bull. Amer. Math. Soc.* **78** (1972), 380—383; Puiseux Series for Resonances at an Embedded Eigenvalue.— *Pacific J. Math.* 55 (1974), 157—176. В последней статье Хауленд показывает, что теорема Реллиха не распространяется на теорию резонанса, т. е. может случиться, что $H_0$ и $V$ самосопряжены и вырожденное собственное значение $E_0$ оператора $H_0$ погружено в непрерывный спектр, а $H_0+\beta V$ имеет резонанс в $E_n(\beta)$, причем $E_n(\beta)$ не аналитична по $\beta$, но имеет ряд Пюизо с дробными степенями. Хауленд показал также, каким образом понятие резонанса, ассоциированного с погруженным собственным значением $H_0$, внутренне связано с парой $\{H_0, V\}$.

В этом разделе намечены только основы метода. Он развивается дальше в § XIII.10. В замечаниях к этому разделу приводятся подробные ссылки. Наше изложение здесь в значительной мере основано на статье: B. Simon, Resonances in $N$-body quantum systems with dilatation analytic potentials and

the foundations of time-dependent perturbation theory.— *Ann. Math.* 97 (1973), 247—274.

Редукция с помощью симметрии описана в статье Саймона. Основная ее идея состоит в следующем. Оба оператора $H_0$ и $V$ коммутируют с вращениями и отражением $P$ относительно начала координат. Следовательно, они коммутируют с генераторами $J_x, J_y, J_z$ вращений вокруг осей $x$, $y$ и $z$ (операторы углового момента). Операторы $P$, $J_z$ и $J^2 \equiv J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ коммутируют друг с другом и все имеют дискретный спектр. Следовательно, $\mathscr{H}$ распадается в прямую сумму $\bigoplus \mathscr{H}_{p, j, m}$, где $p = \pm 1$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ и $m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$, так что если $\psi \in \mathscr{H}_{p, j, m}$, то

$$P\psi = p\psi, \quad J^2\psi = j(j+1)\psi, \quad J_z\psi = m\psi;$$

$H_0$ и $V$ оставляют $\mathscr{H}_{p, j, m}$ инвариантными.

В случае атома гелия, как мы видели, $\sigma_{\text{ess}}(H_0) = [-1, \infty)$. Однако $\sigma_{\text{ess}}(H_0 \upharpoonright \mathscr{H}_{p, j, m}) = [-1/4, \infty)$, если $p = (-1)^{j+1}$, поэтому некоторые собственные значения $H_0$, лежащие в $[-1, -1/4)$ и представляющиеся погруженными, оказываются непогруженными, после того как проделана редукция с помощью симметрии. Эти собственные значения, разумеется, не исчезают, когда включается возмущение. Мы ожидаем, что все остальные собственные значения действительно исчезают; методом этого раздела доказательство этого факта сводится к тому, чтобы сосчитать явно $\operatorname{Im} a_2$ и убедиться в том, что она не равна нулю.

Спектральная концентрация изучалась в ситуациях, когда «виртуальный полюс» (полюс на втором листе) резольвенты $H_0 + \beta V$ появляется при $E(\beta)$, где $E(0)$ — вещественное собственное значение $H_0$ и $E(\beta)$ аналитична по $\beta$. Для семейства моделей Хауленд изучал этот вопрос в статье в *Pacific J. Math.*, цитированной выше. Для задачи Оже этот вопрос рассмотрел Саймон в цитированной выше работе. Результат, связанный с тем, что $\operatorname{Im} E = O(\beta^2)$, состоит в том, что существует спектральная концентрация до первого порядка. Именно, $P^{(H_0+\beta V)}(E_0 + \beta E_1 - f(\beta), \ E_0 + \beta E_1 + f(\beta)) \to P_{\{E_0\}}$ в сильном смысле тогда и только тогда, когда $f(\beta) \to 0$ и $f(\beta)/\beta^2 \to \infty$ (так что в некотором смысле существует концентрация до порядка $p$ для дробных $p < 2$).

Наконец, изложим вкратце «обычную» физическую (*нестрогую*) аргументацию, приводящую к золотому правилу Ферми. Это позволит понять, почему формула

$$\Gamma = 2\pi \frac{d}{dE} (\Omega_0, V\tilde{P}(E) V \Omega_0)$$

есть формула Ферми, которая обычно записывается в несколько более формальном виде. Подробнее об этом см. Л. Ландау и Е. Лифшиц, Квантовая механика. Нерелятивистская теория.— М.: Физматгиз, 1963, с. 169—188. Сначала приходится считать, что пик обязан своим происхождением какому-то «виртуальному процессу». Иначе говоря, мы представляем дело так, как будто действительно существуют «связанные состояния» с энергией, близкой к энергиям $E_n$ оператора $H_0$, лежащим в континууме. Эти состояния имеют характеристические времена жизни $\tau_n$. Таким образом, процесс рассеяния $e + \text{He}^+ \to e + \text{He}^+$ рассматривается как $e + \text{He}^+ \to \text{He} \to e + \text{He}^+$. Состояние гелия образуется и распадается в течение времени $\tau_n$. Это состояние имеет определенную энергию $E_n$, но вследствие принципа неопределенности начальная энергия $E$ состояния $e + \text{He}^+$ не обязана быть строго равной $E_n$, для того чтобы образовалось указанное «связанное состояние». $\Delta E = E - E_n$ должно быть лишь порядка $1/\tau_n$ (мы положили $\hbar = 1$). Следовательно, пик из-за образования возбужденного состояния гелия имеет характеристическую ширину $\Gamma_n \equiv \tau_n^{-1}$. Образовавшееся состояние с энергией $E_n$ распадается с распределением $|P_l(\cos\theta)|^2$, если $l$ — угловой момент этого резонанса и если конечное состояние иона $He^{+}$ есть его основное состояние. В результате сечение рассеяния усиливается за счет наличия резонанса.

Пусть теперь $\varphi_n$ есть связанное состояние оператора $H_0$ с энергией $E_n$. Предположим, что $H_0$ имеет «непрерывные собственные функции» $\varphi(E)$, так что $H_0\varphi(E)=E\varphi(E)$ и $\int dE\varphi(E)(\varphi(E),\eta)=\eta$ для всех $\eta\in\mathcal{H}$. Попробуем решить уравнение Шредингера $i\dot{\psi}=(H_0+V)\psi$ с $\psi(0)=\varphi_n$. Запишем

$$\psi(t)=\int a(E;\ t)\,\varphi(E)\,e^{-iEt}\,dE+\sum a_k(t)\,e^{-iE_kt}\,\varphi_k.$$

Вероятность того, что $\psi(t)$ не находится в состоянии $\varphi_n$ в момент времени $t$ (т. е. вероятность распада), задается формулой

$$P(t)=\int|a(E;\ t)|^2\,dE+\sum_{k\neq n}|a_k(t)|^2.$$

Формально $a(E;\ t)$ и $a_k(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$i\dot{a}(E;\ t)=\int a(E';\ t)\,(\varphi(E),\ V\varphi(E'))\,e^{-i(E'-E)t}\,dE'+$$
$$+\sum_k(\varphi(E),\ V\varphi_k)e^{-i(E_m-E)t}\,a_k(t),$$

$$i\dot{a}_m(t)=\int a(E';\ t)\,(\varphi_m,\ V\varphi(E'))\,e^{-i(E'-E_m)t}\,dE'+$$
$$+\sum_k(\varphi(E),\ V\varphi_k)\,e^{-i(E_m-E)t}\,a_k(t).$$

Решим формально эти уравнения в виде разложения «по степеням $V$». В низшем порядке ($V=0$) получим $a(E;\ t)=0$; $a_m(t)=0$, если $m\neq n$, и $a_n(t)=1$. Следовательно, в первом порядке

$$i\dot{a}^{(1)}(E;\ t)=e^{-i(E_m-E)t}(\varphi(E),\ V\varphi_m)$$

и аналогично для $a_k$. Таким образом,

$$a^{(1)}(E;\ t)=(\varphi(E),\ V\varphi_n)\left(\frac{e^{-i(E_n-E)t}-1}{E_n-E}\right)$$

или

$$P^{(1)}(t)=t\int(\varphi(E),\ V\varphi_n)^2\left(\frac{4\sin^2[(t/2)(E_n-E)]}{t(E_n-E)^2}\right)dE+\text{дискретная сумма}.$$

Когда $t\to\infty$, $4\sin^2((t/2)x)/2\pi tx^2\to\delta(x)$ в смысле обобщенных функций, так что можно писать

$$\lim_{t\to\infty}\frac{P^{(1)}(t)}{t}=2\pi\,|(\varphi(E),\ V\varphi_n)|^2\,|_{E=E_n}.$$

Но в низшем порядке $\Gamma=\lim\limits_{t\to\infty}t^{-1}P^{(1)}(t)$. Следовательно,

$$\Gamma=2\pi\,|(\varphi(E),\ V\varphi_n)|^2\,|_{E=E_n}.$$

Это и есть золотое правило Ферми в наиболее привычной форме. Иногда, еще более формально, пишут $P_{n\to E}(t)=|a(E;\ t)|^2$, $\Gamma_{n\to E}=\lim\limits_{t\to\infty}t^{-1}|a(E;\ t)|^2$, $\Gamma=\int\Gamma_{n\to E}\,dE$ и

$$\Gamma_{n\to E}=2\pi\,|(\varphi(E),\ V\varphi_n)|^2\,\delta(E-E_n).$$

Чтобы убедиться в том, что это в точности формальный вариант нашего результата § 6, заметим, что, рассуждая формально,

$$\tilde{P}(-\infty,\ E') = \int_{-\infty}^{E'} dE\,(\varphi(E),\ \cdot)\,\varphi(E).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dE'}(V\varphi_n,\ \tilde{P}(-\infty, E')\,V\varphi_n)\,|_{E'=E_n} = (V\varphi_n,\ \varphi(E'))\,(\varphi(E'),\ V\varphi_n)\,|_{E'=E_n} =$$
$$= |(V\varphi_n,\ \varphi(E'))|^2\,|_{E'=E_n}.$$

## ЗАДАЧИ

†1. (a) Предположим, что все функции $f_0$, $f_2$, …, $f_n$ и $f_1^{-1}$ аналитичны в круге $\{\beta \mid |\beta-\beta_0| \leqslant R_0\}$. Пусть $\alpha_k$ определяются последовательными подстановками представления $\lambda = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\beta-\beta_0)^k$ в (1). Докажите, что $|\alpha_k| \leqslant AR^k$ для подходящих $A$ и $R$.

(b) Докажите, что любая аналитическая функция $\lambda(\beta)$, такая, что $\lambda(\beta_0) = \lambda_0$, и удовлетворяющая (1) вблизи $\beta = \beta_0$, равна $\lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(\beta-\beta_0)^k$ вблизи $\beta = \beta_0$.

†2. Пусть $T$ — матрица, записанная в жордановой нормальной форме, причем $\lambda_0$ — ее собственное значение. Предположим, что $\varepsilon$ настолько мало, что $\lambda_0$ — единственное собственное значение $T$ в $\{\lambda \mid |\lambda-\lambda_0| \leqslant \varepsilon\}$. Докажите, что

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} (T-\lambda)^{-1}\,d\lambda$$

— проектор на множество $\{v \mid (T-\lambda_0)^n v = 0$ для некоторого $n\}$ и $Pw = 0$, если $(T-\lambda_1)^n w = 0$ для $\lambda_1 \neq \lambda_0$. [*Указание*. Докажите, что $(a^{-1})_{ij} = b_{ij}$, где

$$a_{ij} = (\mu-\lambda)\,\delta_{ij} + \delta_{i+1,j},$$
$$b_{ij} = (\mu-\lambda)^{-1}\delta_{ij} - (\mu-\lambda)^{-2}\delta_{i+1,j} + (\mu-\lambda)^{-3}\delta_{i+2,j} - \ldots.]$$

3. Пусть $T$ — конечная матрица и 0 — ее собственное значение.

(a) Докажите, что $(T-\lambda)^{-1}$ аналитична в $\{\lambda \mid 0 < |\lambda| < R\}$ для некоторого $R$ и существуют операторы $A_n$, такие, что $(T-\lambda)^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\lambda^n$, где ряд сходится, если $0 < |\lambda| < R$.

(b) Докажите, что $A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=\varepsilon} \lambda^{-n-1}(T-\lambda)^{-1}\,d\lambda$ для $0 < \varepsilon < R$.

*(c) Воспользуйтесь (b) для доказательства того, что $A_nA_m = (\eta_n + \eta_m - 1)\,A_{n+m+1}$, где

$$\eta_n = \begin{cases} 1, & n \geqslant 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$