Чтобы убедиться в том, что это в точности формальный вариант нашего результата § 6, заметим, что, рассуждая формально,

$$\tilde{P}(-\infty,\ E')=\int_{-\infty}^{E'} dE\,(\varphi(E),\ \cdot)\,\varphi(E).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dE'}(V\varphi_n,\ \tilde{P}(-\infty, E')\,V\varphi_n)\,|_{E'=E_n}=(V\varphi_n,\ \varphi(E'))\,(\varphi(E'),\ V\varphi_n)\,|_{E'=E_n}=$$
$$=|(V\varphi_n,\ \varphi(E'))|^2\,|_{E'=E_n}.$$

ЗАДАЧИ

†1. (a) Предположим, что все функции $f_0,\ f_2,\ \ldots,\ f_n$ и f_1^{-1} аналитичны в круге $\{\beta\,|\,|\beta-\beta_0|\leqslant R_0\}$. Пусть α_k определяются последовательными подстановками представления $\lambda=\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\beta-\beta_0)^k$ в (1). Докажите, что $|\alpha_k|\leqslant AR^k$ для подходящих A и R.

(b) Докажите, что любая аналитическая функция $\lambda(\beta)$, такая, что $\lambda(\beta_0)=\lambda_0$, и удовлетворяющая (1) вблизи $\beta=\beta_0$, равна λ_0+ $+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\beta-\beta_0)^k$ вблизи $\beta=\beta_0$.

†2. Пусть T — матрица, записанная в жордановой нормальной форме, причем λ_0 — ее собственное значение. Предположим, что ε настолько мало, что λ_0 — единственное собственное значение T в $\{\lambda\,|\,|\lambda-\lambda_0|\leqslant\varepsilon\}$. Докажите, что

$$P=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon}(T-\lambda)^{-1}\,d\lambda$$

— проектор на множество $\{v\,|\,(T-\lambda_0)^n v=0$ для некоторого $n\}$ и $Pw=0$, если $(T-\lambda_1)^n w=0$ для $\lambda_1\neq\lambda_0$. [*Указание*. Докажите, что $(a^{-1})_{ij}=b_{ij}$, где

$$a_{ij}=(\mu-\lambda)\,\delta_{ij}+\delta_{i+1,j},$$
$$b_{ij}=(\mu-\lambda)^{-1}\delta_{ij}-(\mu-\lambda)^{-2}\delta_{i+1,j}+(\mu-\lambda)^{-3}\delta_{i+2,j}-\ldots.]$$

3. Пусть T — конечная матрица и 0 — ее собственное значение.

(a) Докажите, что $(T-\lambda)^{-1}$ аналитична в $\{\lambda\,|\,0<|\lambda|<R\}$ для некоторого R и существуют операторы A_n, такие, что $(T-\lambda)^{-1}=$ $=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\lambda^n$, где ряд сходится, если $0<|\lambda|<R$.

(b) Докажите, что $A_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=\varepsilon}\lambda^{-n-1}(T-\lambda)^{-1}\,d\lambda$ для $0<\varepsilon<R$.

*(c) Воспользуйтесь (b) для доказательства того, что $A_nA_m=$ $=(\eta_n+\eta_m-1)\,A_{n+m+1}$, где

$$\eta_n=\begin{cases}1, & n\geqslant 0,\\ 0, & n<0.\end{cases}$$

[*Указание*. См. доказательство теоремы XII.5.]

(d) Пусть $P=-A_{-1}$, $N=-A_{-2}$, $S=A_0$. Докажите, что $A_n=S^{n+1}$ при $n\geqslant 0$, $A_{-n}=-N^{n-1}$ при $n\geqslant 2$ и что $P^2=P$, $PN=NP=N$, $PS=SP=0$.

(e) Докажите, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\zeta^n N^n$ сходится для всех $|\zeta|<\infty$. [*Указание*. Воспользуйтесь (a).]

*(f) Докажите, что $N^k=0$ для некоторого k.

(g) Докажите, что $TP=PT=N$.

4. Пусть T есть $n\times n$-матрица. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ — ее собственные значения. Пусть

$$P_i=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda-\lambda_i|=\varepsilon_i}(T-\lambda)^{-1}\,d\lambda,$$

$$N_i=-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda-\lambda_i|=\varepsilon_i}(\lambda-\lambda_i)(T-\lambda)^{-1}\,d\lambda.$$

(a) По аналогии с задачей 3 докажите, что $P_i^2=P_i$, $N_iP_i=P_iN_i=N_i$, $TP_i=P_iT=\lambda_iP_i+N_i$.

*(b) Докажите, что $P_iP_j=0$, если $i\neq j$, и $\sum\limits_{i=1}^{l}P_i=1$.

(c) (абстрактная жорданова нормальная форма). Докажите, что

$$T=\sum_{i=1}^{l}(\lambda_iP_i+N_i).$$

(d) Пусть матрица N нильпотентна, т. е. $N^k=0$ для некоторого k. Покажите, что в соответствующем векторном пространстве существует базис, в котором N имеет вид

$$N=\begin{bmatrix}0 & x & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & x & \cdots & 0\\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

где каждый x равен 1 или 0.

(e) Покажите, что в подходящем базисе T обладает жордановой нормальной формой, рассмотренной в § 1.

Литература к задачам 3, 4: Т. Като, Теория возмущений линейных операторов. — М.; Мир, 1972, с. 54—61.

5. Пусть H_0 — самосопряженная матрица с собственными значениями $E_0<E_1<E_2<\ldots<E_k$. Предположим, что E_0 — невырожденное собственное значение. Пусть V — произвольная самосопряженная матрица, и пусть $E_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta^n$ — ряд Релея—Шредингера для собственного значения оператора $H_0+\beta V$ в окрестности E_0.

(a) Докажите, что все α_n вещественны.

(b) Докажите, что $\alpha_2\leqslant 0$.

(c) Найдите явный пример с $\alpha_4 > 0$.

(d) Докажите, что если $V \geqslant 0$ в смысле матричных неравенств, то $\alpha_1 \geqslant 0$.

(e) Найдите явный пример, для которого $V \geqslant 0$, но $\alpha_8 \leqslant 0$.

[*Указание для* (c) *и* (e). Воспользуйтесь примером 2×2-матриц и решите вековое уравнение для этих матриц явно.]

†*6*. (a) Пусть P — ограниченный оператор на банаховом пространстве X, причем $P^2 = P$. Докажите, что множества $E = \operatorname{Ran} P$ и $F = \operatorname{Ker} P$ суть замкнутые подпространства в X и $E \cap F = \{0\}$, $E + F = X$. Докажите, что любое $x \in X$ можно однозначно записать как $x = e + f$, где $e \in E$, $f \in F$.

(b) Обратно, для данных замкнутых подпространств E и F банахова пространства X, таких, что $E \cap F = \{0\}$ и $E + F = X$, докажите, что существует единственный *ограниченный* оператор P на X, удовлетворяющий условиям $P^2 = P$ и $F = \operatorname{Ker} P$, $E = \operatorname{Ran} P$. [*Указание*. Воспользуйтесь теоремой о замкнутом графике.]

7. Докажите следующий дополнительный факт, относящийся к ситуации, описанной в теореме XII.6. Если $\dim P = n$ и $\nu_1, \ldots, \nu_k$ — собственные значения оператора A в $\{\nu \mid |\nu - \lambda| < r\}$, то $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$, где m_i — алгебраическая кратность ν_i как собственного значения.

†*8*. Пусть $T(\beta)$ — семейство ограниченных операторов, определенных на области $R \subset \mathbb{C}$ и таких, что $\sup_{\beta \in R} \|T(\beta)\| < \infty$. Докажите, что $T(\beta)$ — аналитическая функция в смысле § VI.3 тогда и только тогда, когда $T(\beta)$ — аналитическое семейство в смысле Като.

†*9*. Функция F, определенная на открытом множестве D в банаховом пространстве X и принимающая значения в Y — другом банаховом пространстве, называется аналитической тогда и только тогда, когда для всех $x \in D$ существуют функции $f_x^{(1)}, \ldots, f_x^{(n)}, \ldots$, где $f_x^{(j)}$ есть j-линейная функция из $X \times \ldots \times X$ (j раз) в Y, такая, что

(i) для некоторых C и R выполняется неравенство $\|f_x^{(j)}(y_1, \ldots, y_j)\| \leqslant CR^{-j}\|y_1\| \ldots \|y_j\|$;

(ii) если $\|y\| < R$, то $F(x+y) = \sum_{j=0}^{\infty} f_x^{(j)}(y, y, \ldots, y)$, где $f_x^{(0)} = F(x)$.

(a) Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$. Пусть Y — комплексное банахово пространство. Докажите, что функция $F: \Omega \to Y$ аналитична в указанном выше смысле тогда и только тогда, когда она аналитична в смысле § VI.3.

(b) Пусть F — аналитическая функция на $D \subset X$, принимающая значения в Y, а g — аналитическая функция на подмножестве $\Omega \subset \mathbb{C}$, принимающая значения в D; положим $F \circ g: \Omega \longrightarrow Y$. Докажите, что $F \circ g$ аналитична в смысле § VI.3.

(c) Пусть $X = \mathscr{L}(Z)$ — ограниченные операторы на некотором банаховом пространстве Z. Пусть $D = \{A \in X \mid A$ имеет ограниченный обратный$\}$. Докажите, что $F(A) = A^{-1}$ — аналитическая функция на D со значениями в X.

†*10*. Пусть $T(\beta)$ — аналитическое семейство типа (A) в окрестности $\beta = 0$.

(a) Докажите, что существуют операторы T_n с областями определения $D(T_n) \supset D(T_0)$ и $T_0 \equiv T(0)$, такие, что (i) для некоторых a, b и c

и всех $\psi \in D(T(0))$ имеем $\|T_n\psi\| \leqslant c^{n-1}(a\|T(0)\psi\| + b\|\psi\|)$; (ii) для любого $\psi \in D(T(0))$ и β, достаточно малых по модулю, имеем $T(\beta)\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n T_n \psi$, где ряд сходится равномерно.

(b) Докажите, что в общем случае аналитическое семейство типа (A) есть аналитическое семейство и в смысле Като.

Литература к задаче 10: книга Като (см. задачу 4), стр. 470—477.

†*11*. Предположим, что $V \ll H_0$, $W \ll H_0$. Докажите, что $W \ll H_0 + V$.

†*12*. В контексте теоремы XII.9 докажите, что для малых β оператор $A = (H_0 - \lambda)^{-1}[1 + \beta V(H_0 - \lambda)^{-1}]^{-1}$ обратен к $H_0 + \beta V - \lambda$. Конкретно, покажите, что $\operatorname{Ran} A \subset D(H_0)$ и $(H_0 + \beta V - \lambda)A\psi = \psi$ для всех $\psi \in \mathscr{H}$ и $A(H_0 + \beta V - \lambda)\psi = \psi$ для всех $\psi \in D(H_0)$.

13. Пусть $A(\beta)$ — компактная операторнозначная функция на связном открытом множестве $R \subset \mathbb{C}$. Пусть $f(\beta)$ — аналитическая функция на R. Предположим, что $f(\beta) \neq 0$ для всех $\beta \in R$ и что $f(\beta_i)$ — собственное значение $A(\beta_i)$ для $\beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots \in R$, где последовательность $\beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots$ обладает в R предельной точкой. Выведите отсюда, что $f(\beta)$ — собственное значение $A(\beta)$ для всех $\beta \in R$. [*Указание*. Примените к $f(\beta)^{-1}A(\beta)$ аналитическую теорему Фредгольма.]

†*14*. Докажите теорему XII.11. *Литература*: книга Като, стр. 116—117, 475—477.

15. Пусть $H(\beta)$ — аналитическое семейство в смысле Като в односвязной области $R \subset \mathbb{C}$. Предположим, что $E(\beta)$ — изолированное невырожденное собственное значение $H(\beta)$ для каждого $\beta \in R$. Докажите, что существует аналитическая векторная функция ψ на R, такая, что $H(\beta)\psi(\beta) = E(\beta)\psi(\beta)$ и $\psi(\beta) \neq 0$ для всех $\beta \in R$. [*Указание*. Воспользуйтесь теоремой XII.12.]

16. Предположим, что $P_i(\beta)$ — аналитическая проекторнозначная функция β при всех $\beta \in R$ — связной односвязной области из $\mathbb{C}$ при $i = 1, \ldots, k$. Предположим, что $P_i(\beta)P_j(\beta) = 0$, если $i \neq j$ и $\beta \in R$, и что $\sum_{i=1}^{k} P_i(\beta) = 1$. Предположим, что $0 \in R$. Найдите аналитические в R и обратимые операторнозначные функции $U(\beta)$, такие, что $U(\beta)P_i(0)U(\beta)^{-1} = P_i(\beta)$ для всех $\beta \in R$, причем $U(\beta)$ унитарны при вещественных β, если все проекторы $P_i(\beta)$ ортогональны при вещественных β. [*Указание*. Воспроизведите доказательство теоремы XII.12, положив $Q(\beta) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}[P_i'(\beta), P_i(\beta)]$.]

17. Пусть $T(\beta)$ — аналитическая функция в окрестности нуля, принимающая значения в множестве $n \times n$-матриц. Предположим, что $T(\beta)$ самосопряжена для всех вещественных β.

(a) Предположим, что E_0 — собственное значение кратности m матрицы $T(0)$ и что $E_1(\beta), \ldots, E_k(\beta)$ суть различные собственные значения $T(\beta)$ вблизи E_0. Докажите сначала, что проекторы $P_i(\beta)$ и собственные значения $E_i(\beta)$ мероморфны в $\beta = 0$. Затем, пользуясь самосопряженностью, докажите, что $P_i(\beta)$ аналитичны при $\beta = 0$.

(b) Докажите, что существуют аналитические векторнозначные функции $\psi_1(\beta), \ldots, \psi_n(\beta)$ в окрестности нуля, такие, что $\psi_i(\beta)$ — собственные векторы и $(\psi_i(\beta), \psi_j(\beta)) = \delta_{ij}$ для всех вещественных β. [*Указание*. Воспользуйтесь задачей 16.]

†*18*. Завершите доказательство леммы из доказательства теоремы XII.12.

19. Пусть P и Q — (не обязательно ортогональные) проекторы на гильбертовом пространстве, причем $\|P-Q\| < 1$. Пусть $A=(1-P)(1-Q)+PQ$; $B=(1-Q)(1-P)+QP$; $C=[1-(P-Q)^2]$.

(a) Докажите, что $AB=BA=C$.

(b) Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n$ — ряд Тейлора для $(1-x)^{-1/2}$ около $x=0$, и пусть $D=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n (P-Q)^n$; последний ряд сходится, поскольку $\|P-Q\| < 1$. Докажите, что $D^2C=CD^2=DCD=1$.

(c) Докажите, что $P(P-Q)^2=(P-Q)^2P$ и $Q(P-Q)^2=(P-Q)^2Q$. Выведите отсюда, что $DP=PD$, $QD=DQ$.

(d) Пусть $W=DA$. Докажите, что W^{-1} существует и $W^{-1}=BD$.

(e) Докажите, что $WQ=PW$.

(f) Докажите, что в случае, когда P и Q самосопряжены, W унитарен.

20. Пусть $A(\beta)$ — аналитическая функция, определенная вблизи $\beta=0$, со значениями в множестве конечных матриц. Пусть E_0 — собственное значение при $\beta=0$ кратности m. Пусть $g_1(\beta), \ldots, g_k(\beta)$ — многозначные аналитические функции, определенные вблизи $\beta=0$, значения которых суть все собственные значения $A(\beta)$ вблизи E_0. Пусть $P_j(\beta)$ — проектор на собственное подпространство:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mu-g_j(\beta)|=\varepsilon}(A(\beta)-\mu)^{-1}\,d\mu.$$

(a) Докажите, что $P_j(\beta)$ — многозначная аналитическая функция вблизи $\beta=0$ и величина $|\beta|^k\|P_j(\beta)\|$ ограничена при $\beta\to 0$ для некоторого k.

(b) Докажите, что если $A(\beta)$ самосопряжена для вещественных β, то $P_j(\beta)$ — однозначная аналитическая функция вблизи точки $\beta=0$ и в самой этой точке.

21. Цель данной задачи — доказательство теоремы Батлера: если некоторое собственное значение $g_j(\beta)$ (см. задачу (20)) не является однозначной функцией, то $\|P_j(\beta)\|\to\infty$ при $\beta\to 0$.

(a) Воспользуйтесь задачей 20, чтобы доказать, что если $\|P_j(\beta)\|$ не стремится к ∞, то $P_j(\beta)$ обладает разложением Пюизо

$$P_j(\beta)=A_0+\beta^{1/m}A_1+\ldots.$$

(b) Докажите, что $A_0^2=A_0$. [*Указание*: $P_j(\beta)^2=P_j(\beta)$.]

(c) Докажите, что $A_0^2=0$. [*Указание*: $P_j(\beta e^{2\pi i})P_j(\beta)=0$.]

(d) Выведите отсюда, что $P_j(\beta)\to 0$ при $\beta\to 0$.

(e) Докажите, что норма любого ненулевого проектора Q удовлетворяет неравенству $\|Q\|\geqslant 1$.

(f) Обоснуйте заключение, что $\|P_j(\beta)\|\to\infty$.

Литература: работа Батлера, указанная в замечаниях к § 1.

22. Воспользуйтесь теоремой Батлера для доказательства теоремы Реллиха (теорема XII.3.)

23. Пусть $A(\beta)$ — аналитическая функция вблизи $\beta=0$, принимающая значения в множестве конечных матриц. Предположим, что E_0 — собственное значение $A(0)$ с ассоциированной собственной нильпотентной матрицей $N \neq 0$ (см. задачи 3, 4). Предположим, что при β вблизи 0 собственные значения матриц $A(\beta)$ около E_0 имеют нулевые ассоциированные собственные нильпотентные матрицы. Докажите, что проекторы $P_j(\beta)$ из задачи 20 имеют особенность при $\beta=0$.

24. В предположениях теоремы XII.14 докажите, что существует векторнозначная функция $\Omega(\beta)$, аналитическая в области $\{\beta \mid |\arg\beta| < \theta, |\beta| < B\}$ для некоторого $B > 0$, такая, что (i) $H(\beta)\Omega(\beta) = E(\beta)\Omega(\beta)$; (ii) $(\Omega_0, \Omega(\beta)) \equiv 1$, (iii) $\Omega(\beta)$ обладает асимптотическим рядом $\sum \varphi_n\beta^n$ при $|\beta| \downarrow 0$, $|\arg\beta| < \theta$, члены которого даются выражениями, содержащими только V, $(H_0-\lambda)^{-1}$ и Ω_0.

†25. В условиях теоремы XII.14 докажите, что для любого вектора $\Omega \in C^\infty(H_0)$ и любого компактного множества $K \subset \rho(H_0)$ выражение $[V(H_0-E)^{-1}]^N\Omega$ есть непрерывная по норме функция E в K. [*Указание*: введите топологию в пространстве $C^\infty(H_0)$, соответствующую нормам $\|\Omega\|_n = \|(|H_0|+1)^n\Omega\|$, и докажите, что V непрерывно отображает $C^\infty(H_0)$ в себя.]

†26. Последовательность $(a_0, a_1, \ldots)$ комплексных чисел можно рассматривать как **формальный ряд** $\sum a_n z^n$. В множестве F формальных рядов можно ввести операции сложения: $(a_0, \ldots)+(b_0, \ldots)=(c_0, \ldots)$, где $c_n = a_n + b_n$, и умножения: $(a_0, \ldots)\cdot(b_0, \ldots)=(d_0, \ldots)$, где $d_n = \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}$.

(a) Докажите, что F с этими операциями есть область целостности, причем $(1, 0, \ldots)$ — мультипликативная единица.

(b) Докажите, что элемент $(b_0, b_1, \ldots)$ имеет обратный в смысле умножения тогда и только тогда, когда $b_0 \neq 0$.

(c) Пусть A и B — формальные ряды, причем $b_0 \neq 0$. Пусть C — формальный ряд $C = AB^{-1}$ Докажите, что C — асимптотический ряд для f/g, если A — асимптотический ряд для f, а B — асимптотический ряд для g.

(d) Докажите аналог (c), заменив везде «асимптотический» на «сильно асимптотический».

†27. Пусть A и B — замкнутые операторы, причем пересечение $D(A)\cap D(B)$ плотно. Докажите, что $C = A + B$ замкнут на $D(A)\cap D(B)$ тогда и только тогда, когда $A^*A + B^*B \leqslant \alpha(C^*C+1)$ с некоторой константой α.

†28. Пользуясь операторами рождения и уничтожения $A^\dagger$, A из § V.3, докажите выполнение оценок (iii), (iv), (v) из теоремы XII.16 для случая, рассмотренного в примере 3 из § 3.

†29. (a) Докажите, что любая функция $g(z)$, аналитическая в области $R = \{z \mid 0 < |z| < B, |\arg z| < k\pi/2+\varepsilon\}$ и такая, что для всех N и всех $z \in R$ выполняется неравенство $|g(z)| \leqslant A\sigma^N [k(N+1)]! \, |z|^N$, тождественно равна нулю. [*Указание*: положите $h(w) = g(w^k)$ и воспользуйтесь для h теоремой XII.18.]

(b) Распространите метод суммирования по Борелю и теорему Ватсона на функции f, аналитические во введенной выше области R и удовлетворяющие сильному асимптотическому условию порядка k.

30. Пусть задан замкнутый оператор V, такой, что для некоторого самосопряженного оператора H_0 имеем $C^\infty(H_0) \subset D(V)$. Пусть K — компактное подмножество в $\rho(H_0)$ и $H(\beta)$ — замкнутые операторы, определенные в области $0 < |\beta| < B$, $|\arg\beta| \leqslant \theta$ и такие, что (i) $H(\beta) \upharpoonright C^\infty(H_0) = H_0 + \beta V$; (ii) $K \subset \rho(H(\beta))$ для всех β с $|\beta| < B$. Докажите, что

$$(H(\beta)-z)^{-1} \underset{\substack{|\beta|\to 0 \\ |\arg\beta|\leqslant\theta}}{\longrightarrow} (H_0-z)^{-1}$$

сильно для всех $z \in K$ тогда и только тогда, когда для каждого $z \in K$

$$\limsup_{\substack{|\beta|\to 0 \\ |\arg\beta|\leqslant\theta}} \|(H(\beta)-z)^{-1}\| < \infty.$$

†31. Пусть $P^{(n)}$ — последовательность проекторнозначных мер, таких, что

$$P^{(n)}(a_0+a_1\beta-f(\beta),\ a_0+a_1\beta+f(\beta)) \xrightarrow{s} P_\infty$$

и

$$P^{(n)}(b_0+b_1\beta-g(\beta),\ b_0+b_1\beta+g(\beta)) \xrightarrow{s} P_\infty,$$

где P_∞ — ненулевой проектор и $f(\beta)/\beta \to 0$, $g(\beta)/\beta \to 0$. Докажите, что $a_0 = b_0$ и $a_1 = b_1$. [*Указание*: $P^{(n)}(\Omega)P^{(n)}(\Omega') = 0$, если $\Omega \cap \Omega' = \varnothing$.]

†32. В условиях (i) и (ii) теоремы XII.23 докажите, что
(a) область $(H_0+i) \times [D(H_0) \cap D(V)]$ плотна в $\mathscr{H}$;
(b) $(H_0+i)^{-1} - (H_0+\beta V+i)^{-1} \to 0$ сильно при $\beta \to 0$.

†33. Докажите формулу

$$a_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|E-E_0|=\varepsilon} (\overline{\Omega(\theta;\bar{0})},\ V[H_0(\theta)-E]^{-1} V\Omega(\theta;0)) \frac{dE}{E-E_0}$$

для ситуации, описанной в § 6. [*Указание*: воспользуйтесь методами § 1, принимая во внимание тот факт, что $H_0(\theta)$ не самосопряжен, но что $H_0^*(\theta)\bar{f} = \overline{H_0(\theta) f}$.]

†34. Рассмотрим ситуацию, описанную в § 6, где $H(\theta)$ — аналитическое семейство по θ, причем $H(\theta) = U(\theta) H U(\theta)^{-1}$ для вещественных θ и

$$\sigma_{\text{ess}}(H(\theta)) = \{\lambda + xe^{-2\theta} \mid \lambda \in \Sigma,\ x \in \mathbb{R}_+\},$$

где $\Sigma = \{-1/n^2\}$. Предположим, что $H(\theta)$ обладает вещественным собственным значением $E_0 \notin \Sigma$ при всех θ с $\operatorname{Im}\theta > 0$. Положим $H(0) \equiv H$.
(a) Найдите такие векторы $\psi \in \mathscr{H}$, что функция $(\psi, (H-z)^{-1}\psi)$ имеет аналитическое продолжение в область ниже вещественной оси вблизи E_0 с полюсом в E_0 с ненулевым вычетом.
(b) Для $\psi \in \mathscr{H}$ докажите, что $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}(z-E_0)(\psi, (H-z)^{-1}\psi)|_{z=E_0+i\varepsilon} \neq 0$.
(c) Докажите, что для любого самосопряженного оператора A

$$\operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\downarrow 0}(z-E_0)(A-z)^{-1}|_{z=E_0+i\varepsilon} = P_{\{E_0\}}$$

— спектральный проектор на собственное подпространство точки E_0. [*Указание*: воспользуйтесь функциональным исчислением.]
(d) Выведите отсюда, что E_0 — собственное значение H.

(e) Докажите, что функция $(\psi, (H-z)^{-1}\psi)$ не может иметь в E_0 полюс второго порядка ни при каком $\psi \in \mathscr{H}$.

(f) Пусть $\varphi = P(\theta)\varphi$ для некоторого θ с $\operatorname{Im}\theta > 0$, где

$$P(\theta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|E-E_0| = \varepsilon(\theta)} (H(\theta) - E)^{-1}\, dE.$$

Докажите, что $H(\theta)\varphi = E_0\varphi$.

Примечание: вообще говоря, согласно задаче 4, $(H(\theta) - E_0)^n \varphi = 0$ для некоторого n, однако, пользуясь (e), можно доказать (f).

(g) Докажите, что $\dim \operatorname{Ran}(P(\theta)) = \dim \operatorname{Ran}(P_{\{E_0\}})$.

(h) Докажите, что если E_0' — собственное значение H, то оно и собственное значение $H(\theta)$ при $\operatorname{Im}\theta > 0$.

†*35*. Пусть выполнены условия задачи 34.

*(a) Докажите, что $P(\theta) \longrightarrow P_{\{E_0\}}$ сильно, если $\operatorname{Im}\theta > 0$ и $\theta \longrightarrow 0$.

(b) Докажите, что $P(\theta)$ продолжается до функции, аналитической в полосе $|\operatorname{Im}\theta| \leqslant b$. [*Указание*: воспользуйтесь принципом симметрии Шварца.]

(c) Докажите, что при вещественном θ будет $P(\theta) = U(\theta) P_{\{E_0\}} U(\theta)^{-1}$.

(d) Для $\Omega_0 \in \operatorname{Ran} P_{\{E_0\}}$ докажите, что $U(\theta)\Omega_0$ обладает аналитическим продолжением в полосу $|\operatorname{Im}\theta| \leqslant b$, причем $U(\theta)\Omega_0 \in D(H(\theta))$ при всех θ.

Литература к задачам 34 и 35: статья Балслева и Комба, указанная в замечаниях к § XIII.10.

†*36*. Восполните детали примера 6 из § 3.