поэтому φ_m, заданная как

$$\varphi_m(u)=\begin{cases} G_m(u), & 0<u\leqslant y_m,\\ G_m(y_m)+(u-y_m)G'(y_m), & y_m\leqslant u<\infty,\end{cases}$$

удовлетворяет условиям

$$G_m(u)\leqslant\varphi_m(u),\qquad \varphi_m(u)\sim\begin{cases} u^{m+1} & \text{при}\quad u=0,\\ u & \text{при}\quad u=\infty,\end{cases}\qquad \varphi_m(u)\ \text{выпукла}.$$

Тогда находим, что для любых n, m

$$N(V)\leqslant C_{nm}\int W(x)^{m/2}\,d^nx,$$

где $C_{nm}=2(4\pi)^{-n/2}\int\limits_0^\infty u^{-n/2-1}\varphi_m(u)\,du$. До тех пор пока $m>(n/2)-1$, $C_{nm}<\infty$, так что, выбирая соответствующее m, мы убеждаемся в том, что теорема доказана для произвольных $n\geqslant 3$. ∎

Эта теорема может быть доказана также с помощью теоремы XI.22.

XIII.4. Местоположение существенного спектра I: теорема Вейля

В этом и в следующем разделах мы рассмотрим методы определения $\sigma_{\text{ess}}(A)$ для различных операторов A. Сначала мы докажем один общий результат теории возмущений, утверждающий, что $\sigma_{\text{ess}}(A+C)=\sigma_{\text{ess}}(A)$, если C компактен, или, более общо, если он «почти компактен» в смысле, который уточняется ниже. Это позволит нам найти σ_{ess} для двухчастичных операторов Шредингера с исключенным движением центра масс. В следующем разделе мы опишем специальный метод обращения с существенным спектром шредингеровых операторов N частиц.

Нас прежде всего интересует $\sigma_{\text{ess}}(A)$ в случае, когда A самосопряжен, однако в естественной для этих результатов постановке задачи рассматривается общий замкнутый оператор. В § XII.2 был определен $\sigma_{\text{disc}}(A)$, а также σ_{ess} как $\sigma_{\text{ess}}(A)=\sigma(A)\setminus\sigma_{\text{disc}}(A)$. Следует предупредить читателя, что в литературе встречаются и другие определения существенного спектра.

Естественный путь изучения $\sigma_{\text{ess}}(A)$ состоит в рассмотрении $(A-z)^{-1}$ с некоторым $z\notin\sigma(A)$. Для общего самосопряженного оператора надо брать z невещественным, так что мы приходим к необходимости рассматривать несамосопряженные операторы. Если интересоваться только полуограниченными самосопряженными операторами, то можно рассматривать только вещественные z и, таким образом, иметь дело лишь с самосопряженными операторами. В этом случае приводимые ниже доказательства несколько упрощаются.

Результаты этого раздела основаны на применении аналитической теоремы Фредгольма (теорема VI.14). Доказательство окончательного результата содержит некоторые усложняющие моменты, так что сначала мы получим очень специальный случай этого результата:

Предложение. Пусть A и B — два ограниченных самосопряженных оператора с пустыми дискретными спектрами и с компактной разностью $B-A$. Тогда $\sigma_{\text{ess}}(A)=\sigma_{\text{ess}}(B)$.

Доказательство. Запишем $A=B+C$, где C компактен. Положим $F(z)=C(A-z)^{-1}$ для $z\in\mathbb{C}\setminus\sigma(A)$. Тогда $F(z)$ — аналитическая операторнозначная функция z, всюду компактная, так как C компактен по предположению. Так как A ограничен, то

$$\|F(z)\|\leqslant\|C\|\|(A-z)^{-1}\|\to 0$$

при $z\to\infty$. В частности, $(1-F(z))^{-1}$ существует, если $|z|$ велик. По аналитической теореме Фредгольма, $(1-F(z))^{-1}$ существует при $z\in\mathbb{C}\setminus(\sigma(A)\cup D)$, где D — дискретное подмножество $\mathbb{C}\setminus\sigma(A)$. Далее, $(1-F(z))^{-1}$ мероморфна в $\mathbb{C}\setminus\sigma(A)$ с вычетами конечного ранга в точках из D. Если $z\notin\sigma(A)$, то $B-z=(1-C(A-z)^{-1})(A-z)$, так что если $1-F(z)$ обратим, то $z\notin\sigma(B)$ и $(B-z)^{-1}=(A-z)^{-1}(1-F(z))^{-1}$. Следовательно, $\sigma(B)\subset D\cup\sigma(A)$. Более того, $(B-z)^{-1}$ имеет вычеты конечного ранга в точках D. Следовательно, точки D принадлежат $\sigma_{\text{disc}}(B)$, так что $\sigma_{\text{ess}}(B)\subset\sigma(A)$. Аналогично, $\sigma_{\text{ess}}(A)\subset\sigma(B)$. По предположению, $\sigma_{\text{ess}}(A)=\sigma(A)$ и $\sigma_{\text{ess}}(B)=\sigma(B)$, откуда мы заключаем, что $\sigma_{\text{ess}}(B)=\sigma_{\text{ess}}(A)$. ∎

Теперь мы хотим обобщить это предложение в разных направлениях. Во-первых, мы допустим неограниченные операторы. Но, самое главное, мы должны отказаться от условия $\sigma_{\text{disc}}(A)=\varnothing$. Для этого нам потребуется усиление аналитической теоремы Фредгольма, которое интересно и само по себе:

Теорема XIII.13 (мероморфная теорема Фредгольма). Пусть Ω — связное открытое подмножество в $\mathbb{C}$. Пусть $A(z)$ — операторнозначная мероморфная функция z, т. е. A аналитична в $\Omega\setminus D$, где D — дискретное подмножество в Ω (множество, не имеющее предельных точек в Ω), и вблизи каждой точки $z_0\in D$

$$A(z)=A_{-k}(z-z_0)^{-k}+\ldots+A_{-1}(z-z_0)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-z_0)^n.$$

Кроме того, предположим, что

(1) $A(z)$ компактен, если $z\in\Omega\setminus D$;

(2) коэффициенты $A_{-k}, \ldots, A_{-1}$ при отрицательных степенях ряда Лорана для $A(z)$ в точках $z_0 \in D$ суть операторы конечного ранга.

Тогда либо

(a) $1-A(z)$ не обратим ни для какого $z \in \Omega \setminus D$,

либо

(b) найдется дискретное множество $D' \subset \Omega$, такое, что $(1-A(z))^{-1}$ существует, если $z \notin D \cup D'$, и может быть расширена до такой функции, аналитической в $\Omega \setminus D'$ и мероморфной в Ω, что ее коэффициенты Лорана при отрицательных степенях в точках $z_0 \in D'$ суть операторы конечного ранга.

Доказательство. Это доказательство основано, главным образом, на тех же идеях, что и доказательство теоремы VI.14, так что мы будем постоянно ссылаться на последнее. Как и там, достаточно показать, что каждая точка $z_0 \in \Omega$ имеет такую окрестность N, в которой выполняется или (a), или (b). Для $z_0 \in \Omega \setminus D$ это доказывается точно так же, как в теореме VI.14. Поэтому допустим, что $z_0 \in D$. Мы знаем, что вблизи z_0

$$A(z)=A_{-k}(z-z_0)^{-k}+\ldots+A_{-1}(z-z_0)^{-1}+G(z),$$

где $G(z)$ аналитична в z_0 и компактна для z, близких к z_0 или равных z_0. Поскольку G непрерывна по норме в z_0, то $G(z_0)$ тоже компактен как предел последовательности компактных операторов. Далее, пусть F — оператор конечного ранга и N — открытый диск вокруг z_0, так что $\|G(z_0)-F\|<1/2$ и $\|G(z)-G(z_0)\|<1/2$ при $z \in N$. Пусть

$$F(z)=A_{-k}(z-z_0)^{-k}+\ldots+A_{-1}(z-z_0)^{-1}+F.$$

Тогда $\|A(z)-F(z)\|<1$ в N, так что $C(z)=[1-(A(z)-F(z))]^{-1}$ существует и аналитична в N. Следовательно, $(1-A(z))^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда существует $[1-F(z)C(z)]^{-1}$, поскольку

$$1-A(z)=(1-F(z)C(z))[1-(A(z)-F(z))].$$

Поскольку область значений $F(z)$ содержится в $\operatorname{Ran} A_{-k}+\ldots$ $\ldots+\operatorname{Ran} A_{-1}+\operatorname{Ran} F \equiv R$ — некотором фиксированном конечномерном пространстве, то область значений $F(z)C(z)$ тоже содержится в R. Следовательно, в силу уравнения (VI.5b) из § VI.5, оператор $1-F(z)C(z)$ обратим тогда и только тогда, когда некий детерминант из матричных элементов $1-C(z)F(z)$ отличен от нуля. Этот детерминант есть мероморфная функция в N, так что он имеет в N дискретные нули, если только он не равен нулю тождественно. Более того, в этом случае $(1-C(z)F(z))^{-1}$ выражается в виде $1+$ (конечное алгебраическое дополнение/

детерминант), так что $(1-C(z)F(z))^{-1}$ мероморфна и имеет вычеты конечного ранга в N. Таким образом, мы попадаем в условия случая (b) в N. Если же детерминант есть тождественный нуль, то мы локально попадаем в условия случая (a). ∎

Условие, что операторы $A_{-k}, \ldots, A_{-1}$ имеют конечный ранг, существенно. Теорема не справедлива, если предполагается лишь компактность $A_{-k}, \ldots, A_{-1}$ (задача 34). Отказаться от условия $\sigma(A)=\sigma_{\text{ess}}(A)$ в предыдущем предложении позволяет метод теоремы XIII.13.

Лемма 1. Пусть A — замкнутый оператор. Тогда $(A-z)^{-1}$ — мероморфная функция на $\mathbb{C}\diagdown\sigma_{\text{ess}}(A)$ с особенностями лишь в точках $z\in\sigma_{\text{disc}}(A)$. Коэффициенты при отрицательных степенях в разложении Лорана в точках $z_0\in\sigma_{\text{disc}}(A)$ суть операторы конечного ранга.

Доказательство. Мы знаем уже, что $(A-z)^{-1}$ аналитична в $\mathbb{C}\diagdown\sigma(A)$. Пусть z_0 — изолированная точка $\sigma(A)$. Тогда $(A-z)^{-1}$ аналитична на множестве $\{z \mid 0<|z-z_0|<r\}$, и потому на этом множестве

$$(A-z)^{-1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(z-z_0)^n,$$

где

$$R_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r/2}(z-z_0)^{-n-1}(A-z)^{-1}\,dz.$$

В § XII.2 мы воспользовались резольвентным тождеством, чтобы доказать, что $(-R_{-1})^2=-R_{-1}$. Таким же образом доказывается (см. задачу 3 к гл. XII), что

$$R_{-n}=-(N)^{n-1} \qquad (n\geqslant 2), \tag{18a}$$

где $N=-R_{-2}$, и что

$$NP=PN=N, \tag{18b}$$

где $P=-R_{-1}$ — проектор, ассоциированный с z_0. Наконец, так как $\sum_{n=-\infty}^{0} R_n\mu^n$ абсолютно сходится при всех $\mu\neq 0$, то $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n N^n$ сходится при всех λ, так что $(1-\lambda N)^{-1}$ существует при всех λ. Следовательно,

$$\sigma(N)=\{0\}. \tag{18c}$$

Предположим теперь, что точка спектра z_0 лежит в $\sigma_{\text{disc}}(A)$ и изолирована. Тогда P по определению имеет конечный ранг. Из (18b) видно, что $\operatorname{Ran} N\subset\operatorname{Ran} P$, так что каждый R_{-n} конечного ранга. Далее, согласно (18c), $N\restriction\operatorname{Ran} P$ есть конечномерный оператор со спектром $\{0\}$. Следовательно, $(NP)^k=0$ при некотором k. Так как, в силу (18b), $(NP)^k=N^k$, то $N^k=0$

при некотором k. Отсюда заключаем, что $R_{-n}=0$, если $n\geqslant k+1$. Следовательно, $(A-z)^{-1}$ мероморфна в z_0 с вычетами конечного ранга. ∎

Мы уже располагаем главными средствами для обобщения предложения, доказанного в начале этого раздела, на случай, когда $\sigma_{\text{disc}}(A)\cup\sigma_{\text{disc}}(B)\neq\varnothing$. Читатель мог бы остановиться здесь и попробовать сделать такое обобщение с помощью теоремы XIII.13. Мы же введем средство распространения этого предложения на неограниченные операторы.

Лемма 2 (теорема о сильном спектральном отображении). Пусть A — замкнутый оператор на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть $z_0\notin\sigma(A)$ и $B=(A-z_0)^{-1}$. Тогда:

(a) если $z\neq 0$, то $z\in\sigma(B)$ в том и только том случае, когда $z_0+z^{-1}\in\sigma(A)$; $z\in\sigma_{\text{ess}}(B)$ в том и только том случае, когда $z^{-1}+z_0\in\sigma_{\text{ess}}(A)$; $z\in\sigma_{\text{disc}}(B)$ в том и только том случае, когда $z^{-1}+z_0\in\sigma_{\text{disc}}(A)$;

(b) $0\in\sigma(B)$ в том и только том случае, когда A не ограничен; 0 никогда не принадлежит $\sigma_{\text{disc}}(B)$, так что если $0\in\sigma(B)$, то $0\in\sigma_{\text{ess}}(B)$.

Доказательство. Так как мы не будем применять утверждение (b), мы отнесем его доказательство к задачам (см. задачу 36). Для доказательства (a) прежде всего заметим, что если $z\neq 0$, то

$$(B-z)=(A-z_0)^{-1}-z=[1-z(A-z_0)](A-z_0)^{-1}=$$
$$=-z[A-(z^{-1}+z_0)](A-z_0)^{-1}.$$

Если $z\notin\sigma(B)$, то $[A-(z^{-1}+z_0)]^{-1}=-z(A-z_0)^{-1}(B-z)^{-1}$, так что $z^{-1}+z_0\notin\sigma(A)$. Если $z^{-1}+z_0\notin\sigma(A)$, то $-z^{-1}(A-z_0)[A-(z^{-1}+z_0)]^{-1}=-z^{-1}-z^{-2}[A-(z^{-1}+z_0)]^{-1}$ ограничен и является обратным к $B-z$, так что $z\notin\sigma(B)$. Следовательно, $z\in\sigma(B)$ тогда и только тогда, когда $z^{-1}+z_0\in\sigma(A)$ и изолированные точки спектра отображаются одна в другую посредством $z\mapsto z^{-1}+z_0$. Пусть $z_1\in\sigma_{\text{disc}}(B)$. Тогда вблизи $z=z_1$ функция $(B-z)^{-1}$ мероморфна с вычетами конечного ранга. Поэтому при z вблизи z_1 функция $[A-(z^{-1}+z_0)]^{-1}=-z(A-z_0)^{-1}(B-z)^{-1}$ тоже мероморфна с вычетами конечного ранга. Следовательно, при λ вблизи $z_1^{-1}+z_0$ функция $(A-\lambda)^{-1}$ мероморфна с вычетами конечного ранга и, значит, $z_1^{-1}+z_0\in\sigma_{\text{disc}}(A)$. Подобным же образом, если $\lambda\in\sigma_{\text{disc}}(A)$, можно показать, что $z=(\lambda-z_0)^{-1}\in\sigma_{\text{disc}}(B)$. ∎

Если бы мы хотели установить окончательную теорему лишь для полуограниченных самосопряженных операторов, можно было бы применить предложение, которым открывается этот раздел, к $(A+c)^{-1}$ с подходящим вещественным числом c. Но нам надо рассмотреть самосопряженные операторы со спектром $\mathbb{R}$, и нам придется ввести $(A+i)^{-1}$, который более не самосопряжен. Следовательно, нужно распространить указанное предложение на некоторые ограниченные несамосопряженные операторы.

Следующий пример показывает что равенство $\sigma_{ess}(A)=\sigma_{ess}(B)$ совсем не обязательно выполняется, если $B-A$ компактен.

Пример 1. Пусть $\mathcal{H}=l_2(-\infty,\infty)$. Пусть A — оператор левого сдвига, т. е. $(A\varphi)_n=\varphi_{n+1}$. Пусть C: $\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ определено посредством $(C\varphi)_n=\delta_{n,0}\varphi_1$. Следовательно, C есть возмущение ранга один. Пусть $B=A-C$. Мы покажем, что $\sigma(A)=\sigma_{ess}(A)=\{z \mid |z|=1\}$, в то время как $\sigma(B)=\sigma_{ess}(B)=\{z \mid |z|\leqslant 1\}$. Чтобы найти $\sigma(A)$, отобразим $l_2(-\infty,\infty)$ на $L^2(0, 2\pi)$ посредством $U\{\varphi_n\}=$ $=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(2\pi)^{-1/2}\varphi_n e^{inx}$. Оператор U унитарен и UAU^{-1} есть умножение на e^{-ix}, так что $\sigma(A)=\sigma(UAU^{-1})=\{z \mid |z|=1\}$. Обратимся теперь к B. Если $z\notin\sigma(A)$, то $(B-z)^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда существует $(1-C(A-z)^{-1})^{-1}$. Так как $C(A-z)^{-1}$ компактен, то $(1-C(A-z)^{-1})^{-1}$ существует, за исключением случая, когда $C(A-z)^{-1}$ имеет собственное значение 1, который равносилен тому, что z есть собственное значение B. Пусть $(B-z)\varphi=0$. Тогда $\varphi_{n+1}-\delta_{n,0}\varphi_1-z\varphi_n=0$. Предположим, что $z\neq 0$. Положив $n=0$, мы видим, что $\varphi_0=0$, а затем, полагая $n=-1, -2, \ldots,$ — что $\varphi_n=0$ при $n<0$. Полагая $n=1, 2, \ldots,$ мы видим, что $\varphi_n=z^{n-1}\varphi_1$, если $n\geqslant 1$. Следовательно, если $|z|>1$, таких собственных значений не существует и $B-z$ обратим, т. е. $z\in\rho(B)$. Если $|z|<1$, то

$$\langle 0, \varphi_1, z\varphi_1, \ldots, z^{n-1}\varphi_1, \ldots\rangle$$

есть собственный вектор, так что $z\in\sigma(B)$.

Интересно отметить, в каком месте не проходит доказательство того, что $\sigma_{ess}(B)=\sigma_{ess}(A)$. Функция $C(A-z)^{-1}$ по-прежнему аналитична в $\mathbb{C}\setminus\sigma(A)$. На той компоненте $\mathbb{C}\setminus\sigma(A)$, которая простирается до бесконечности, $\|C(A-z)^{-1}\|$ кое-где меньше единицы, так что $(1-C(A-z)^{-1})^{-1}$ существует на этой компоненте. На другой компоненте нам a priori неизвестно, что $(1-$ $-C(A-z)^{-1})^{-1}$ существует хотя бы в одной точке, так что мы попадаем в условия пункта (а) аналитической теоремы Фредгольма, когда мало что можно сказать.

Пример 1 показывает, что нужны такие предположения о B, которые гарантировали бы нам невозможность оказаться в том положении, когда обратный оператор не существует нигде на некоторой компоненте $\mathbb{C}\setminus\sigma(A)$. Если мы обратим пример 1 и будем рассматривать A как возмущение B, то увидим, что внутренность $\sigma_{ess}(A)$ может исчезать под действием возмущения, поэтому мы будем предполагать, что $\sigma_{ess}(A)$ нигде не плотно.

Лемма 3. Пусть A и B — ограниченные операторы с компактной разностью $A-B$, такие, что

(a) $\sigma(A)$ имеет пустую внутренность как подмножество $\mathbb{C}$;

(b) каждая компонента $\mathbb{C}\setminus\sigma(A)$ содержит точку из $\rho(B)$.

Тогда $\sigma_{\text{ess}}(A)=\sigma_{\text{ess}}(B)$.

Доказательство. Пусть $C=A-B$. Вследствие компактности C функция $C(A-z)^{-1}$ аналитична и имеет компактные значения в $\mathbb{C}\setminus\sigma(A)$, а вследствие леммы 1 она мероморфна в $\mathbb{C}\setminus\sigma_{\text{ess}}(A)$ с вычетами конечного ранга в точках $\sigma_{\text{disc}}(A)$. Если $z\notin\sigma(A)$, то $(B-z)^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда существует $(1-C(A-z)^{-1})^{-1}$. Итак, в силу (b), заключаем, что в каждой компоненте $\mathbb{C}\setminus\sigma(A)$ оператор $(1-C(A-z)^{-1})^{-1}$ где-либо обратим. Компоненты $\mathbb{C}\setminus\sigma(A)$ и $\mathbb{C}\setminus\sigma_{\text{ess}}(A)$ совпадают вследствие дискретности $\sigma_{\text{disc}}(A)$. По мероморфной теореме Фредгольма заключаем, что $(1-C(A-z)^{-1})^{-1}$ существует на $\mathbb{C}\setminus\sigma_{\text{ess}}(A)$ всюду, кроме дискретного множества D', где она имеет вычеты конечного ранга. Отсюда следует, что B может иметь лишь дискретный спектр в $\mathbb{C}\setminus\sigma_{\text{ess}}(A)$, так что $\sigma_{\text{ess}}(B)\subset\sigma_{\text{ess}}(A)$. Так как $\sigma(A)$ не имеет внутренних точек, каждая компонента $\mathbb{C}\setminus\sigma_{\text{ess}}(B)$ имеет точки, не лежащие ни в $\sigma(A)$, ни в $\sigma(B)$. Теперь мы можем обратить проведенное рассуждение и заключить, что $\sigma_{\text{ess}}(A)\subset\subset\sigma_{\text{ess}}(B)$. ∎

Теперь уже можно доказать основную теорему. Однако, поскольку главное условие состоит в том, что $(A-z)^{-1}-(B-z)^{-1}$ компактен, полезно отметить следующее:

Лемма 4. Пусть A и B — замкнутые операторы. Если $(A-z)^{-1}-(B-z)^{-1}$ компактен при некотором $z_0\in\rho(A)\cap\rho(B)$, то он компактен при всех $z\in\rho(A)\cap\rho(B)$.

Доказательство. С помощью первой резольвентной формулы выражение $(A-z)^{-1}-(B-z)^{-1}$ можно записать в виде конечной суммы членов вида $C[(A-z_0)^{-1}-(B-z_0)^{-1}]D$ с ограниченными C и D. ∎

Теперь мы готовы к доказательству основной теоремы этого раздела.

Теорема XIII.14 (теорема Вейля о существенном спектре). Пусть A — самосопряженный, а B — ограниченный операторы, такие, что

(a) при некотором (а следовательно, при всех) $z\in\rho(B)\cap\rho(A)$ оператор $(A-z)^{-1}-(B-z)^{-1}$ компактен

и *либо*

(b_1) $\sigma(A)\neq\mathbb{R}$ и $\rho(B)\neq\varnothing$, *либо*

(b_2) точки $\rho(B)$ имеются и в верхней, и в нижней полуплоскостях.

Тогда $\sigma_{ess}(B)=\sigma_{ess}(A)$.

Доказательство. Согласно предположению, некоторое z_0 вне вещественной оси принадлежит $\rho(B)$. Пусть $D=(A-z_0)^{-1}$ и $E=(B-z_0)^{-1}$. По лемме 2, достаточно доказать, что $\sigma_{ess}(D)=\sigma_{ess}(E)$, ибо тогда можно сделать вывод, что $\sigma_{ess}(A)=\sigma_{ess}(B)$. Так как A самосопряжен, то $\sigma_{ess}(A)\subset\mathbb{R}$ и потому $\sigma_{ess}(D)\subset\{\lambda\mid\lambda^{-1}+z_0\in\mathbb{R}\}\cup\cup\{0\}$. Вследствие этого $\sigma_{ess}(D)$ имеет пустую внутренность и либо $\sigma_{ess}(A)=\mathbb{R}$, и тогда $\mathbb{C}\setminus\sigma_{ess}(D)$ имеет две компоненты, либо $\sigma_{ess}(A)\neq\mathbb{R}$, и тогда $\mathbb{C}\setminus\sigma_{ess}(D)$ связно. В любом случае из (b) и леммы 2 следует, что каждая компонента $\mathbb{C}\setminus\sigma_{ess}(D)$ пересекается с $\rho(E)$. Так как D и E ограничены, а их разность $D-E$ компактна вследствие леммы 4, то можно применить лемму 3 и заключить, что $\sigma_{ess}(D)=\sigma_{ess}(E)$. Это доказывает теорему. ∎

Заметим, что теорему XIII.14 можно распространить на некоторые случаи, когда A не является ни самосопряженным, ни нормальным, однако это потребует довольно сложных дополнительных предположений. Так как в приложениях A почти всегда самосопряжен, мы доказали теорему для этого простого случая. Следующий пример показывает необходимость какого-то условия типа (b).

Пример 2. Пусть A и B — операторы из примера 1, так что $\sigma(A)=\{z\mid|z|=1\}$ и $\sigma(B)=\{z\mid|z|\leqslant 1\}$. Заметим, что 1 не есть собственное значение A, A^*, B, B^*, поэтому $A-1$ и $B-1$ суть инъективные отображения l_2 на плотные подмножества в l_2. Следовательно, $(A-1)^{-1}$ и $(B-1)^{-1}$ — неограниченные плотно определенные замкнутые операторы. Пусть

$$D=i(A+1)(A-1)^{-1}=i[1+2(A-1)^{-1}],$$
$$E=i(B+1)(B-1)^{-1}=i[1+2(B-1)^{-1}].$$

Тогда D самосопряжен, так как при отображении U, рассмотренном в примере 1, D есть умножение на $i(e^{-i\theta}+1)/(e^{-i\theta}-1)=-\mathrm{ctg}(\theta/2)$. Заметим что $(D-i)^{-1}={}^1/_2A-{}^1/_2$ и $(E-i)^{-1}={}^1/_2B-{}^1/_2$. Следовательно, по теореме о сильном спектральном отображении (лемма 2 выше), $\sigma(D)=\mathbb{R}$ и $\sigma(E)=\{z\mid\operatorname{Im}z\leqslant 0\}$. Более того, $(D-i)^{-1}-(E-i)^{-1}$ компактен однако $\sigma_{ess}(D)\neq\sigma_{ess}(E)$. Этот пример связан с примером 1 при помощи обратного преобразования Кэли (см. замечания к § X.1).

При применении теоремы XIII.14 полезно заменить (b) более простыми условиями. Для этой цели приведем два следствия.

Следствие 1. Пусть A и B — самосопряженные операторы с компактным $(A+i)^{-1}-(B+i)^{-1}$. Тогда

$$\sigma_{\text{ess}}(A)=\sigma_{\text{ess}}(B).$$

Доказательство. Поскольку B самосопряжен, $\rho(B)$ содержит точки обеих полуплоскостей. ∎

Чтобы сформулировать следствие 2, нам потребуется новое понятие.

Определение. Пусть A самосопряжен. Оператор C, такой, что $D(A)\subset D(C)$, называется **относительно компактным** по отношению к A тогда и только тогда, когда $C(A+i)^{-1}$ компактен.

Отметим, что если C относительно компактен, то $C(A-z)^{-1}$ компактен при всех $z\in\rho(A)$, а если $C(A-z)^{-1}$ компактен при некотором $z\in\rho(A)$, то C относительно компактен (задача 38а). Свойство относительной компактности можно также сформулировать в терминах гильбертова пространства $D(A)$ с нормой $\|\varphi\|_A^2=\|\varphi\|^2+\|A\varphi\|^2$: C относительно компактен тогда и только тогда, когда он компактен как отображение из $\langle D(A), \|\cdot\|_A\rangle$ в $\langle\mathscr{H}, \|\cdot\|\rangle$.

Следствие 2. Пусть A — самосопряженный оператор, и пусть C — его относительно компактное возмущение. Тогда:

(a) $B=A+C$, определенный так, что $D(B)=D(A)$, есть замкнутый оператор;

(b) если C симметричен, то B самосопряжен;

(c) $\sigma_{\text{ess}}(A)=\sigma_{\text{ess}}(B)$.

Доказательство. При вещественных и положительных λ имеем $C(A+i\lambda)^{-1}=[C(A+i)^{-1}][(A+i)(A+i\lambda)^{-1}]$. Если перейти к спектральному представлению для A, то $(A\pm i)(A\pm i\lambda)^{-1}$ есть умножение на $(x\pm i)(x\pm i\lambda)^{-1}$, так что $\operatorname*{s-lim}_{\lambda\to\infty}(A\pm i)(A\pm i\lambda)^{-1}=0$. Так как $C(A+i)^{-1}$ компактен и $[(A+i)(A+i\lambda)^{-1}]^*$ в сильном смысле стремится к нулю, то $C(A+i)^{-1}[(A+i)(A+i\lambda)^{-1}]$ стремится к нулю по норме. Значит,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|C(A+i\lambda)^{-1}\|=0.$$

Отсюда следует, что C A-ограничен с относительной гранью нуль, а из этого немедленно вытекают (а) и (b) (см. § X.2). Далее, при больших λ существуют и $[1+C(A+i\lambda)^{-1}]^{-1}$, и $[1+C(A-i\lambda)^{-1}]^{-1}$, так что $(B+i\lambda)^{-1}$ и $(B-i\lambda)^{-1}$ существуют при больших λ. Следовательно, $\rho(B)$ содержит точки из каждой полуплоскости. Наконец, при больших λ

$$(B+i\lambda)^{-1}-(A+i\lambda)^{-1}=(A+i\lambda)^{-1}[(1+C(A+i\lambda)^{-1})^{-1}-1]= \\ =-(B+i\lambda)^{-1}C(A+i\lambda)^{-1}.$$

Так как $C(A+i\lambda)^{-1}$ компактен, разность $(B+i\lambda)^{-1}-(A+i\lambda)^{-1}$ тоже компактна и применима теорема XIII.14. Следовательно, $\sigma_{\text{ess}}(B)=\sigma_{\text{ess}}(A)$. ∎

Свойство относительной компактности можно сформулировать в терминах квадратичных форм и доказать соответствующий аналог следствия 2 (задача 39).

Проделав некоторую дополнительную работу, можно усилить следствие 2.

Следствие 3. Пусть A — самосопряженный оператор, и пусть C — симметрический оператор, представляющий собой относительно компактное возмущение оператора A^n с некоторым положительным целым n. Допустим, что $B=A+C$ самосопряжен на $D(A)$. Тогда $\sigma_{\text{ess}}(A)=\sigma_{\text{ess}}(B)$.

Доказательство. Заметим, что так как $D(A)\subset D(C)$, то C A-ограничен по теореме о замкнутом графике. Предположим сначала, что $n=2$. При φ и η из $C^\infty(A)$ функция $(\varphi, (A^2+1)^{-z}C(A^2+1)^{-1+z}\eta)$ аналитична в полосе $0<\operatorname{Re} z<1$ и непрерывна в ее замыкании, а $C(A^2+1)^{-1+iy}$ компактен, так что по доказанной ниже лемме $(A^2+1)^{-1/2}C(A^2+1)^{-1/2}$ тоже компактен. Значит, $(A+i)^{-1}C(A+i)^{-1}$ компактен. Так как $D(A)=D(B)$, оператор $(A-i)(B-i)^{-1}$ ограничен, поэтому $(A+C+i)^{-1}C(A+i)^{-1}$ компактен. Поскольку

$$(A+i)^{-1}-(B+i)^{-1}=(B+i)^{-1}C(A+i)^{-1},$$

мы можем применить теорему XIII.14 и убедиться, что $\sigma_{\text{ess}}(A)=\sigma_{\text{ess}}(B)$.

Теперь докажем следствие для случая произвольного n, показав, что если все ее предположения выполняются для некоторого $n>2$, то они выполнены и при $n=2$. Действительно, пусть $\varphi, \eta\in C^\infty(A)$. Тогда функция $(\varphi, C(A^2+1)^{-g(z)}\eta)$, где $g(z)={}^1/_2 z+{}^1/_2 n(1-z)$, аналитична в полосе $0<\operatorname{Re} z<1$ и непрерывна в ее замыкании. Так как $C(A^2+1)^{-g(iy)}$ компактен при вещественных y и $C(A^2+1)^{-g(1+iy)}$ ограничен, то $C(A^2+1)^{-g(t)}$ компактен при $t=(n-2)/(n-1)$ в силу леммы, приведенной ниже. Следовательно, C A^2-компактен. ∎

Заметим, что следствие 3 неверно, если потребовать лишь самосопряженности в существенном на $D(A)$. Предположим, например, что A имеет компактную резольвенту и $C=-A$. Тогда $\sigma_{\text{ess}}(A)=\varnothing$, а $\sigma_{\text{ess}}(B)=\{0\}$. В доказательстве мы опирались на следующую лемму:

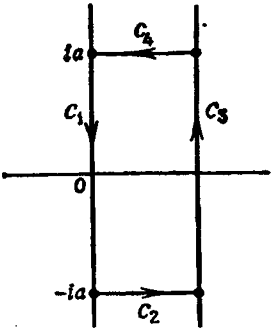

Рис. XIII.2.

Лемма. Пусть D плотна в некотором гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, и предположим, что при каждом $z \in S = \{z \mid 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1\}$ мы имеем такую квадратичную форму $a(z)$ на $D \times D$, что

(1) $(\eta, a(z)\varphi)$ аналитична в S^{int} и непрерывна на S при всех $\eta, \varphi \in D$;

(2) при $z = iy$ (соответственно $1 + iy$) $a(z)$ — квадратичная форма компактного (соответственно ограниченного) оператора $A(z)$;

(3) $\sup_y \{\|A(iy)\|, \|A(1+iy)\|\} \equiv M < \infty$.

Тогда $a(z)$ при любом $z \in S^{\text{int}}$ есть квадратичная форма компактного оператора.

Доказательство. По теореме Адамара о трех прямых (см. дополнение к § IX.4), $|(\eta, a(z)\varphi)| \leqslant M\|\eta\| \cdot \|\varphi\|$ при любом z, так что $a(z)$ есть квадратичная форма ограниченного оператора $A(z)$. Отображение $z \longmapsto A(z)$ аналитично в S^{int} и слабо непрерывно в S. Остается доказать, что $A(z)$ компактен в S^{int}. Мы дадим доказательство для $z = {}^1/_2$; доказательство для других z такое же. Чтобы показать, что A компактен, достаточно убедиться в том, что $\||A|^{1/2}\varphi_n\| \to 0$ при $n \to \infty$ для любого ортонормированного множества $\{\varphi_n\}$. Поскольку $\||A|^{1/2}\varphi_n\|^2 = (U^*\varphi_n, A\varphi_n)$ при соответствующей частичной изометрии U, нам нужно только показать, что при любом ортонормированном множестве $\{\varphi_n\}$ и любой последовательности $\{\eta_n\}$ с $\|\eta_n\| \leqslant 1$ имеем $(\eta_n, A\varphi_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть C — контур $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$, изображенный на рис. XIII.2. Тогда для любой целой функции $f(z)$ с $f(1/2) = 1$ имеем

$$|(\eta_n, A\varphi_n)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_C |z - 1/2|^{-1} |f(z)| |(\eta_n, A(z)\varphi_n)| \, d|z|.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $f(z) = \exp[z^2 - 1/4 - B(z - 1/2)]$. Тогда $f(1/2) = 1$ и, выбрав должным образом B и a, можно устроить так, что

$$\frac{1}{2\pi} M \int_{C_2 \cup C_3 \cup C_4} |z - 1/2|^{-1} |f(z)| \, d|z| \leqslant \varepsilon.$$

Но $\lim_{n \to \infty} |(\eta_n, A(iy)\varphi_n)| = 0$ при любом iy на C_1 вследствие компактности $A(iy)$. Поэтому, так как подынтегральное выражение равномерно ограничено,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{C_1} \left|z - \frac{1}{2}\right|^{-1} |f(z)| |(\eta_n, A(z)\varphi_n)| \, d|z| = 0$$

по теореме о мажорированной сходимости. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_n} |(\eta_n, \ A\varphi_n)| \leqslant \varepsilon,$$

так что $(\eta_n, \ A\varphi_n) \to 0$, когда $n \to \infty$. ∎

Часто полезно пользоваться другим вариантом следствия 3, сформулированным в терминах квадратичных форм:

Следствие 4. Пусть A — положительный самосопряженный оператор, и пусть C — самосопряженный оператор, такой, что $Q(C) \supset Q(A)$. Предположим, что сумма квадратичных форм $A + C$ ограничена снизу и замкнута на $Q(A)$, и пусть B есть соответствующий самосопряженный оператор. Допустим далее, что *либо*

(i) C — относительно компактное возмущение оператора A^n с некоторым положительным целым n;

либо

(ii) $Q(|C|) \supset Q(A)$ и $|C|$ есть относительно компактное в смысле формы возмущение A^n с некоторым положительным целым n, т. е. $(A+1)^{-n/2} |C| (A+1)^{-n/2}$ компактен.

Тогда $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$.

Доказательство. Как и в случае следствия 3, достаточно доказать компактность $(A+\lambda)^{-1} C (B+\lambda)^{-1}$, где $\lambda > 0$ выбрано так, что $-\lambda < \inf \sigma(B)$. Сделав преобразование

$$(A+\lambda)^{-1} C (B+\lambda)^{-1} =$$
$$= [(A+\lambda)^{-1} C (A+\lambda)^{-1/2}] [(A+\lambda)^{1/2} (B+\lambda)^{-1/2}] (B+\lambda)^{-1/2},$$

заметим, что $(A+\lambda)^{1/2} (B+\lambda)^{-1/2}$ ограничен, поскольку $Q(A) = Q(B)$, так что достаточно доказать компактность $(A+1)^{-1} C (A+1)^{-1/2}$.

В силу условия (i), это вытекает из сочетания двух фактов: компактности $(A+1)^{-n} C (A+1)^{-1/2}$ и ограниченности $(A+1)^{-1/2} \times \times C (A+1)^{-1/2}$. В силу условия (ii), $|C|^{1/2} (A+1)^{-1/2}$ ограничен, а $|C|^{1/2} (A-1)^{-n/2}$ компактен, так что $|C|^{1/2} (A+1)^{-1}$ компактен. Таким образом,

$$(A+1)^{-1} C (A+1)^{-1/2} = [|C|^{1/2} (A+1)^{-1}]^* (\operatorname{sgn} C) [|C|^{1/2} (A+1)^{-1/2}]$$

компактен. ∎

Теперь мы готовы рассмотреть различные примеры, в которых применяется теорема Вейля.

Пример 3 (классическая теорема Вейля). Если A самосопряжен и C компактен, то $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A+C)$. Это выполняется, так как C автоматически относительно компактен.

Пример 4. Пусть $V \in C_0^\infty(0, \infty)$, и пусть H — оператор $-d^2/dx^2 + V$ на $C_0^\infty(0, \infty)$. Он не самосопряжен, но имеет индексы дефекта $\langle 1, 1 \rangle$ (см. дополнение к § X.1). Пусть A и B — два различных самосопряженных расширения оператора H. Если $D = D(\bar{H})$, то $\operatorname{Ran}(\bar{H}+i) \equiv R$ есть замкнутое подпространство коразмерности 1, так как H имеет индексы дефекта $\langle 1, 1 \rangle$. Если $\psi \in R$, то $\psi = (\bar{H}+i)\varphi$ для некоторого φ и потому

$$[(A+i)^{-1} - (B+i)^{-1}]\psi = (A+i)^{-1}(\bar{H}+i)\varphi - (B+i)^{-1}(\bar{H}+i)\varphi = 0,$$

так как $\bar{H} \subset A$ и $\bar{H} \subset B$. Значит, $(A+i)^{-1} - (B+i)^{-1}$ исчезает на R. Так как R имеет коразмерность 1, то отсюда следует, что разность $(A+i)^{-1} - (B+i)^{-1}$ имеет ранг 1 и потому компактна. Следовательно, $\sigma_{\text{ess}}(A) = \sigma_{\text{ess}}(B)$.

Пример 5. В общем случае пусть H — оператор с индексами дефекта $\langle d, d \rangle$ с $d < \infty$. Если A и B — два самосопряженных расширения оператора H, то $(A+i)^{-1} - (B+i)^{-1}$ есть оператор ранга d, как в примере 4, так что $\sigma_{\text{ess}}(A) = \sigma_{\text{ess}}(B)$. Если $d = \infty$, то этот вывод не обязательно правилен (см. задачу 40).

Пример 6. Пусть $H_0 = -\Delta$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$. Воспользовавшись преобразованием Фурье, легко видеть, что $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta) = [0, \infty)$. Пусть V принадлежит $L^2 + (L^\infty)_\varepsilon$; тогда $V(H_0+1)^{-1}$ компактен. Действительно, можно найти $V_n \in L^2$, такие, что $V - V_n \in L^\infty$ и $\lim_{n\to\infty} \|V_n - V\|_\infty = 0$. Следовательно, $V_n(H_0+1)^{-1}$ сходится по норме к $V(H_0+1)^{-1}$, и остается лишь показать, что $V_n(H_0+1)^{-1}$ компактен при всяком n. Но $V_n(H_0+1)^{-1}$ есть интегральный оператор с ядром $V_n(x)e^{-|x-y|}/4\pi|x-y|$ из $L^2(\mathbb{R}^6)$. Следовательно, $V_n(H_0+1)^{-1}$ — оператор Гильберта — Шмидта и, значит, компактный. Так как $V(H_0+1)^{-1}$ компактен, V относительно компактен, и потому $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta+V) = \sigma_{\text{ess}}(-\Delta) = [0, \infty)$.

Расширение этого результата на n-мерный случай ($n \neq 3$) см. в задаче 41.

Пример 7. В более общем случае пусть $V \in R + (L^\infty)_\varepsilon$. Вообще говоря, V не будет относительно компактным, так как $D(V)$ может не содержать $D(H_0)$. Однако это возмущение компактно в смысле форм, и поэтому можно воспользоваться теорией из задачи 39. Вместо этого заметим, что если $W \in R$, то

$$\lim_{E\to+\infty} \| |W|^{1/2}(H_0+E)^{-1}|W|^{1/2} \| = 0,$$

так как $|W|^{1/2}(H_0+E)^{-1}|W|^{1/2}$ есть оператор Гильберта — Шмидта с ядром

$$|W(x)|^{1/2}\exp(-\sqrt{E}|x-y|)|W(y)|^{1/2}/4\pi|x-y|,$$

а норма в L^2 этого ядра стремится к нулю в силу теоремы о мажорированной сходимости. Следовательно, при больших положительных E

$$(H+E)^{-1}-(H_0+E)^{-1}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}((H_0+E)^{-1}|W|^{1/2})[-W^{1/2}(H_0+E)^{-1}|W|^{1/2}]^n(W^{1/2}(H_0+E)^{-1}),$$

где $H=H_0+W$ и $W^{1/2}\equiv W/|W|^{1/2}$. Каждый член в этой сходящейся по норме сумме компактен. Действительно, положив $A=(H_0+E)^{-1/2}|W|^{1/2}$, видим, что A^*A компактен и, значит, компактен A. Таким образом, если $W\in R$, то $(H_0+W+E)^{-1}-(H_0+E)^{-1}$ компактен. Обобщение от R к $R+(L^\infty)_\varepsilon$ делается так же, как выше.

Пример 8. Рассмотрим оператор $H\equiv-\Delta+\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}+V(x)$, связанный с задачей об эффекте Штарка. По теоремам X.29 и X.38, H в существенном самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, если $V\in L^p(\mathbb{R}^n)+L^\infty(\mathbb{R}^n)$, где $p=2$ при $n\leqslant 3$, $p>2$ при $n=4$ и $p=n/2$ при $n\geqslant 5$. Поскольку член $\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}$ стремится к $-\infty$ таким образом, что он не может быть компенсирован членом $-\Delta$, можно показать, что H не ограничен снизу, и потому мы ожидаем, что $\sigma(H)=(-\infty,\infty)$. Мы покажем, что при более сильном предположении $V=V_1+V_2$, где $V_1\in L^p$ имеет компактный носитель и $V_2\in L^\infty$ стремится к нулю на бесконечности, V есть относительно компактное возмущение оператора $H_0=-\Delta+\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}$. Пусть p_a — оператор импульса в направлении, параллельном $\mathbf{a}$, и $p_a^\perp$ — ортогональный импульс. Тогда элементарное вычисление (см. § XI.4) показывает, что на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\exp(-i\alpha p_a^3)H_0\exp(+i\alpha p_a^3)=(p_a^\perp)^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}\equiv\tilde{H}_0,$$

где $\alpha=(3|a|)^{-1}$. Можно «диагонализовать» $\tilde{H}_0$ посредством преобразования Фурье в направлении, ортогональном к $\mathbf{a}$. Отсюда следует, что H_0 в существенном самосопряжен на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\sigma(H_0)=(-\infty,\infty)$, так что, если V относительно компактен, мы имеем новое доказательство того, что H_0+V в существенном самосопряжен на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и, более того, что $\sigma_{ess}(H)=\sigma_{ess}(H_0)=(-\infty,\infty)$, откуда $\sigma(H)=(-\infty,\infty)$. Как и выше, часть V_2 легко прибавить, если показать, что $V_1(H_0+i)^{-1}$ компактен. Пусть $T=-\Delta$. Тогда на $\mathscr{S}$, которое является существенной областью и для H_0, и для T,

$$(H_0+i)^{-1}=(T+i)^{-1}-(T+i)^{-1}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})(H_0+i)^{-1}=$$
$$=(T+i)^{-1}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})(T+i)^{-1}(H_0+i)^{-1}+$$
$$+2i|a|(T+i)^{-1}p_a(T+i)^{-1}(H_0+i)^{-1},$$

поскольку $[\mathbf{a}\cdot \mathbf{x},\ T]=2i|a|p_a$. Так как V_1 и $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})V_1$ — относительно компактные возмущения оператора T (см. задачу 41) и $p_a(T+i)^{-1}$ ограничен, то $V_1(H_0+i)^{-1}$ компактен.

Подведем итог всем этим результатам, включая и задачу 41:

Теорема XIII.15. Пусть $H=-\Delta+\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}+V$ — оператор в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда:

(a) если $a=0$, $n=3$, $V\in R+L^\infty_\varepsilon$, то $\sigma_{\text{ess}}(H)=[0,\ \infty)$;

(b) если $a=0$, $V\in L^p+L^\infty_\varepsilon$, где $p\geqslant\max\{n/2,\ 2\}$ при $n\neq 4$ и $p>2$ при $n=4$, то $\sigma_{\text{ess}}(H)=[0,\ \infty)$;

(c) если $a\neq 0$, $V=V_1+V_2$, где $V_1\in L^p$ (p как выше) имеет компактный носитель и $V_2\in L^\infty$ стремится к нулю на бесконечности, то $\sigma(H)=\sigma_{\text{ess}}(H)=(-\infty,\ \infty)$.

Пользуясь следствием 4, можно рассмотреть некоторые другие потенциалы.

Пример 9. Пусть $V=|r|^{-2}$ на $L^2(\mathbb{R}^5)$, и пусть $H_0=-\Delta$. Тогда V не может быть H_0-компактным, так как его относительная грань отлична от нуля (см. пример 4 в § X.2). Однако, по следующему общему критерию, V будет H_0^2-компактным.

Предположим, что $V\in L^2(\mathbb{R}^5)+(L^\infty(\mathbb{R}^5))_\varepsilon$. Тогда для каждого $\varepsilon>0$ мы можем написать $V=V_{1,\varepsilon}+V_{2,\varepsilon}$, где $V_{1,\varepsilon}\in L^2$ и $\sup\limits_x|V_{2,\varepsilon}(x)|\leqslant\varepsilon$. Следовательно, $V_{1,\varepsilon}(H_0^2+1)^{-1}$ сходится по норме к $V(H_0^2+1)^{-1}$, так что остается лишь показать, что $V_{1,\varepsilon}(H_0^2+1)^{-1}$ компактен для каждого $\varepsilon>0$. Но это видно непосредственно, так как из $V_{1,\varepsilon}\in L^2$ и $(p^4+1)^{-1}\in L^2$ следует, что $V_{1,\varepsilon}(H_0^2+1)^{-1}$ есть оператор Гильберта—Шмидта.

Возвращаясь к случаю $V=|r|^{-2}$, мы видим из примера 4 в § X.2, что если $\lambda\geqslant -2{,}25$, то $Q(-\Delta+\lambda V)=Q(-\Delta)$ и $-\Delta+\lambda V$ ограничен снизу. При таких λ применимо следствие 4, так что $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta+\lambda V)=[0,\ \infty)$. Аналогичное рассуждение можно применять и к случаю $V=|r|^{-1}$, если $H_0=\sqrt{-\Delta+m^2}$. Когда H_0 — оператор Дирака, он не ограничен снизу, поэтому требуются более тонкие методы.

Теорема XIII.15 показывает, что если V — ограниченная функция с компактным носителем в $\mathbb{R}^3$, то $-\Delta+V$ имеет лишь конечное число собственных значений в $(-\infty,\ -1]$. Этот результат нетрудно распространить и на $\mathbb{R}^n$ (задача 41). Можно доказать (и в сущности для $n\geqslant 3$ мы это уже доказали в теореме XIII.12), что в $(-\infty,\ 0)$ есть лишь конечное число собственных значений, но для приложений достаточно более простого результата для $(-\infty,\ -1]$.

Теорема XIII.16. Пусть V — локально ограниченная положительная функция и $V(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$. Определим $-\Delta+V$

как сумму квадратичных форм. Тогда $-\Delta+V$ имеет чисто дискретный спектр.

Доказательство. Пусть $H=-\Delta+V$. По принципу минимакса достаточно доказать, что $\mu_n(H)\to\infty$ при $n\to\infty$. Для данного c найдем такой шар S, что $V(x)\geqslant c$, если $x\notin S$. Такой шар существует, так как $V(x)\to\infty$ при $x\to\infty$. Пусть W — потенциал, равный $-c$, если $x\in S$, и 0, если $x\notin S$. Тогда $V\geqslant c+W$, так что

$$\mu_n(H)\geqslant c+\mu_n(-\Delta+W).$$

Так как W — ограниченный потенциал с компактным носителем, то существует такое N, что $\mu_n(-\Delta+W)\geqslant -1$ при $n\geqslant N$. Следовательно, $\mu_n(H)\geqslant c-1$ при $n\geqslant N$. Так как c было произвольным, то $\mu_n(H)\to\infty$ при $n\to\infty$. ∎

Мы еще вернемся к общему вопросу об операторах с чисто дискретным спектром в § 14 и 15.

Следующий поразительный результат, в каком-то смысле обратный теореме Вейля, принадлежит фон Нейману.

Теорема XIII.16.1. Пусть A и B — ограниченные самосопряженные операторы, причем $\sigma_{ess}(A)=\sigma_{ess}(B)$. Тогда существуют унитарный оператор U и компактный оператор C, такие, что $B=U(A+C)U^{-1}$.

Это утверждение удивительно потому, что в его формулировке совершенно не упоминается кратность, иными словами, в качестве A можно взять оператор умножения на x в $L^2((0, 1); dx)$, а в качестве B — прямую сумму $A\oplus A$! Теорема XIII.16.1 опирается на следующий результат, который также весьма неожидан.

Теорема XIII.16.2 (теорема Вейля — фон Неймана). Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор. Тогда для любого ε существует самосопряженный оператор Гильберта — Шмидта B с нормой $\|B\|_2\leqslant\varepsilon$, такой, что сумма $A+B$ обладает полной системой собственных векторов.

Доказательство. Предположим, что $\|A\|\leqslant 1$. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$ — пространстве действия оператора A. Пусть $\mathcal{H}_1$ — циклическое подпространство для A, порождаемое вектором φ_1. По спектральной теореме существует изоморфизм $\mathcal{H}_1\cong L^2((-1, 1); d\mu)$, причем такой, что вектор φ_1 отвечает функции, тождественно равной 1, а оператор A — умножению на x. Пусть m — положительное целое число, которое будет зафиксировано ниже, и пусть P_1 — проектор в $L^2((-1, 1); d\mu)$ на те функции, которые постоянны на каждом интервале $(j/m, (j+1)/m)$. Тогда ранг P_1 не превосходит $2m$, так что ранг оператора $D\equiv P_1A(1-P_1)+(1-P_1)AP_1$ не превосходит $4m$.

Любой элемент из $P_1\mathscr{H}_1$ имеет вид $\sum_{j=-m}^{m-1} a_j x_j = \eta$. Пусть $\bar{\eta} = \sum_{j=-m}^{m-1} \frac{j+1/2}{m} a_j x_j \in \operatorname{Ran} P_1$. Тогда

$$\|A\eta - \bar{\eta}\|^2 \leqslant \frac{1}{4m^2}\|\eta\|^2,$$

так что $\|(1-P_1)AP_1\| \leqslant (2m)^{-1}$. Отсюда следует, что норма D не превосходит m^{-1}, а потому и любое из его собственных значений ограничено этой же величиной. Поскольку их не больше, чем $4m$, то $\|D\|_2 \leqslant [m^{-2}4m]^{1/2}$. Выбирая m достаточно большим, можно получить, что норма Гильберта—Шмидта оператора D не превосходит $\varepsilon/2$.

Пусть $B_1 = -D$. Тогда сумма $A+B_1 = P_1AP_1 + (1-P_1)A(1-P_1)$ оставляет множество $P_1\mathscr{H}$ инвариантным. Поскольку $P_1\mathscr{H}$ конечномерно, оно состоит из собственных векторов оператора $A+B_1$, и, в частности, φ_1 есть сумма собственных векторов. Пусть теперь $\bar{\varphi}_2 = (1-P_1)\varphi_2$. По предыдущему построению для оператора $(1-P_1)A(1-P_1)$ на $(1-P_1)\mathscr{H}$ можно найти проектор P_2, такой, что $\operatorname{Ran} P_2 \subset \operatorname{Ran}(1-P_1)$, и оператор B_2 с нормой $\|B_2\|_2 \leqslant \varepsilon/4$, такой, что $\tilde{\varphi}_2$—сумма собственных векторов оператора $A+B_1+B_2$ и что $B_2 \upharpoonright P_1\mathscr{H} = 0$. Итак, φ_1 и φ_2—суммы собственных векторов этого оператора. Повторяя этот процесс, мы найдем оператор B с нормой $\|B\|_2 \leqslant \varepsilon$, такой, что каждый вектор φ_i есть сумма собственных векторов оператора $A+B$. Отсюда следует, что $A+B$ имеет чисто точечный спектр. ∎

Заметим, что в предыдущем построении φ_2 можно заменить на φ_p для любого $p > 1$. Однако, в силу инвариантности σ_{ac} относительно возмущений из класса операторов со следом (теорема XI.8), φ_2 нельзя заменить на φ_1.

Доказательство теоремы XIII.16.1. По теореме Вейля—фон Неймана к A и B можно прибавить такие компактные операторы, чтобы оба получившихся суммарных оператора имели полные системы собственных векторов. Более того, к этим последним операторам можно еще прибавить компактные операторы, с тем чтобы вновь полученные не имели дискретного спектра. Действительно, если $A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$, то определим $\bar{\lambda}_n$ как точку в $\sigma_{ess}(A)$, ближайшую к λ_n (если их две, то возьмем бо́льшую). Тогда $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n - \bar{\lambda}_n| = 0$, так что оператор $C\varphi_n = (\bar{\lambda}_n - \lambda_n)\varphi_n$ компактен, а дискретный спектр $A+C$ пуст.

Таким образом, дело сводится к доказательству следующего факта. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$—два набора вещественных чисел, обладающих тем свойством, что для каждого λ_n имеется бесконечно много сколь угодно близких к нему μ_m, а для каждого μ_n имеется бесконечно много сколь угодно близких к нему λ_m. Тогда существует перенумерация $\{\tilde{\mu}_n\}$ набора $\{\mu_n\}$, такая, что $|\lambda_n-\tilde{\mu}_n|\to 0$ при $n\to\infty$. Сначала выберем подпоследовательность $\lambda_j'=\lambda_{n(j)}$, где $n(1)<n(2)<\ldots$, такую, что $|\lambda_j'-\mu_j|\leqslant 2^{-j}$. Так как каждое μ_j служит пределом каких-то λ, это заведомо возможно. Определим теперь $\tilde{\mu}_n$ индукцией по n следующим образом. Если n не содержится среди $n(j)$, то выберем $\tilde{\mu}_n$ отличным от $\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_{n-1}$ и таким, что $|\lambda_n-\tilde{\mu}_n|\leqslant 2^{-n}$. Если n есть некоторое $n(j)$, проверяем, содержится ли μ_j среди $\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_{n-1}$. Если да, то выбираем $\tilde{\mu}_n$, как и выше. Если нет, то выбираем $\tilde{\mu}_n=\mu_j$. Тогда каждое μ_j есть $\tilde{\mu}_n$ для некоторого $n\leqslant n(j)$ и $\sum|\lambda_n-\tilde{\mu}_n|\leqslant 2$, так что $|\lambda_n-\tilde{\mu}_n|\to 0$. ∎

XIII.5. Местоположение существенного спектра II: теорема Хунцикера — ван Винтера — Жислина

Теорема Вейля позволяет доказать для широкого класса двухчастичных операторов Шредингера, что $\sigma_{ess}(-\Delta+V)=[0,\infty)$. В этом разделе мы рассмотрим спектр N-частичных операторов Шредингера того типа, который обсуждался в § XI.5. Мы будем пользоваться без пояснений введенными там обозначениями.

В двухчастичном случае ключевую роль играет условие убывания $V(\mathbf{x})$ на бесконечности хотя бы в среднем, например как это диктуется требованием $V\in R+(L^\infty)_\varepsilon$. В случае N частиц это уже не так. Даже если V_{ij} принадлежит C_0^∞, $V=\sum\limits_{i<j}V_{ij}(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)$ уже не стремится к нулю на бесконечности в трубчатой области, где $\sum\limits_{i=1}^{n-1}|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|^2\to\infty$, если некоторые $|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|$ остаются конечными. Важная новая идея здесь состоит в том, чтобы заменить

$$(H-E)^{-1}=(H_0-E)^{-1}-(H_0-E)^{-1}V(H-E)^{-1}$$

уравнением $(H-E)^{-1}=D(E)+I(E)(H-E)^{-1}$, где $I(E)$ компактен.

Мы предложим два различных доказательства главного результата этого раздела. Первый — основанный на леммах 1—6 — использует резольвентные уравнения упомянутого выше типа. Второй, в котором используются леммы 1, 2 и 7—11, основан на геометрических представлениях такого типа, как упомянутые выше рассуждения о специальных трубчатых областях, в которых V не стремится к нулю. Каждое доказательство имеет свои преимущества. Первое лучше подходит для тех случаев, когда H не самосопряжен, как в случаях, описываемых в § 10 и 11.