

нечно много сколь угодно близких к нему  $\mu_n$ , а для каждого  $\mu_n$  имеется бесконечно много сколь угодно близких к нему  $\lambda_m$ . Тогда существует перенумерация  $\{\bar{\mu}_n\}$  набора  $\{\mu_n\}$ , такая, что  $|\lambda_n - \bar{\mu}_n| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Сначала выберем подпоследовательность  $\lambda_j = \lambda_{n(j)}$ , где  $n(1) < n(2) < \dots$ , такую, что  $|\lambda_j - \mu_j| \leq 2^{-j}$ . Так как каждое  $\mu_j$  служит пределом каких-то  $\lambda$ , это заведомо возможно. Определим теперь  $\bar{\mu}_n$  индукцией по  $n$  следующим образом. Если  $n$  не содержится среди  $n(j)$ , то выберем  $\bar{\mu}_n$  отличным от  $\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_{n-1}$  и таким, что  $|\lambda_n - \bar{\mu}_n| \leq 2^{-n}$ . Если  $n$  есть некоторое  $n(j)$ , проверяем, содержится ли  $\mu_j$  среди  $\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_{n-1}$ . Если да, то выбираем  $\bar{\mu}_n$ , как и выше. Если нет, то выбираем  $\bar{\mu}_n = \mu_j$ . Тогда каждое  $\mu_j$  есть  $\bar{\mu}_n$  для некоторого  $n \leq n(j)$  и  $\sum |\lambda_n - \bar{\mu}_n| \leq 2$ , так что  $|\lambda_n - \bar{\mu}_n| \rightarrow 0$ . ■

### ХIII.5. Местоположение существенного спектра II: теорема Хунцикера — ван Винтера — Жислина

Теорема Вейля позволяет доказать для широкого класса двухчастичных операторов Шредингера, что  $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta + V) = [0, \infty)$ . В этом разделе мы рассмотрим спектр  $N$ -частичных операторов Шредингера того типа, который обсуждался в § XI.5. Мы будем пользоваться без пояснений введенными там обозначениями.

В двухчастичном случае ключевую роль играет условие убывания  $V(x)$  на бесконечности хотя бы в среднем, например как это диктуется требованием  $V \in R + (L^\infty)_e$ . В случае  $N$  частиц это уже не так. Даже если  $V_{ij}$  принадлежит  $C_0^\infty$ ,  $V = \sum_{i < j} V_{ij} (r_i - r_j)$  уже не стремится к нулю на бесконечности в трубчатой области, где  $\sum_{i=1}^{n-1} |r_i - r_j|^2 \rightarrow \infty$ , если некоторые  $|r_i - r_j|$  остаются конечными. Важная новая идея здесь состоит в том, чтобы заменить

$$(H - E)^{-1} = (H_0 - E)^{-1} - (H_0 - E)^{-1} V (H - E)^{-1}$$

уравнением  $(H - E)^{-1} = D(E) + I(E)(H - E)^{-1}$ , где  $I(E)$  компактен.

Мы предложим два различных доказательства главного результата этого раздела. Первый — основанный на леммах 1—6 — использует резольвентные уравнения упомянутого выше типа. Второй, в котором используются леммы 1, 2 и 7—11, основан на геометрических представлениях такого типа, как упомянутые выше рассуждения о специальных трубчатых областях, в которых  $V$  не стремится к нулю. Каждое доказательство имеет свои преимущества. Первое лучше подходит для тех случаев, когда  $H$  не самосопряжен, как в случаях, описываемых в § 10 и 11.

Второе же, как мы увидим ниже, особенно удобно, если  $H$  сужен на инвариантное подпространство.

Для каждого кластерного разложения  $D = \{C_i\}_{i=1}^k$  множества  $\{1, \dots, n\}$  мы определили в § XI.5 гамильтониан  $H_D = H - I_D$ ; здесь  $I_D$  — сумма всех потенциалов  $V_{ij}$ , где  $i$  и  $j$  принадлежат разным кластерам. Для потенциалов  $V_{ij} \in L^2 + L^p$  ( $p < 3$ ) мы доказали, что  $\sigma(H_D) \subset \sigma(H)$ , так как волновые операторы  $\Omega_D^\pm$  осуществляют унитарную эквивалентность  $H_D$  и  $H \upharpoonright \text{Ran } \Omega_D^\pm$ . Чтобы найти  $\sigma(H_D)$ , запишем  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(C_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{H}(C_k) \otimes \mathcal{H}_D$ , что отвечает разложению  $\mathcal{H}$ , которое получается при выборе внутренних координат  $\xi_1^{(C_1)}, \dots, \xi_{n_1-1}^{(C_1)}$  для  $C_1, \dots, \xi_1^{(C_k)}, \dots, \xi_{n_k-1}^{(C_k)}$  для  $C_k$  и  $\zeta_1, \dots, \zeta_{k-1}$  для относительных координат кластеров. Тогда

$$H_D = H(C_1) + \dots + H(C_k) + T_D,$$

где  $H(C_i) = I \otimes \dots \otimes h_{C_i} \otimes \dots \otimes I$  есть гамильтониан кластера  $C_i$  за вычетом движения соответствующего центра масс, а  $T_D$  — кинетическая энергия всех кластеров, т. е. сумма кинетических энергий центров масс всех  $C_i$  за вычетом энергии движения центра масс полной системы. Тогда по теореме VIII.33

$$\sigma(H_D) = \left\{ \sum_{l=1}^k \lambda_l + \tau \mid \lambda_l \in \sigma(H(C_l)), \tau \in \sigma(T_D) \right\}.$$

Так как  $\sigma(T_D) = [0, \infty)$ , то  $\sigma(H_D) = [\Sigma_D, \infty)$ , где

$$\Sigma_D = \sum_{l=1}^k \inf \sigma(H(C_l)). \quad (19)$$

Поскольку мы ожидаем, что  $\mathcal{H}$  состоит только из связанных состояний и состояний рассеяния, то соответственно мы ожидаем, что  $\sigma_{\text{ess}}(H) = [\Sigma, \infty)$ , где

$$\Sigma = \inf_{D, \#(D) > 2} \Sigma_D. \quad (20a)$$

Это справедливо на самом деле, причем в гораздо более общих условиях, чем  $V \in L^2 + L^p$ .

**Теорема XIII.17** (ХВЖ-теорема). Пусть  $H$  — оператор на  $L^2(\mathbb{R}^{3N-3})$ , полученный вычитанием энергии движения центра масс из

$$-\sum_{i=1}^N (2\mu_i)^{-1} \Delta_i + \sum_{i < j} V_{ij}(r_{ij}), \quad \text{где } V_{ij} \in R + (L^\infty)_e \text{ и } r_{ij} = r_i - r_j.$$

Для каждого кластерного разложения  $D = \{C_1, \dots, C_k\}$  определим  $\Sigma$  посредством (19) и (20a). Тогда

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = [\Sigma, \infty).$$

Вся остальная часть этого раздела будет посвящена доказательству этой теоремы. Приемы, которые мы развиваем, полезны в изучении многих аспектов теории систем  $N$  частиц при наличии более чем одного канала, т. е. систем, в которых некоторые из  $H_D$  обладают связанными состояниями. В частности, эта техника будет играть важную роль в § 10. Прежде чем доказывать эту теорему, заметим, что по индукции легко показать, что  $\inf \{\Sigma_D | \# D = m + 1\} \geq \inf \{\Sigma_D | \# D = m\}$ , поэтому (20a) можно заменить (см. задачу 42) на

$$\Sigma = \inf \{\Sigma_D | \#(D) = 2\}. \quad (20b)$$

Мы покажем, что  $[\Sigma, \infty) \subset \sigma(H)$ , сначала предполагая, что  $V_{ij}$  «хорошие», а затем пользуясь аппроксимациями.

**Лемма 1.** Если  $V_{ij} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ , то  $[\Sigma, \infty) \subset \sigma(H)$ .

*Доказательство.* Так как существуют волновые операторы  $\Omega_D^\pm$  (теорема XI.34), то  $\sigma(H_D) \subset \sigma(H)$ . Но  $\sigma(H_D) = [\Sigma_D, \infty)$ , когда  $\#(D) \geq 2$ , откуда следует результат. ■

Другое доказательство леммы 1, не использующее волновых операторов, см. в задаче 45.

**Лемма 2.** В условиях теоремы XIII.17  $[\Sigma, \infty) \subset \sigma(H)$ .

*Доказательство.* Для любых  $i, j$  можно найти такие  $V_{ij}^n \in C_0^\infty$ , чтобы выполнялось неравенство  $|V_{ij} - V_{ij}^n| < n^{-1}(-\Delta + 1)$  в смысле форм (задача 44). Положив  $H^{(n)} = H_0 + \sum_{i < j} V_{ij}^n$ , видим, что  $H^{(n)} \rightarrow H$  в равномерном резольвентном смысле и что  $H_D^{(n)} \rightarrow H_D$  в том же смысле. Следовательно, согласно теореме VIII.20,  $\exp(-H_D^{(n)}) \rightarrow \exp(-H_D)$  по норме. Так как  $\Sigma_D^{(n)} = -\log \|e^{-H_D^{(n)}}\|$ , мы заключаем, что  $\Sigma_D^{(n)} \rightarrow \Sigma_D$  и, следовательно,  $\Sigma^{(n)} \rightarrow \Sigma$ . Пусть  $\lambda > \Sigma$ . Для достаточно больших  $n$  имеем  $\lambda > \Sigma^{(n)}$ , так что  $\lambda \in \sigma(H^{(n)})$  по лемме 1. Так как  $H^{(n)} \rightarrow H$  в равномерном резольвентном смысле, то  $\lambda \in \sigma(H)$  по теореме VIII.23. Следовательно,  $(\Sigma, \infty) \subset \sigma(H)$ . Но так как  $\sigma(H)$  замкнуто, то  $\Sigma \in \sigma(H)$ . ■

Второе утверждение, необходимое для доказательства теоремы XIII.17, а именно: если  $\lambda < \Sigma$ , то либо  $\lambda \in \sigma_{\text{disc}}(H)$ , либо  $\lambda \in \rho(H)$  — существенно труднее, чем лемма 2, и требует развития некоторой специальной техники. Чтобы проиллюстрировать эти идеи, рассмотрим сначала случай  $N = 3$  и  $V_{ij} \in L^2$ . В двухчастичном случае мы воспользовались ключевым уравнением  $(H - E)^{-1} = (H_0 - E)^{-1} - (H_0 - E)^{-1} V (H - E)^{-1}$  и тем обстоятельством, что  $(H_0 - E)^{-1} V$  компактен. В случае трех частиц мы имеем по-прежнему

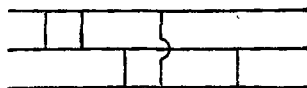
$$(H - E)^{-1} = (H_0 - E)^{-1} - (H_0 - E)^{-1} (V_{12} + V_{13} + V_{23}) (H - E)^{-1},$$

однако  $(H_0 - E)^{-1}(V_{12} + V_{13} + V_{23})$  бо́льше не компактен. Чтобы убедиться, что  $(H_0 - E)^{-1}V_{12}$  не компактен, заметим, что он коммутирует с однопараметрической группой трансляций  $\langle r_1, r_2, r_3 \rangle \mapsto \langle r_1 - a, r_2 - a, r_3 - a \rangle$ . Такой оператор не может быть компактным (см. задачу 43).

Поэтому будем искать разложение оператора  $(H - E)^{-1}$  вида  $A(E) + B(E)(H - E)^{-1}$  с компактным  $B(E)$ , которое будет более тонким, нежели разложение, задаваемое вторым резольвентным уравнением. Чтобы получить представление о том, каким должно быть нужное нам разложение, возьмем  $E$  настолько отрицательным, чтобы сходиллся ряд теории возмущений, получаемый итерацией второго резольвентного уравнения. Тогда

$$(H - E)^{-1} = (H_0 - E)^{-1} - (H_0 - E)^{-1}V_{12}(H_0 - E)^{-1} - \\ - (H_0 - E)^{-1}V_{13}(H_0 - E)^{-1} - (H_0 - E)^{-1}V_{23}(H_0 - E)^{-1} + \\ + (H_0 - E)^{-1}V_{12}(H_0 - E)^{-1}V_{12}(H_0 - E)^{-1} + \dots \quad (21)$$

Введем графическое представление для отдельных членов в (21). Пусть три горизонтальные линии представляют множитель  $(H_0 - E)^{-1}$ , а вертикальная черта, соединяющая  $j$ -ю и  $i$ -ю линии, — множитель  $-V_{ij}$ . Тогда диаграмма



представляет оператор

$$(-1)^5 (H_0 - E)^{-1}V_{12}(H_0 - E)^{-1}V_{12}(H_0 - E)^{-1}V_{23}(H_0 - E)^{-1} \times \\ \times V_{13}(H_0 - E)^{-1}V_{23}(H_0 - E)^{-1}.$$

На языке таких диаграмм легко описать, какие из членов (21) компактны.

**Лемма 3А.** Диаграмма представляет компактный оператор тогда и только тогда, когда она связна. Если диаграмма  $G$  связна, то оператор остается компактным и тогда, когда последний множитель  $(H_0 - E)^{-1}$  убирается.

*Доказательство.* Отметим, что мы интерпретируем символ  $(H_0 - E)^{-1}V_{ij}$  как (ограниченное) замыкание оператора, определенного на  $D(H_0)$ , или, иными словами, как сопряженный всюду определенного оператора  $V_{ij}(H_0 - \bar{E})^{-1}$ . Если диаграмма несвязна, то, переименовывая частицы, мы можем считать, что линия 3 не связана с линиями 1 и 2. Тогда соответствующий оператор коммутирует с унитарным оператором, осуществляющим отображение  $\langle r_1, r_2, r_3 \rangle \mapsto \langle r_1 + a, r_2 + a, r_3 + a \rangle$ , так что этот оператор не компактен (задача 43).

С другой стороны, если  $G$  связна, то на ней найдутся две последовательные связки, которые различны. Переименовав линии, мы можем сделать, чтобы это были  $V_{12}$  и  $V_{23}$ . Тогда оператор, отвечающий  $G$ , после вычеркивания последнего множителя  $(H_0 - E)^{-1}$  примет вид  $A[(H_0 - E)^{-1}V_{12}(H_0 - E)^{-1}V_{23}]B$ , где  $A$  и  $B$  суть произведения сомножителей вида  $(H_0 - E)^{-1}V_{ij}$ . Так как  $A$  и  $B$  ограничены, остается лишь показать, что  $C = (H_0 - E)^{-1}V_{12}(H_0 - E)^{-1}V_{23}$  компактен. Мы будем работать в пространстве импульсов с переменными  $p$  и  $q$ , отвечающими относительным импульсам частиц 1, 2 и 2, 3, т. е. мы рассматриваем оператор  $D = \mathcal{F}C\mathcal{F}^{-1}$ , где  $\mathcal{F}$  — преобразование Фурье, с переменными  $\langle p, q \rangle$ , дуальными к  $\langle r_{12}, r_{23} \rangle$ . Пусть  $h_0(p, q)$  — кинетическая энергия, выраженная в переменных  $p$  и  $q$ :

$$h_0(p, q) = (2m_{12})^{-1}p^2 + (2m_{23})^{-1}q^2 - \mu_3^{-1}p \cdot q,$$

где  $m_i^{-1} = \mu_i^{-1} + \mu_j^{-1}$ . Тогда

$$(D\psi)(p, q) = (2\pi)^{-3} \int (h_0(p, q) - E)^{-1} \hat{V}_{12}(p - p') (h_0(p', q) - E)^{-1} \times \\ \times \hat{V}_{23}(q - q') \psi(p', q') dp' dq'. \quad (22)$$

Так как  $E$  отрицательно, то  $|h_0(p, q) - E| > c(p^2 + q^2 + 1)$  с некоторой постоянной  $c$ . Следовательно, ядро (22) ограничено величиной

$$(2\pi)^{-3} c^{-2} (p^2 + 1)^{-1} \hat{V}_{12}(p - p') (q^2 + 1)^{-1} \hat{V}_{23}(q - q').$$

Так как  $\hat{V}_{12}, \hat{V}_{23} \in L^2$ , то это ядро принадлежит  $L^2(\mathbb{R}^{12})$  и потому интегральный оператор (22) есть оператор Гильберта — Шмидта. Следовательно,  $D$  и  $C$  компактны. ■

Это подсказывает нам, что, пробуя найти разложение  $(H - E)^{-1} = A(E) + B(E)(H - E)^{-1}$  с компактным  $B(E)$ , мы должны в качестве  $A(E)$  выбрать сумму всех несвязных диаграмм в формальном разложении (21), когда  $E$  отрицательно, а затем определить  $A(E)$  с помощью аналитического продолжения на другие  $E$ . Чтобы проделать это продолжение, требуется замкнутое выражение для суммы несвязных диаграмм. Несвязные диаграммы естественно распадаются на четыре класса — когда ни одна из горизонтальных линий не связана с другой или же когда связана одна из трех возможных пар. В первый класс попадает только одна диаграмма

$$\text{---} = (H_0 - E)^{-1}$$

Класс, в котором связаны линии 1 и 2, представлен суммой

$$\text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots \quad (23)$$

Если добавить к этой сумме предыдущую диаграмму, то мы получим сумму всех диаграмм для случая  $V_{23} = V_{13} = 0$ . Значит, сумма (23) есть  $(H_0 + V_{12} - E)^{-1} - (H_0 - E)^{-1}$ . Вводя обозначения

$$\begin{aligned} G_0(E) &= (H_0 - E)^{-1}, \\ G_{ij}(E) &= (H_0 + V_{ij} - E)^{-1}, \\ G(E) &= (H_0 + V - E)^{-1}, \end{aligned}$$

можно переписать (23) в виде  $-G_{12}(E)V_{12}G_0(E)$ . Это подсказывает нам следующее

**Определение.** Пусть  $E \notin [\Sigma, \infty)$  есть комплексное число. Несвязная часть резольвенты, или кратко несвязная часть определяется формулой

$$D(E) = G_0(E) - \sum_{1 < i < j < 3} G_{ij}(E)V_{ij}G_0(E). \quad (24a)$$

Подобным образом можно исследовать и связные диаграммы. Назовем диаграмму **едва связной**, если она становится несвязной, когда мы вынем последнюю связку. Сумма едва связных диаграмм распадается на шесть классов, один из которых есть

$$\overline{\text{---}} + \overline{\text{---}} + \overline{\text{---}} + \dots + \overline{\text{---}} + \dots$$

а другие получаются перестановкой линий 1, 2, 3. Каждую связную диаграмму можно рассечь в единственной точке таким образом, что слева от деления будет стоять едва связная диаграмма. Все связные диаграммы можно построить, помещая слева едва связную диаграмму, а справа произвольную диаграмму. Поэтому формально, не отличая диаграмму от отвечающего ей оператора, получим

$$\sum (\text{все связные диаграммы}) = \sum (\text{все едва связные диаграммы без последнего множителя } G_0(E)) \times \sum (\text{все диаграммы}).$$

Мы воспользовались символом  $\sum()$  для обозначения суммы всех диаграмм вида  $()$  в формальном разложении (21). Так как  $\sum(\text{все диаграммы})$  равна  $(H - E)^{-1}$ , будем искать замкнутое выражение для первого множителя. Сумма, отвечающая классу едва связных диаграмм, который мы нарисовали выше, очевидно, имеет вид

$$-[G_{12}(E) - G_0(E)]V_{23} = G_{12}(E)V_{12}G_0(E)V_{23}.$$

**Определение.** Пусть  $E \notin [\Sigma, \infty)$  есть комплексное число. Взаимодействие, связное по Вайнбергу, или ядро Вайнберга, определяется как

$$I(E) = \sum_{\substack{i \neq k \neq j \\ i < j}} G_{ij}(E)V_{ij}G_0(E)(V_{jk} + V_{ik}). \quad (24b)$$

Теперь мы готовы к доказательству следующей леммы:

**Лемма 4А.** Функции  $D(E)$  и  $I(E)$  суть аналитические операторнозначные функции в области  $\mathbb{C} \setminus [\Sigma, \infty)$ . Если  $E \notin \sigma(H)$ , то

$$(H - E)^{-1} = D(E) + I(E)(H - E)^{-1}. \quad (24c)$$

Более того,  $I(E)$  компактно при  $E \in \mathbb{C} \setminus [\Sigma, \infty)$  и  $\lim_{E \rightarrow -\infty} \|I(E)\| = 0$ . Уравнение (24) называется уравнением Вайнберга — ван Винтера.

**Доказательство.** Поскольку  $\mathbb{C} \setminus [\Sigma, \infty) \subset \bigcup_{i < j} \rho(H_0 + V_{ij})$ , функции  $D(E)$  и  $I(E)$  аналитичны, если мы рассматриваем  $G_0(E)V_{ij}$  как сопряженный ограниченного оператора  $V_{ij}G_0(E)^*$ , и аналогично для  $G_{ij}(E)V_{kl}$ . Выберем  $E$  настолько отрицательным, что ряд теории возмущений (21) абсолютно сходится по операторной норме. Тогда мы можем перестроить сумму диаграмм, как хотим, и убедиться, что (24с) выполнено. Затем уравнение (24с) аналитически продолжается на все  $E \notin \sigma(H) \cup [\Sigma, \infty)$ , а это последнее объединение совпадает с  $\sigma(H)$  по лемме 2. Так как  $\|G_0(E)V_{ij}\| \rightarrow 0$  при  $E \rightarrow -\infty$ , то  $\lim_{E \rightarrow -\infty} \|I(E)\| = 0$ . Наконец, заметим, что если  $E$  столь отрицательно, что ряд теории возмущений для  $I(E)$  сходится, то  $I(E)$  компактно вследствие леммы 3А и того основного факта, что множество компактных операторов замкнуто по норме (теорема VI.12а). То, что  $I(E)$  компактен при всех  $E \in \mathbb{C} \setminus [\Sigma, \infty)$ , следует из леммы 5 ниже. ■

**Лемма 5.** Пусть  $f(z)$  — операторнозначная функция в связной области  $R \subset \mathbb{C}$ . Если  $f(z)$  компактно при  $z$  из открытого множества  $S \subset R$ , то  $f(z)$  компактно при всех  $z \in R$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $f(z_0)$  не компактно. Так как множество компактных операторов замкнуто, то по теореме Хана — Банаха можно найти такой линейный функционал  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^*$ , что  $L(f(z_0)) = 1$  и  $L(A) = 0$ , если  $A$  компактен. Тогда  $L(f(z))$  аналитично,  $L(f(z)) = 0$ , если  $z \in S$ , и  $L(f(z_0)) = 1$ . Но так как  $S$  открыто, то это невозможно. Мы заключаем, что  $f(z_0)$  компактно при всех  $z_0$ . ■

Эта последняя лемма может быть доказана также с помощью аналитического продолжения степенных рядов.

**Доказательство теоремы XIII.17 в случае  $N=3$ ,  $V_{ij} \in L^2$ .** Так как  $I(E)$  — компактная операторнозначная функция на  $\mathbb{C} \setminus [\Sigma, \infty)$  и  $1 - I(E)$  обратим, когда  $E$  — большое по абсолютной величине

отрицательное число, то из аналитической теоремы Фредгольма (теорема VI.14) следует, что найдется дискретное множество  $S \subset \mathbb{C} \setminus [\Sigma, \infty)$ , такое, что  $(1 - I(E))^{-1}$  существует и аналитична в  $\mathbb{C} \setminus ([\Sigma, \infty) \cup S)$  и мероморфна в  $\mathbb{C} \setminus [\Sigma, \infty)$  с вычетами конечного ранга. Следовательно,  $[1 - I(E)]^{-1} D(E) \equiv f(E)$  аналитична в  $\mathbb{C} \setminus ([\Sigma, \infty) \cup S)$  с вычетами конечного ранга в точках  $S$ . Пусть  $E \notin S$ ,  $\text{Im } E \neq 0$ . Тогда, в силу (24),  $f(E) = (H - E)^{-1}$ . В частности,  $f(E)(H - E)\psi = \psi$  при любом  $\psi \in D(H)$ . По аналитическому продолжению это выполняется для любого  $E \notin S \cup [\Sigma, \infty)$ . Мы заключаем, что при каждом таком  $E$  оператор  $H - E$  имеет ограниченный обратный. Следовательно, любая точка  $\sigma(H) \setminus [\Sigma, \infty)$  должна принадлежать  $S$ , так что  $\sigma(H) \setminus [\Sigma, \infty)$  состоит из изолированных точек, причем лишь  $\Sigma$ , возможно, является предельной точкой. Наконец, так как  $(H - E)^{-1}$  имеет вычеты конечного ранга в любой точке  $\lambda \in S$ , мы заключаем, что спектральный проектор

$$P_\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|E-\lambda|=\varepsilon} (H-E)^{-1} dE$$

конечномерен, т. е. любое  $\lambda \in \sigma(H) \setminus [\Sigma, \infty)$  принадлежит  $\sigma_{\text{disc}}(H)$ . ■

Доказательство общего случая не требует никаких дополнительных аналитических идей, однако нам придется преодолеть два затруднения: (1)  $V_{ij}$  должно быть всего лишь из  $R + (L^\infty)_\varepsilon$ ; (2) диаграммный анализ при  $N > 3$  не так прост, и нам придется развить некоторую дополнительную комбинаторную технику. Так как  $V_{ij}$  в общем случае ограничены лишь в смысле форм, нам придется работать с выражениями типа  $(H_0 - E)^{-1/2} V_{ij} (H_0 - E)^{-1/2}$ , а не с  $V_{ij} (H_0 - E)^{-1}$ . Пересмотрим поэтому наши графические правила. В данной диаграмме с последовательными попарными связками при  $n$  горизонтальных линиях сопоставим каждой связке между линиями  $i$  и  $j$  множитель  $-G_0^{1/2}(E) V_{ij} G_0^{1/2}(E)$  и больше никаких множителей, отвечающих горизонтальным линиям. При этом оператор, который мы прежде сопоставляли диаграмме, изменяется так: с каждого конца изымается по множителю  $G_0^{1/2}$ . Под  $G_0^{1/2}$  мы понимаем оператор, действующий в пространстве импульсов как умножение на  $(p^2 - E)^{-1/2}$ , где выбирается та ветвь квадратного корня, которая положительна при  $E < 0$ . Мы рассмотрим случай произвольного  $N \geq 3$ , и (21) будет, следовательно, означать аналогичное общее разложение для таких  $N$ .

**Лемма 3В.** Пусть  $V_{ij} \in R + (L^\infty)_\varepsilon$ . Пусть  $G$  — одна из диаграмм в формальном разложении (21). Оператор, сопоставляемый  $G$  в



соответствии с только что сформулированными диаграммными правилами, компактен тогда и только тогда, когда  $G$  связна.

*Доказательство.* Как и прежде, если диаграмма несвязна, то она не компактна, так что предположим, что  $G$  — некоторая конкретная связная диаграмма. Пусть  $V_{ij} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  при всех  $i, j$ . Сначала мы покажем, что в этих условиях (на самом деле достаточно, чтобы  $V_{ij} \in L^2$ ) соответствующий оператор  $G$  есть оператор Гильберта — Шмидта и, следовательно, компактен.

Мы проведем доказательство индукцией по  $N$  — числу линий диаграммы. При  $N=1$  гильбертово пространство есть  $\mathbb{C}$ , так что оператор (который на этот раз есть 1), разумеется, Гильберта — Шмидта. Итак, предположим, что все связные диаграммы с менее чем  $N$  линиями приводят к операторам Гильберта — Шмидта.

Сначала заметим, что можно считать  $G$  едва связным, так как всякий оператор  $G$  может быть записан в виде  $G = G_1 G_2$ , где  $G_2$  ограниченный, а  $G_1$  едва связный. После переименования линий мы можем считать, что последняя связка в  $G$  соединяет линии  $i$  и  $i+1$  и что если ее убрать, то получившаяся диаграмма распадется на две связные части — одну, содержащую линии  $1, \dots, i$ , и другую, содержащую линии  $i+1, \dots, N$ .

Введем новые координаты  $R_1, \dots, R_{N-1}$ , полагая  $R_j = r_{j+1} - r_j$ , и пусть  $P_1, \dots, P_{N-1}$  — соответствующие операторы импульсов, так что  $P_j$  есть  $-i\nabla_{R_j}$ ; частная производная берется при фиксированных  $R_1, \dots, R_{j-1}, R_{j+1}, \dots, R_{N-1}$ . Пусть  $W_{jk}$  — функция, задаваемая посредством  $\hat{W}_{jk} = |\hat{V}_{jk}|$ ; определим оператор  $A(jk)$  в виде

$$A(jk) = \begin{cases} \left( \sum_{l < i-1} P_l^2 + 1 \right)^{-1/2} W_{jk} \left( \sum_{l < i-1} P_l^2 + 1 \right)^{-1/2}, & \text{если } j, k \leq i, \\ \left( P_i^2 + 1 \right)^{-1/2} W_{i, i+1} \left( P_i^2 + 1 \right)^{-1/2}, & \text{если } j = i, k = i+1, \\ \left( \sum_{l > i+1} P_l^2 + 1 \right)^{-1/2} W_{jk} \left( \sum_{l > i+1} P_l^2 + 1 \right)^{-1/2}, & \text{если } j, k \geq i+1. \end{cases}$$

Пусть  $\tilde{G}$  — оператор, полученный заменой каждого сомножителя  $G_0^{1/2}(E) V_{jk} G_0^{1/2}(E)$  в  $G$  на  $A(jk)$ . Прежде всего мы утверждаем, что  $\tilde{G}$  есть оператор Гильберта — Шмидта. Действительно, при разложении

$$L^2(\mathbb{R}^{3N-3}) = L^2(\mathbb{R}^{3i-3}) \otimes L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathbb{R}^{3N-3i-3}),$$

соответствующем разбиению  $\langle R_1, \dots, R_{i-1} \rangle, R_i, \langle R_{i+1}, \dots, R_{N-1} \rangle$ ,  $\tilde{G}$  есть тензорное произведение  $A \otimes B \otimes C$ , где  $A$  и  $C$  — операторы, относящиеся к диаграмме с  $i$  и  $N-i$  линиями соответственно. Можно явно убедиться, что  $B$  — оператор Гильберта — Шмидта на  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , например, записав его ядро в  $p$ -пространстве (т. е. рассмотрев  $\mathcal{F} B \mathcal{F}^{-1}$ ), в то время как  $A$  и  $C$  суть

операторы Гильберта — Шмидта в  $L^2(\mathbb{R}^{3i-3})$  и  $L^2(\mathbb{R}^{3N-3i-3})$  соответственно, согласно предположению индукции. Поэтому  $\tilde{G}$  есть оператор Гильберта — Шмидта.

Положим теперь  $g = \mathcal{F}G\mathcal{F}^{-1}$  и  $\tilde{g} = \mathcal{F}\tilde{G}\mathcal{F}^{-1}$ . Так как  $|\hat{V}_{ij}| \leq \leq \hat{W}_{ij}$  и  $|H_0 - E| \geq c_0 \left( \sum_{i=1}^{N+1} P_i^2 + 1 \right)$  с некоторой константой  $c_0$ , то ядро  $g$  мажорируется ядром  $\tilde{g}$  умноженным на какую-то константу. Так как  $\tilde{g}$  — оператор Гильберта — Шмидта, то таков же и  $g$ , а значит, и  $G$ .

Теперь допустим, что  $V_{ij} \in R + (L^\infty)_e$ . Мы можем выбрать  $V_{ij}^{(n)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  так, чтобы было  $\| (H_0 - E)^{-1/2} (V_{ij} - V_{ij}^{(n)}) (H_0 - E)^{-1/2} \| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  (задача 44). Для любой данной связной диаграммы  $G$  пусть  $g^{(n)}$  — сопоставляемые ей операторы, если мы пользуемся потенциалами  $V_{ij}^{(n)}$ , и  $g$  — соответствующий оператор с  $V_{ij}$ . Так как все  $g^{(n)}$  компактны, то и  $g$  компактен. ■

Обратимся теперь к комбинаторике, необходимой для нахождения  $D_R(E)$  — суммы всех несвязных диаграмм и  $I_R(E)$  — суммы всех едва связных диаграмм.

**Определение.** Пусть  $G$  — диаграмма с  $N$  занумерованными горизонтальными линиями и некоторым числом вертикальных связей между парами таких линий;  $G$  называется  $k$ -связной, если она имеет  $k$  связных компонент. **Кластерное разложение**  $D(G)$ , отвечающее  $G$ , есть семейство множеств линий, связанных друг с другом.

Так, диаграмма на рис. XIII.3 2-связна и  $D(G) = \{\{1, 2, 4\}, \{3, 5\}\}$ .

**Определение.** Ассоциированная цепочка  $k$ -связной диаграммы есть множество кластерных разложений  $D_1, \dots, D_k$ , определяемое следующим образом. Пусть  $G$  имеет  $l$  связей. Пусть  $G_0, \dots, G_l$  — диаграммы, полученные сохранением первых  $0, 1, \dots, l$  связей соответственно (считая слева). Рассмотрим кластерные разложения  $D(G_0), \dots, D(G_l)$ . Тогда пусть  $D_m$  есть  $(N+1-m)$ -е отличное от других разложение в семействе  $D(G_0), \dots, D(G_l)$ . Оно содержит  $m$  кластеров. Ассоциированную цепочку диаграммы  $G$  мы будем обозначать через  $S(G)$ .

Так, для диаграммы на рис. XIII.3

$$D_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\},$$

$$D_4 = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\},$$

$$D_3 = \{\{1, 2, 4\}, \{3\}, \{5\}\},$$

$$D_2 = \{\{1, 2, 4\}, \{3, 5\}\} \equiv D(G).$$

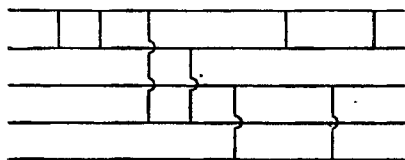


Рис. XIII.3. Двухсвязная диаграмма.

Заметим, что  $D_5 = D(G_0)$ ;  $D_4 = D(G_1) = D(G_2)$ ;  $D_3 = D(G_3) = D(G_4)$ ;  $D_2 = D(G_5) = D(G_6) = D(G_7) = D(G_8)$ .

Наконец, введем еще одно

**Определение.** Цепочка  $S$  есть семейство  $D_N, D_{N-1}, \dots, D_k$  кластерных разложений  $\{1, \dots, N\}$ , таких, что  $D_{j+1} \triangleright D_j$  и  $D_j$  имеет  $j$  кластеров. Цепочка называется **связной**, если  $k=1$ , и **несвязной**, если  $k > 1$ . Число  $k$  называется **индексом** цепочки, и мы будем писать  $i(S) = k$ .

Напомним, что по определению из § XI.5  $D \triangleright D'$  означает, что каждый кластер в  $D'$  есть объединение кластеров из  $D$ . Значит, если  $S$  — цепочка, то  $D_j$  получается из  $D_{j+1}$  объединением какой-либо пары кластеров. Далее,  $iDm$  означает, что  $i$  и  $m$  лежат в одном и том же кластере из  $D$ , а  $\sim iDm$  означает, что они лежат в разных кластерах.

Чтобы просуммировать все несвязные диаграммы, мы сначала просуммируем все диаграммы с одной и той же ассоциированной цепочкой, а затем найдем сумму по всем цепочкам (их конечное число). В последующем тексте символы

$$\sum_D \quad \text{и} \quad \sum_{D \sim D'}$$

означают соответственно суммы по парам  $i, j$  с  $i < j$  и  $iDj$  (соответственно  $iDj$  и  $\sim iD'j$ ).

**Определение.** Пусть  $S_0 = \langle D_N, D_{N-1}, \dots, D_k \rangle$  — некоторая фиксированная цепочка, и пусть  $E$  настолько отрицательно, что

$$\sum_{1 < i < j < N} \|(H_0 - E)^{-1/2} V_{ij} (H_0 - E)^{-1/2}\| < 1. \quad (25)$$

Для данного кластерного разложения  $D$  определим **редуцированную резольвенту**  $R_D(E)$ , полагая

$$R_D(E) = [1 + (H_0 - E)^{-1/2} (\sum_D V_{ij}) (H_0 - E)^{-1/2}]^{-1}. \quad (26)$$

Определим  $I_{D_m D_{m-1}}$  формулой

$$I_{D_m D_{m-1}} = (H_0 - E)^{-1/2} \left( \sum_{D_{m-1} \sim D_m} V_{ij} \right) (H_0 - E)^{-1/2}. \quad (27)$$

Наконец, пусть  $R_{S_0}(E)$  — сходящаяся сумма всех диаграмм  $G$  с  $S(G) = S_0$ . Сумма (27) может быть описана следующим образом:  $D_{m-1}$  отличается от  $D_m$  тем, что два кластера  $C_l$  и  $C_p$  в  $D_m$  заменены одним  $C_q = C_p \cup C_l$  в  $D_{m-1}$ . Сумма в (27) берется по таким  $i < j$ , что  $i \in C_l, j \in C_p$  или  $i \in C_p, j \in C_l$ .

**Лемма 6.**

$$R_{S_0}(E) = R_{D_N}(E) I_{D_N D_{N-1}} R_{D_{N-1}}(E) I_{D_{N-1} D_{N-2}} \cdots I_{D_{k+1} D_k} R_{D_k}(E). \quad (28)$$

**Доказательство.** Произвольная диаграмма  $G$  с  $S(G) = S_0$  может быть описана следующим образом. Первая связка должна изменять  $D_N$  на  $D_{N-1}$  и, таким образом, должна иметь вид  $-(H_0 - E)^{-1/2} V_{ij} (H_0 - E)^{-1/2}$  с  $\sim iD_N j$  и  $iD_{N-1} j$ . Потом следует произвольное число связок, не меняющих соответствующих кластеров. Это должны быть связки  $i, j$  с  $iD_{N-1} j$ . Затем идет связка, меняющая  $D_{N-1}$  на  $D_{N-2}$ , и т. д. Если мы напишем  $W_{ij} = -(H_0 - E)^{-1/2} V_{ij} (H_0 - E)^{-1/2}$ , то увидим, что

$$R_{S_0}(E) = \left( \sum_{D_{N-1} \sim D_N} W_{ij} \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{D_{N-1}} W_{ij} \right)^l \right) \left( \sum_{D_{N-2} \sim D_{N-1}} W_{ij} \right) \dots$$

Так как  $\sum_{i < j} \|W_{ij}\| < 1$ , то все бесконечные суммы сходятся и мы получаем (28). ■

Пусть  $\mathcal{H}_{+1}, \mathcal{H}_{-1}$  — шкала пространств, ассоциированных с  $H_0$  (см. § VIII. 6). Пусть  $D$  — кластерное разложение с  $\#(D) \geq 2$ , и пусть  $E \in \mathbb{C} \setminus [\Sigma, \infty)$ . Тогда  $E \notin \sigma(H_D)$ . По построению сумм квадратичных форм  $(H_D - E)^{-1}$  есть ограниченное отображение  $\mathcal{H}_{-1}$  на  $\mathcal{H}_{+1}$ , так что

$$(H_0 - E)^{+1/2} (H_D - E)^{-1} (H_0 - E)^{+1/2} = \\ = [1 + (H_0 - E)^{-1/2} \sum_D V_{ij} (H_0 - E)^{-1/2}]^{-1}$$

определяет ограниченный оператор, который мы обозначим  $R_D(E)$  в согласии с определением (26). При  $E \notin [\Sigma, \infty)$  определим  $R_{S_0}(E)$  формулой (28), если  $S_0$  — цепочка с  $i(S_0) \geq 2$ . Из леммы 6 видно, что когда  $E$  отрицательно и велико по абсолютной величине, это определение согласуется с определением через сумму всех диаграмм с цепочкой  $S_0$ . Теперь мы можем определить все величины, входящие в общее уравнение Вайнберга — ван Винтера. Символ  $\sum_{S, i(S)=2}$  означает сумму по всем цепочкам с индексом 2.

**Определение.** Редуцированная несвязная часть определяется при  $E \notin [\Sigma, \infty)$  формулой

$$D_R(E) = \sum_{S, i(S) \geq 2} R_S(E). \quad (29a)$$

Симметризованное ядро Вайнберга определяется формулой

$$I_R(E) = - \sum_{S, i(S)=2} R_S(E) \left[ \sum_{\sim D_2} (H_0 - E)^{-1/2} V_{ij} (H_0 - E)^{-1/2} \right]. \quad (29b)$$

В (29b)  $D_2$  относится к последнему разложению в цепочке  $S$ , входящей в частную сумму. Заметим, что в (29) сумма по цепочкам конечна.

**Лемма 4В.** Функции  $D_R(E)$  и  $I_R(E)$  аналитичны в  $\mathbb{C} \setminus [\Sigma, \infty)$  и  $I_R(E)$  — компактная операторнозначная функция, причем  $\lim_{E \rightarrow -\infty} \|I_R(E)\| = 0$ . При  $E \notin \sigma(H)$  положим

$$R(E) \equiv R_{\{\{1, \dots, N\}\}}(E) = [1 + (H_0 - E)^{-1/2} \left( \sum_{i < j} V_{ij} \right) (H_0 - E)^{-1/2}]^{-1},$$

где  $\{\{1, \dots, N\}\}$  относится к разложению  $D$  и содержит только один кластер. Тогда при всех  $E \notin \sigma(H)$

$$R(E) = D_R(E) + I_R(E) R(E). \quad (29c)$$

*Доказательство.* Любая  $D$  с  $\#(D) \geq 2$  имеет  $\sigma(H_D) \subset [\Sigma, \infty)$ , так что  $I_R(E)$  и  $D_R(E)$  аналитичны в  $\mathbb{C} \setminus [\Sigma, \infty)$ . Для всех  $E$  с достаточно большой по абсолютной величине отрицательной вещественной частью  $I_R(E)$  может быть разложено в сходящуюся по норме сумму всех едва связанных диаграмм. По лемме 3В,  $I_R(E)$  компактно при всех таких  $E$ , так что, в силу леммы 5,  $I_R(E)$  компактно при всех  $E \in \mathbb{C} \setminus [\Sigma, \infty)$ . Из ряда теории возмущений следует также, что  $\lim_{E \rightarrow -\infty} \|I_R(E)\| = 0$ .

Заметим далее, что между цепочками  $S$  с  $i(S) = 2$  и цепочками  $\bar{S}$  с  $i(\bar{S}) = 1$  существует взаимно однозначное соответствие, так как единственное разложение с одним элементом есть  $D_1 \equiv \{1, \dots, N\}$ , а также что  $R_{D_1} = R$ . Поэтому если  $S = \langle D_N, \dots, D_2 \rangle$  и  $\bar{S} = \langle D_N, \dots, D_1 \rangle$ , то из леммы 6 следует, что

$$R_{\bar{S}}(E) = -R_S(E) \left[ \sum_{-D_i} (H_0 - E)^{-1/2} V_{ij} (H_0 - E)^{-1/2} \right] R(E).$$

Суммируя по всем  $\bar{S}$  (или, эквивалентно, по всем  $S$ ), мы увидим, что

$$\sum_{\bar{S}, i(\bar{S})=1} R_{\bar{S}}(E) = I_R(E) R(E).$$

При всех достаточно отрицательных  $E$  ряд теории возмущений (21) сходится, так что  $R(E)$  есть сумма по всем диаграммам; следовательно, суммируя сначала по диаграммам в каждой фиксированной цепочке, а затем по цепочкам, получим, что

$$R(E) = \sum_{S, i(S) \geq 2} \bar{R}_S(E) + \sum_{\bar{S}, i(\bar{S})=1} \bar{R}_{\bar{S}}(E).$$

Это доказывает (29c) при больших по абсолютной величине отрицательных  $E$ . По аналитическому продолжению это справедливо и при  $E \notin \sigma(H) \cup [\Sigma, \infty) = \sigma(H)$  (по лемме 2). ■

Уравнение (29) называется уравнением Вайнберга — ван Винтера.

**Доказательство теоремы XIII.17, общий случай.** Доказательство в основном такое же, как в случае  $N=3$ ;  $V_{ij} \in L^2$ . В силу леммы 4В и аналитической теоремы Фредгольма  $(1 - I_R(E))^{-1}$  существует и аналитична в  $\mathbb{C} \setminus ([\Sigma, \infty) \cup S)$ , где  $S$  — дискретное множество в  $\mathbb{C} \setminus [\Sigma, \infty)$ . Следовательно,

$$f(E) = (H_0 - E)^{-1/2} [1 - I_R(E)]^{-1} D_R(E) (H_0 - E)^{-1/2}$$

существует в  $\mathbb{C} \setminus ([\Sigma, \infty) \cup S)$  и имеет вычеты конечного ранга в точках из  $S$ . Когда  $\text{Im } E \neq 0$ ,  $f(E) = (H - E)^{-1}$ , так что  $f(E) \times (H - E)\psi = \psi$  при всех  $\psi \in D(H)$ . По аналитическому продолжению  $\sigma(H) \subset [\Sigma, \infty) \cup S$ , и точки  $S$  имеют конечномерные спектральные проекторы. Следовательно,  $\sigma_{\text{ess}}(H) \subset [\Sigma, \infty)$ . По лемме 2,  $[\Sigma, \infty) \subset \sigma(H)$ , так что  $\sigma_{\text{ess}}(H) = [\Sigma, \infty)$ . ■

Как непосредственное следствие ХВЖ-теоремы получается

**Теорема XIII.18.** Если  $H$  — оператор Шредингера  $N$  частиц за вычетом энергии движения центра масс, и если  $V_{ij} \in L^2 + L^r$  ( $r < 3$ ) при всех  $i, j$ , то  $\sigma_{\text{ac}}(H) = [\Sigma, \infty)$ , где  $\Sigma$  задано формулой (20b).

**Доказательство.** Из теоремы XI.34 и соотношений

$$e^{-iHt} \Omega_D^\pm = \Omega_D^\pm - iH_D^t \quad \text{и} \quad (\Omega_D^\pm)^* \Omega_D^\pm = 1$$

следует, что  $\sigma_{\text{ac}}(H) \supset \sigma_{\text{ac}}(H_D)$  при всех  $D$ . Если  $\#(D) \geq 2$ , то  $\sigma_{\text{ac}}(H_D) = \sigma(H_D) = [\Sigma_D, \infty)$ , так что  $\sigma_{\text{ac}}(H) \supset [\Sigma, \infty)$ . Но, с другой стороны,  $\sigma_{\text{ac}}(H) \subset \sigma_{\text{ess}}(H) = [\Sigma, \infty)$  по ХВЖ-теореме. ■

В заключение этого раздела приведем второе доказательство «трудной» части теоремы XIII.17, т. е. того, что  $\sigma_{\text{ess}}(H) \subset [\Sigma, \infty)$ . Это доказательство опирается на совсем другие идеи, но в его основе лежит то же условие компактности.

**Лемма 7.** Пусть  $H$  — самосопряженный оператор, такой, что  $f(H)$  компактен при любой непрерывной функции  $f$  с компактным носителем, удовлетворяющим условию  $\text{supp } f \subset (-\infty, \Sigma)$ . Тогда  $\sigma_{\text{ess}}(H) \subset [\Sigma, \infty)$ .

**Доказательство.** Это часть теоремы XIII.77, доказанной в § 14. ■

Второе доказательство того, что  $\sigma_{\text{ess}}(H) \subset [\Sigma, \infty)$ , опирается на две идеи. Во-первых, ограниченные области не могут вносить вклад в  $\sigma_{\text{ess}}(H)$ , и, во-вторых, вблизи бесконечности  $H$  должен выглядеть как некоторый  $H_D$ . Для воплощения первой идеи выберем функцию  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{3N-3})$  со свойством  $0 \leq \varphi \leq 1$  и такую, что  $\varphi(x) = 1$  при  $|x| \leq 1$  и  $\varphi(x) = 0$  при  $|x| \geq 2$ . Определим  $j_{<n}(x) = \varphi(xn^{-1})$  и  $j_{>n} = 1 - j_{<n}$ . Тогда первая идея выражается следующей леммой.

**Лемма 8.** Пусть  $H$  удовлетворяет всем условиям теоремы XIII.17. Тогда для всякой непрерывной функции  $f$  с компактным носителем  $j_{<n} f(H)$  компактен при любом  $n$ .

**Доказательство.** Выберем  $c < \inf \sigma(H)$  и ограниченную непрерывную функцию  $g$ , такую, что  $g(x) = (x-c)^{1/2} f(x)$  при  $x \in \sigma(H)$ . Тогда

$$\begin{aligned} j_{<n} f(H) &= j_{<n} (H-c)^{-1/2} g(H) = \\ &= j_{<n} (H_0+1)^{-1/2} [(H_0+1)^{1/2} (H-c)^{-1/2}] g(H). \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно доказать, что  $j_{<n} (H_0+1)^{-1/2}$  компактен, а это следует из теоремы XI.20 или задачи 41. ■

Для выражения того, что вблизи бесконечности  $H$  выглядит как некоторый  $H_D$ , по крайней мере в некоторых трубах, полезна такая лемма:

**Лемма 9.** Пусть  $A_n$  — семейство ограниченных операторов с  $\sup_n \|A_n\| < \infty$ , и пусть  $H_1, H_2$  — два самосопряженных оператора, спектры которых  $\sigma(H_1)$  и  $\sigma(H_2)$  содержатся в  $[c, \infty)$  и которые удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n [(H_1 - z)^{-1} - (H_2 - z)^{-1}]\| = 0$$

при всех  $z$  из какого-либо открытого подмножества в  $\mathbb{C} \setminus [c, \infty)$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n [f(H_1) - f(H_2)]\| = 0$$

для любой непрерывной функции  $f$  с компактным носителем.

**Доказательство.** Доказательство похоже на доказательство теоремы VIII.20a. По теореме Витали о сходимости первое утверждение о пределе выполнено при всех  $z \in \mathbb{C} \setminus [c, \infty)$ , причем равномерно на компактных подмножествах в  $\mathbb{C} \setminus [c, \infty)$ . Пользуясь интегральной формулой Коши заключаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n [(H_1 - c + 1)^{-m} - (H_2 - c + 1)^{-m}]\| = 0.$$

Утверждение леммы следует теперь из теоремы Стоуна — Вейерштрасса, вследствие которой  $f(x)$  может быть равномерно на  $[c, \infty)$  аппроксимирована полиномами по  $(x-c+1)^{-1}$ . ■

Далее выделим те области, где  $H$  и  $H_D$  похожи. Нам потребуются лишь  $D$  с  $\#(D) = 2$ , так что пусть  $D_a, a = 1, 3, \dots, 2^{N-1} - 1$ , соответствуют всем различным способам разбиения  $\{1, 2, \dots, N\}$  на два непустых подмножества  $C_a^{(1)}$  и  $C_a^{(2)}$ . Положим  $H_a = H_{D_a}$ ,  $I_a = I_{D_a}$  и

$$|x|_0 = \left( \sum_{i < j} |x_i - x_j|^2 \right)^{1/2},$$

$$|x|_a = \min \{ |x_i - x_j| \mid i \in C_a^{(1)}, j \in C_a^{(2)} \}.$$

**Лемма 10.** Пусть  $d_N = (N-1)^{-3/2} N^{-1/2} \sqrt{2}$ . Тогда при любом  $x \in \mathbb{R}^{3N-3}$  существует такое  $a$ , что  $|x|_a \geq d_N |x|_0$ . В частности, существуют такие функции  $j_a$ ,  $a = 1, 3, \dots, 2^{N-1} - 1$ , что

- (a)  $0 \leq j_a \leq 1$ ,  $\sum_a j_a(x) \equiv 1$ ;  
 (b)  $j_a(\lambda x) = j_a(x)$  при всех  $\lambda \in (0, \infty)$ ;  
 (c)  $j_a \in C^\infty$  на  $\mathbb{R}^{3N-3} \setminus \{0\}$ ;  
 (d)  $\text{supp } j_a \subset \{x \mid |x|_a \geq 1/2 d_N |x|_0\}$ .

*Доказательство.* Это геометрическое доказательство, совершенно такое же, как то, которое было приведено при рассмотрении теории рассеяния Хаага—Рюэля (§ XI.16). При данном  $x$  пусть  $i$  и  $j$  — две такие точки, что  $|x_i - x_j| \geq \sqrt{2} (N-1)^{-1/2} N^{-1/2} |x|_0$ . Пусть  $\pi_1, \dots, \pi_N$  суть  $N$  плоскостей, проходящих через точки  $x_1, \dots, x_N$  перпендикулярно  $x_i - x_j$ . Очевидно, что они делят область между  $\pi_i$  и  $\pi_j$  на не более чем  $N-1$  слоев, один из которых должен иметь толщину по крайней мере  $(N-1)^{-1} |x_i - x_j|$ . Выбрав  $C_a^{(1)}$  и  $C_a^{(2)}$  так, чтобы они отвечали частицам по разные стороны от этого слоя, получим  $|x|_a \geq (N-1)^{-1} |x_i - x_j|$ .

Чтобы построить функции  $j_a$ , рассмотрим сначала открытые подмножества на сфере  $S \equiv \{x \mid |x|_0 = 1\}$  вида  $R_a = \{x \mid |x|_a \geq 1/2 d_N, |x|_0 = 1\}$ , которые покрывают  $S$  по предыдущему построению. Обычным образом найдем  $C^\infty$ -функции  $\tilde{j}_a$  на  $S$  с  $\text{supp } \tilde{j}_a \subset R_a$ ,  $0 \leq \tilde{j}_a$  и  $\sum \tilde{j}_a \equiv 1$ . Положим  $j_a(x) = \tilde{j}_a(|x|_0^{-1} x)$ . ■

Теперь можно придать точный смысл словам: вблизи бесконечности  $H$  выглядит как некоторый  $H_a$ .

**Лемма 11.** Фиксируем  $a = 1, \dots, 2^{N-1} - 1$ . При любом  $z \notin \sigma(H) \cup \sigma(H_a)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|j_{>n} j_a [(H-z)^{-1} - (H_a-z)^{-1}]\| = 0.$$

*Доказательство.* Напишем

$$j_{>n} j_a [(H-z)^{-1} - (H_a-z)^{-1}] \equiv -(H-z)^{-1} I_a j_{>n} (H_a-z)^{-1} + [(H-z)^{-1}, j_{>n} j_a] I_a (H_a-z)^{-1},$$

и воспользуемся тем, что  $[(H-z)^{-1}, f] = -(H-z)^{-1} [H_0, f] (H-z)^{-1}$ ; тогда достаточно доказать, что

$$\|(H_0+1)^{-1/2} I_a j_{>n} (H_0+1)^{-1/2}\| \rightarrow 0 \quad (29.1)$$

и

$$\|(H_0+1)^{-1/2} [H_0, j_{>n} j_a] (H_0+1)^{-1/2}\| \rightarrow 0. \quad (29.2)$$

Так как  $j_{>n}$  имеет носитель в области, где  $|x|_a \geq 1/2 d_N n$ , то (29.1) следует из того, что  $V_{ij} \in R + L_e^\infty$ . А (29.2) следует из того, что

$$\|\nabla(j_{>n} j_a)\|_\infty \leq \|j_{>n} \nabla j_a\|_\infty + \|\nabla j_{>n}\|_\infty = Cn^{-1} \rightarrow 0. \quad \blacksquare$$



**Второе доказательство теоремы XIII.17.** Теперь мы дадим второе доказательство того, что  $\sigma_{\text{ess}}(H) \subset [\Sigma, \infty)$ . Так как  $\sum j_a = j_{<n} + j_{>n} = 1$ , то

$$f(H) = f(H) j_{<n} + \sum_a [f(H) - f(H_a)] j_{a|>n} + \sum_a f(H_a) j_{a|>n}. \quad (29.3)$$

Пусть  $f$  — непрерывная функция с компактным носителем и с  $\text{supp } f \subset (-\infty, \Sigma]$ . Так как  $\sigma(H_a) \subset [\Sigma, \infty)$ , то  $f(H_a) = 0$ , и потому последний член в (29.3) есть нуль. По леммам 9 и 11 второй член в (29.3) стремится к нулю по норме, когда  $n \rightarrow \infty$ . По лемме 8 первый член компактен. Следовательно,  $f(H)$  компактен для таких  $f$ . С помощью леммы 7 заключаем, что  $\sigma_{\text{ess}}(H) = [\Sigma, \infty)$ . ■

Отметим, наконец, что (29.3) полезно в тех случаях, когда мы ограничиваемся каким-либо подпространством с определенной симметрией. Вот абстрактная формулировка:

**Теорема XIII.17'.** Пусть  $H$  — оператор, удовлетворяющий всем предположениям теоремы XIII.17. Пусть  $P$  — проектор на инвариантное подпространство оператора  $H$  и  $P_a$ ,  $a = 1, \dots, 2^{N-1} - 1$ , — проектор на некоторое инвариантное подпространство оператора  $H_a$ , содержащее  $P\mathcal{H}$ . Пусть  $\Sigma_p = \min_a \inf \sigma(H_a P_a)$ . Тогда  $\sigma_{\text{ess}}(HP) \subset [\Sigma_p, \infty)$ .

**Доказательство.** Очевидно, что  $\Sigma_p \leq 0$ , так как  $0 \in \sigma(H_a P_a)$ . Следовательно, для всякой  $f$  с носителем в  $(-\infty, \Sigma_p)$  имеем  $Pf(H) = f(PH)$  и  $P_a f(H_a) = f(P_a H_a) = 0$ . Так как по предположению  $P = PP_a$ , то на основании (29.3)

$$f(PH) = Pf(H) j_{<n} + P \sum_a [f(H) - f(H_a)] j_{a|>n}.$$

Так же как в предыдущем доказательстве, заключаем, что  $f(PH)$  компактен и, следовательно,  $\sigma_{\text{ess}}(HP) \subset [\Sigma_p, \infty)$ . ■

**Пример.** Пусть  $H$  — гамильтониан атома, который получается вычитанием движения центра масс из

$$\begin{aligned} \tilde{H} = - \sum_{i=1}^{N-1} (2\mu)^{-1} \Delta_i - (2M)^{-1} \Delta_N - Z \sum_{i=1}^{N-1} |r_i - r_N|^{-1} + \\ + \sum_{i < j \leq N-1} |r_i - r_j|^{-1}, \end{aligned}$$

и пусть  $P$  — проектор на все функции, антисимметричные относительно перестановки  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ . Для всякого  $a$  пусть  $P_a$  — проектор на все функции, антисимметричные относительно перестановки двух электронов в одной  $C_i^{(a)}$ . Тогда из тео-

ремы XIII.17' следует, что  $\sigma_{\text{ess}}(HP) \subset [\Sigma_p, \infty)$ , а последнее множество, вообще говоря, строго меньше, чем  $[\Sigma, \infty)$ . Легко показать (задача 46), что в этом случае  $[\Sigma_p, \infty) \subset \sigma_{\text{ess}}(HP)$ .

### XIII.6. Отсутствие сингулярного спектра I: общая теория

Спектральный анализ какого-либо оператора  $A$  сводится к описанию пяти множеств:  $\sigma_{\text{ess}}(A)$ ,  $\sigma_{\text{disc}}(A)$ ,  $\sigma_{\text{ac}}(A)$ ,  $\sigma_{\text{sing}}(A)$ ,  $\sigma_{\text{pp}}(A)$ . Для широких классов операторов Шредингера  $H$  нам удалось описать  $\sigma_{\text{ess}}(H)$  и  $\sigma_{\text{ac}}(H)$ . Точное определение  $\sigma_{\text{disc}}(H)$  — это довольно сложное дело, но мы видели, как можно воспользоваться принципом минимакса для получения обширных сведений об этом спектре. Осталось рассмотреть  $\sigma_{\text{sing}}(H)$  и  $\sigma_{\text{pp}}(H)$ . Мы обсудим вопрос о доказательстве равенства  $\sigma_{\text{pp}} = \sigma_{\text{disc}}$  в § 13. Следующие пять разделов будут посвящены трудному вопросу о  $\sigma_{\text{sing}}(H)$ . Проведенное в § XI.3 обсуждение асимптотической полноты позволяет думать, что  $\sigma_{\text{sing}}(H) = \emptyset$ , и наша главная цель будет состоять в доказательстве этого для различных классов операторов Шредингера.

Как уже подчеркивалось, существует тесная связь между доказательством отсутствия сингулярного спектра и теорией рассеяния. На самом деле уже метод разложения по собственным функциям из § XI.6 кое-что говорит о сингулярном спектре. В общем случае, когда  $V \in L^1 \cap R$ , мы знаем, что  $\sigma_{\text{sing}}$  принадлежит исключительно множеству  $\mathcal{E}$ , так что  $\sigma_{\text{sing}}$  имеет меру Лебега нуль. В двух случаях: когда  $V \in L^1 \cap R$  и  $\|V\|_R < 4\pi$  и когда  $Ve^{a|x|} \in R$  при некотором  $a > 0$  — нам известно, что  $\mathcal{E}$  дискретно, так что  $\sigma_{\text{sing}} = \emptyset$ . В этом разделе мы выведем фундаментальный критерий отсутствия сингулярного спектра и покажем, как с его помощью без серьезных усилий получить эти два результата из основных принципов. В § 7 и 8 мы воспользуемся связью между теорией рассеяния и спектральным анализом в другую сторону: техника, развитая для доказательства отсутствия сингулярного спектра, послужит получению очень сильных результатов об асимптотической полноте.

Фундаментальный критерий отсутствия сингулярного спектра очень прост. Частично он основан на формуле Стоуна (теорема VII.13)

$$\frac{1}{2} (\varphi, (E_{[a, b]} + E_{(a, b)}) \varphi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \pi^{-1} \int_a^b \text{Im} (\varphi, R(x + i\varepsilon) \varphi) dx,$$

где  $R(\lambda)$  есть резольвента  $(H - \lambda)^{-1}$  некоторого самосопряженного  $H$  и  $\{E_\Omega\}$  — семейство его спектральных проекторов. В частности;