ремы XIII.17′ следует, что $\sigma_{ess}(HP) \subset [\Sigma_P, \infty)$, а последнее множество, вообще говоря, строго меньше, чем $[\Sigma, \infty)$. Легко показать (задача 46), что в этом случае $[\Sigma_P, \infty) \subset \sigma_{ess}(HP)$.

XIII.6. Отсутствие сингулярного спектра I: общая теория

Спектральный анализ какого-либо оператора A сводится к описанию пяти множеств: $\sigma_{ess}(A)$, $\sigma_{disc}(A)$, $\sigma_{ac}(A)$, $\sigma_{sing}(A)$, $\sigma_{pp}(A)$. Для широких классов операторов Шредингера H нам удалось описать $\sigma_{ess}(H)$ и $\sigma_{ac}(H)$. Точное определение $\sigma_{disc}(H)$ — это довольно сложное дело, но мы видели, как можно воспользоваться принципом минимакса для получения обширных сведений об этом спектре. Осталось рассмотреть $\sigma_{sing}(H)$ и $\sigma_{pp}(H)$. Мы обсудим вопрос о доказательстве равенства $\sigma_{pp} = \sigma_{disc}$ в § 13. Следующие пять разделов будут посвящены трудному вопросу о $\sigma_{sing}(H)$. Проведенное в § XI.3 обсуждение асимптотической полноты позволяет думать, что $\sigma_{sing}(H) = \varnothing$, и наша главная цель будет состоять в доказательстве этого для различных классов операторов Шредингера.

Как уже подчеркивалось, существует тесная связь между доказательством отсутствия сингулярного спектра и теорией рассеяния. На самом деле уже метод разложения по собственным функциям из § XI.6 кое-что говорит о сингулярном спектре. В общем случае, когда $V \in L^1 \cap R$, мы знаем, что σ_{sing} принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}$, так что σ_{sing} имеет меру Лебега нуль. В двух случаях: когда $V \in L^1 \cap R$ и $\|V\|_R < 4\pi$ и когда $Ve^{a|x|} \in R$ при некотором $a > 0$ — нам известно, что $\mathcal{E}$ дискретно, так что $\sigma_{sing} = \varnothing$. В этом разделе мы выведем фундаментальный критерий отсутствия сингулярного спектра и покажем, как с его помощью без серьезных усилий получить эти два результата из основных принципов. В § 7 и 8 мы воспользуемся связью между теорией рассеяния и спектральным анализом в другую сторону: техника, развитая для доказательства отсутствия сингулярного спектра, послужит получению очень сильных результатов об асимптотической полноте.

Фундаментальный критерий отсутствия сингулярного спектра очень прост. Частично он основан на формуле Стоуна (теорема VII.13)

$$\frac{1}{2}(\varphi, (E_{[a, b]} + E_{(a, b)})\varphi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \pi^{-1} \int_a^b \operatorname{Im}(\varphi, R(x + i\varepsilon)\varphi)\, dx,$$

где $R(\lambda)$ есть резольвента $(H - \lambda)^{-1}$ некоторого самосопряженного H и $\{E_\Omega\}$ — семейство его спектральных проекторов. В частности, в случае $p=1$ для любого $\varphi \in \mathscr{H}$

$$\sup_{0<\varepsilon<1} \int_a^b |\operatorname{Im}(\varphi,\ R(x+i\varepsilon)\varphi)|^p\,dx < \infty. \tag{30}$$

Теорема XIII.19. Пусть H — самосопряженный оператор с резольвентой $R(\lambda)=(H-\lambda)^{-1}$. Пусть (a, b) — ограниченный интервал и $\varphi \in \mathscr{H}$. Предположим, что существует некоторое $p>1$, для которого выполнено (30). Тогда $E_{(a,b)}\varphi \in \mathscr{H}_{ac}$.

Доказательство. Согласно формуле Стоуна и неравенству $E_{(c,d)} \leqslant \leqslant E_{[c,d]}$,

$$(\varphi,\ E_{(c,d)}\varphi) \leqslant \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_c^d \operatorname{Im}(\varphi,\ R(x+i\varepsilon)\varphi)\,dx$$

для каждого открытого интервала (c, d). Пусть S — открытое множество в (a, b), так что $S=\bigcup_{i=1}^{N}(a_i,\ b_i)$ есть объединение непересекающихся открытых интервалов. Предположим сначала, что $N<\infty$. Тогда

$$\begin{aligned}(\varphi,\ E_S\varphi) &\leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{N} \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{a_i}^{b_i} \operatorname{Im}(\varphi,\ R(x+i\varepsilon)\varphi)\,dx \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sum_{i=1}^{N}\int_{a_i}^{b_i} \operatorname{Im}(\varphi,\ R(x+i\varepsilon)\varphi)\,dx \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left[\int_a^b |\operatorname{Im}(\varphi,\ R(x+i\varepsilon)\varphi)|^p\,dx\right]^{1/p} |S|^{1/q} \leqslant C|S|^{1/q},\end{aligned}$$

где $|S|$ — мера Лебега множества S и q — индекс, сопряженный с p. Если N бесконечно, то положим $S_m=\bigcup_{i=1}^{m}(a_i,\ b_i)$. Таким образом,

$$(\varphi,\ E_S\varphi) = \lim_{m\to\infty}(\varphi,\ E_{S_m}\varphi) \leqslant \lim_{m\to\infty} C|S_m|^{1/q} = C|S|^{1/q}.$$

Пусть I — произвольное множество нулевой меры Лебега, лежащее внутри (a, b). Поскольку мера Лебега регулярна, можно найти открытое множество $S^{(k)}$, содержащее I и такое, что $|S^{(k)}| < < 1/k$. Тогда

$$(\varphi,\ E_I\varphi) \leqslant \inf_k(\varphi,\ E_{S^{(k)}}\varphi) \leqslant C\inf|S^{(k)}|^{1/q}=0.$$

Следовательно, мера $\Omega \mapsto (\varphi, E_\Omega \varphi)$ абсолютно непрерывна на (a, b), так что $E_{(a, b)} \varphi \in \mathscr{H}_{\text{ac}}$. ∎

Теорема XIII.20. Пусть H — самосопряженный оператор с резольвентой $R(\lambda) = (H - \lambda)^{-1}$. Пусть (a, b) — ограниченный интервал. Предположим, что существует такое плотное множество $D \subset \mathscr{H}$, что для каждого $\varphi \in D$ условие (30) выполняется с некоторым $p > 1$. Тогда H имеет только абсолютно непрерывный спектр на (a, b), т. е. $\operatorname{Ran} E_{(a, b)} \subset \mathscr{H}_{\text{ac}}$. Обратно, если $\operatorname{Ran} E_{(a, b)} \subset \mathscr{H}_{\text{ac}}$, то существует такое множество D, плотное в $\operatorname{Ran} E_{(a, b)}$, что (30) выполнено при любом $p \geqslant 1$, включая $p = \infty$, когда $\varphi \in D$.

Доказательство. Первая половина этой теоремы следует из теоремы XIII.19. Для доказательства второй части допустим, что D есть множество векторов φ, для которых спектральная мера $d\mu_\varphi$ оператора H имеет вид $f(x)\,dx$, где $f \in L^\infty$ с компактным носителем в (a, b). По предположению, D плотно в $\operatorname{Ran} E_{(a, b)}$. Далее,

$$\operatorname{Im}(\varphi, R(x + i\varepsilon)\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x - y) f(y)\,dy,$$

где $g_\varepsilon(y) = \varepsilon(y^2 + \varepsilon^2)^{-1}$. Так как $\|g_\varepsilon\|_1 = \pi$ и не зависит от ε, условие (30) выполняется с $p = \infty$ в силу неравенства Юнга, а значит, и для всех p, так как (a, b) конечен. ∎

В большей части приложений теоремы XIII.20 в действительности доказывается, что $(\varphi, R(\lambda)\varphi)$ ограничено на $M = \{x + i\varepsilon \mid \varepsilon \in (0, 1), x \in (a, b)\}$, или, несколько сильнее, что $(\varphi, R(\lambda)\varphi)$ имеет непрерывное продолжение на $\overline{M}$. Характерное применение таково:

Теорема XIII.21. Пусть $V \in R$, R — класс Рольника, и пусть $H = -\Delta + V$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$. Предположим, что *либо*

(a) $\|V\|_R < 4\pi$,

либо

(b) $Ve^{a|x|} \in R$ с некоторым $a > 0$.

Тогда $\sigma_{\text{sing}}(H) = \varnothing$.

Доказательство. (a) Так как $\|V\|_R < 4\pi$, то $|V|^{1/2}(H_0 - \lambda)^{-1} V^{1/2}$ имеет норму Гильберта — Шмидта, меньшую 1, равномерно по $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ (см. § XI.6). Пусть $f \in C_0^\infty$; заметим, что $|f|^{1/2} \in R$. Тогда

$$|f|^{1/2}(H - \lambda)^{-1}|f|^{1/2} = |f|^{1/2}(H_0 - \lambda)^{-1}|f|^{1/2} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (|f|^{1/2}(H_0 - \lambda)^{-1} V^{1/2}) (|V|^{1/2}(H_0 - \lambda)^{-1} V^{1/2})^n \times \\ \times (|V|^{1/2}(H_0 - \lambda)^{-1}|f|^{1/2})$$

сходится равномерно по норме Гильберта — Шмидта к оператору с нормой, меньшей $C_1+C_2(1-(4\pi)^{-1}\|V\|_R)^{-1}$. Следовательно,

$$|(f, (H-\lambda)^{-1}f)| \leqslant \| |f|^{1/2} \|_2 \| |f|^{1/2}(H-\lambda)^{-1}|f|^{1/2}\|$$

и $(f, (H-\lambda)^{-1}f)$ ограничено на $\mathbb{C}\setminus[0, \infty)$. Из фундаментального критерия — теоремы XIII.19, таким образом, следует, что $\operatorname{Ran} E_{(a, b)} \subset \mathscr{H}_{ac}$ при *всех* (a, b), так что σ_{pp} и σ_{sing} пусты.

(b) Как при обсуждении в § XI.6, $(1+|V|^{1/2}(H_0-\lambda)^{-1}|V|^{1/2})^{-1}$ существует при всех $\lambda \in \mathbb{C}\setminus[0, \infty)$ и имеет непрерывные граничные значения, когда $\lambda \to x+i0$, пока x не попадает в исключительное множество $\mathscr{E}$ — конечное множество вещественных чисел. Пусть $[a, b]$ изолировано от $\mathscr{E}$. Тогда

$$|f|^{1/2}(H-\lambda)^{-1}|f|^{1/2} = |f|^{1/2}(H_0-\lambda)^{-1}|f|^{1/2} - \\ -(|f|^{1/2}(H_0-\lambda)^{-1}V^{1/2})(1+|V|^{1/2}(H_0-\lambda)^{-1}V^{1/2})^{-1} \times \\ \times |V|^{1/2}(H_0-\lambda)^{-1}|f|^{1/2}$$

является равномерно ограниченным оператором на $\{x+i\varepsilon \mid 0 < \varepsilon < 1, x \in [a, b]\}$, если только $f \in C_0^\infty$. Как и в (a), отсюда следует, что $\operatorname{Ran} E_{(a, b)} \subset \mathscr{H}_{ac}$, так что σ_{sing} лежит в конечном множестве $\mathscr{E}$. Отсюда выводим, что $\sigma_{sing} = \varnothing$. ∎

Возникает естественный вопрос: почему при наличии такого простого критерия (теорема XIII.20) того, что $\sigma_{sing}(H)$ пуст, задача описания сингулярного спектра настолько труднее задачи описания $\sigma_{ess}(H)$ (§ 4 и 5) или $\sigma_{ac}(H)$ (§ XI.3). Причина в том, что σ_{sing} далеко не столь устойчив относительно возмущений. Чтобы проиллюстрировать это, опишем теорию Ароншайна — Доногью поведения σ_{sing} под действием возмущений ранга один. Эту теорию следует сравнить с теоремой Вейля об инвариантности σ_{ess} и теорией Като — Бирмана об инвариантности σ_{ac}. Основой теории Ароншайна — Доногью является следующая комбинация классических результатов Фату и Валле Пуссена:

Предложение. Пусть ν — конечная мера Бореля на $\mathbb{R}$, и пусть

$$F(z) = \int (x-z)^{-1}\,d\nu(x)$$

с $\operatorname{Im} z > 0$. Пусть $A_\nu = \{x \mid \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F(x+i\varepsilon) = \infty\}$, и пусть $B = \{x \mid \lim_{\varepsilon \downarrow 0} F(x+i\varepsilon) = \Phi(x)$ — конечное число с $\operatorname{Im}\Phi(x) \neq 0\}$. Тогда $\nu(\mathbb{R}\setminus(A_\nu \cup B_\nu)) = 0$, $\nu \restriction A_\nu$ сингулярна относительно меры Лебега и $\nu \restriction B_\nu$ абсолютно непрерывна.

Доказательства этих результатов можно проследить по литературе, приведенной в Замечаниях. Пусть теперь H_0 — некоторый самосопряженный оператор на $\mathscr{H}$, и пусть $\varphi \in \mathscr{H}$ — единичный вектор. Пусть P — проектор на φ, и пусть

$$H_\alpha = H_0 + \alpha P.$$

Пусть $\mathcal{H}'$ — циклическое подпространство для φ, порожденное H_0. Очевидно, все H_α равны H_0 на $(\mathcal{H}')^\perp$, так что мы можем с тем же успехом считать, что $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$, т. е. мы тем самым допускаем, что φ цикличен для H_0. Отсюда следует, что φ цикличен и для H_α, так как

$$(H_\alpha - z)^{-1}\varphi = (H_0 - z)^{-1}\varphi - \alpha(\varphi, (H_0 - z)^{-1}\varphi)(H_\alpha - z)^{-1}\varphi,$$

и потому оболочка $\{(H_\alpha - z)^{-1}\varphi\}$ совпадает с оболочкой $\{(H_0 - z)^{-1}\varphi\}$. Из этой цикличности вытекает, что H_α унитарно эквивалентен умножению на x в $L^2(\mathbb{R}, d\nu_\alpha)$ с соответствующей мерой $d\nu_\alpha$.

Очевидно,

$$F_\alpha(z) \equiv \int (x - z)^{-1} d\nu_\alpha(x) = (\varphi, (H_\alpha - z)^{-1}\varphi)$$

удовлетворяет условию

$$F_\alpha(z) = F_\beta(z) + (\beta - \alpha) F_\alpha(z) F_\beta(z)$$

благодаря резольвентному уравнению

$$(H_\alpha - z)^{-1} = (H_\beta - z)^{-1} + (\beta - \alpha)(H_\alpha - z)^{-1} P (H_\beta - z)^{-1}.$$

Итак, мы имеем следующее основное уравнение:

$$F_\alpha(z) = F_\beta(z)(1 + (\alpha - \beta) F_\beta(z))^{-1}. \qquad (30^1/_2)$$

Заметим, что если $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} F_\beta(z) = \infty$, то $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} F_\alpha(z) = (\alpha - \beta)^{-1} \neq \infty$ при $\alpha \neq \beta$. Применив предложение, мы докажем следующий поразительный результат о *неинвариантности* σ_{sing}.

Теорема XIII.21$^1/_2$. Пусть H_0 — самосопряженный оператор, и пусть φ — циклический вектор для H_0. Пусть

$$H_\alpha = H_0 + \alpha(\varphi, \cdot)\varphi.$$

Тогда при $\alpha \neq \beta$ сингулярные части спектральных мер H_α и H_β (т. е. объединение чисто точечной и сингулярной части спектра) взаимно сингулярны.

Пример. Пусть $d\nu_0 = dx \upharpoonright [0, 1] + d\mu_C$, где $d\mu_C$ — мера Кантора. Тогда $\sigma_{\text{ess}}(H_\alpha) = [0, 1]$ при всех α вследствие теоремы Вейля. Далее, $F_0 = F_L + F_C$ очевидным образом и

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \operatorname{Im} F_L(x + i\varepsilon) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1), \\ 1/2, & x = 0, 1, \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Так как $\operatorname{Im} F_L(z) \geqslant 0$ при всех z с $\operatorname{Im} z > 0$, мы видим, что $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} F_0(x+i\varepsilon)$ не веществен ни при каком $x \in [0, 1]$. Из основного уравнения ($30^1/_2$) следует, что $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} F_\beta(x+i\varepsilon)$ не бесконечен ни при каких $\beta \neq 0$, $x \in [0, 1]$. Следовательно, никакой H_β при $\beta \neq 0$ не имеет сингулярного спектра, в то время как $\sigma_{\text{sing}}(H_0) \neq \varnothing$. Таким образом, мы имеем два ограниченных оператора H_0 и H_1, таких, что $H_0 - H_1$ имеет ранг один и при этом $\sigma_{\text{sing}}(H_1) = \varnothing \neq \sigma_{\text{sing}}(H_0)$!

XIII.7. Отсутствие сингулярного спектра II: гладкие возмущения

Теорема XIII.20 подсказывает нам, что следует изучить L^p-оценки математических ожиданий резольвенты, а наш опыт наводит на мысль, что особенно просто будет рассмотреть случай $p=2$.

Определение. Пусть H — самосопряженный оператор с резольвентой $R(\mu) = (H-\mu)^{-1}$. Пусть A — замкнутый оператор; A называется **H-гладким** тогда и только тогда, когда для каждого $\varphi \in \mathscr{H}$ и каждого $\varepsilon \neq 0$ для почти всех $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем $R(\lambda+i\varepsilon)\varphi \in D(A)$ и, кроме того,

$$\|A\|_H^2 = \sup_{\substack{\|\varphi\|=1 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\|AR(\lambda+i\varepsilon)\varphi\|^2 + \|AR(\lambda-i\varepsilon)\varphi\|^2)\, d\lambda < \infty. \quad (31)$$

Поскольку A замкнут, достаточно, чтобы (31) выполнялось для плотного множества векторов φ (задача 47а). Более интересно то, что, как показывает принцип равномерной ограниченности, если для *каждого* φ мы имеем $\int_{-\infty}^{\infty} \|AR(\lambda \pm i\varepsilon)\varphi\|^2 d\lambda \leqslant M_\varphi^2$ с некоторой константой M_φ (не зависящей от $\varepsilon > 0$ и от знака $\pm$, но зависящей от φ), то A является H-гладким (задача 47b, с).

H-гладкие операторы — это особенно удобный класс операторов. Например, мы увидим, что они H-ограничены с нулевой относительной гранью. Они представляют существующую в микромире тесную связь между теорией рассеяния и спектральным анализом. С одной стороны, мы докажем основной результат о существовании и полноте волновых операторов $\Omega^\pm(H_1, H_0)$, когда разность $H_1 - H_0$ есть произведение H_1-гладкого оператора на H_0-гладкий оператор (теорема XIII.24; см. также теорему XIII.31). С другой стороны, мы увидим, что если A H-гладкий, то $\overline{\operatorname{Ran}(A^*)} \subset \mathscr{H}_{\text{ac}}(H)$ (теорема XIII.23), что приве-