Так как $\operatorname{Im} F_L(z) \geqslant 0$ при всех z с $\operatorname{Im} z > 0$, мы видим, что $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} F_0(x+i\varepsilon)$ не веществен ни при каком $x \in [0, 1]$. Из основного уравнения (30$^1/_2$) следует, что $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} F_\beta(x+i\varepsilon)$ не бесконечен ни при каких $\beta \neq 0$, $x \in [0, 1]$. Следовательно, никакой H_β при $\beta \neq 0$ не имеет сингулярного спектра, в то время как $\sigma_{\text{sing}}(H_0) \neq \varnothing$. Таким образом, мы имеем два ограниченных оператора H_0 и H_1, таких, что $H_0 - H_1$ имеет ранг один и при этом $\sigma_{\text{sing}}(H_1) = \varnothing \neq \sigma_{\text{sing}}(H_0)$!

XIII.7. Отсутствие сингулярного спектра II: гладкие возмущения

Теорема XIII.20 подсказывает нам, что следует изучить L^p-оценки математических ожиданий резольвенты, а наш опыт наводит на мысль, что особенно просто будет рассмотреть случай $p=2$.

Определение. Пусть H — самосопряженный оператор с резольвентой $R(\mu) = (H-\mu)^{-1}$. Пусть A — замкнутый оператор; A называется ***H*-гладким** тогда и только тогда, когда для каждого $\varphi \in \mathscr{H}$ и каждого $\varepsilon \neq 0$ для почти всех $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем $R(\lambda+i\varepsilon)\varphi \in D(A)$ и, кроме того,

$$\|A\|_H^2 = \sup_{\substack{\|\varphi\|=1 \\ \varepsilon > 0}} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\|AR(\lambda+i\varepsilon)\varphi\|^2 + \|AR(\lambda-i\varepsilon)\varphi\|^2)\, d\lambda < \infty. \quad (31)$$

Поскольку A замкнут, достаточно, чтобы (31) выполнялось для плотного множества векторов φ (задача 47a). Более интересно то, что, как показывает принцип равномерной ограниченности, если для *каждого* φ мы имеем $\int_{-\infty}^{\infty} \|AR(\lambda \pm i\varepsilon)\varphi\|^2 d\lambda \leqslant M_\varphi^2$ с некоторой константой M_φ (не зависящей от $\varepsilon > 0$ и от знака $\pm$, но зависящей от φ), то A является H-гладким (задача 47b, c).

H-гладкие операторы — это особенно удобный класс операторов. Например, мы увидим, что они H-ограничены с нулевой относительной гранью. Они представляют существующую в микромире тесную связь между теорией рассеяния и спектральным анализом. С одной стороны, мы докажем основной результат о существовании и полноте волновых операторов $\Omega^\pm(H_1, H_0)$, когда разность $H_1 - H_0$ есть произведение H_1-гладкого оператора на H_0-гладкий оператор (теорема XIII.24; см. также теорему XIII.31). С другой стороны, мы увидим, что если A H-гладкий, то $\overline{\operatorname{Ran}(A^*)} \subset \mathscr{H}_{\text{ac}}(H)$ (теорема XIII.23), что приведет к нескольким теоремам об отсутствии сингулярного спектра (см. теоремы XIII.26 и XIII.28).

Этот раздел состоит из двух частей. В первой мы построим абстрактную теорию гладких операторов, а во второй применим эту теорию к различным операторам Шредингера. Первые два применения относятся к случаю, когда волновые операторы унитарны, т. е. когда H и H_0 унитарно эквивалентны. Это операторы Шредингера вида $H_0+\lambda V$, когда λ мало либо V — потенциал отталкивания. В этом последнем случае теория гладких возмущений приведет лишь к доказательству того, что H обладает только абсолютно непрерывным спектром. В последнем из рассмотренных в этом разделе приложений будет установлено существование волновых операторов для случая потенциалов отталкивания в некоторых предположениях относительно убывания на бесконечности; для этого будет построено некое обобщение понятия H-гладкости. Часть этой обобщенной теории сыграет свою роль в следующем разделе.

Одна из наших первых основных задач — дать ряд эквивалентных формулировок свойства H-гладкости. Нам потребуется следующая векторнозначная версия теоремы Планшереля.

Лемма 1. Пусть $\varphi(\cdot)$ — (слабо измеримая) функция из $\mathbb{R}$ в сепарабельное гильбертово пространство $\mathscr{H}$. Предположим, что $\int\|\varphi(x)\|\,dx<\infty$. Определим $\hat{\varphi}$: $\mathbb{R}\to\mathscr{H}$ посредством равенства

$$\hat{\varphi}(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\varphi(x)\,dx$$

(где в соответствии с нашим обычным соглашением интеграл понимается как слабый интеграл). Пусть A — замкнутый оператор, определенный в $\mathscr{H}$. Тогда

$$\int\|A\hat{\varphi}(p)\|^2\,dp=\int\|A\varphi(x)\|^2\,dx, \tag{32}$$

где интегралы полагаются равными бесконечности, если $\hat{\varphi}(p)$ (соответственно $\varphi(x)$) не лежит в $D(A)$ почти всюду.

Доказательство. Предположим сначала, что A ограничен. Тогда для любого $\psi\in\mathscr{H}$ равенство $(\psi,\ A\hat{\varphi}(p))=(A^*\psi,\ \hat{\varphi}(p))$ есть (обычное) преобразование Фурье от $(A^*\psi,\ \varphi(x))=(\psi,\ A\varphi(x))$, так что по теореме Планшереля

$$\int|(\psi,\ A\hat{\varphi}(p))|^2\,dp=\int|(\psi,\ A\varphi(x))|^2\,dx.$$

Формула (32) следует отсюда суммированием по вектору ψ, пробегающему ортонормированный базис. Пусть, далее, A самосопряжен и $\{E_\Omega\}$ — семейство его спектральных проекторов. Тогда произведение $AE_{(-a,\,a)}$ ограничено, так что

$$\int \| AE_{(-a,\,a)}\hat{\varphi}(p)\|^2\,dp = \int \| AE_{(-a,\,a)}\varphi(x)\|^2\,dx.$$

Предположим, что один из интегралов в (32) конечен; без потери общности можно считать, что конечен правый. Тогда $\varphi(x)\in D(A)$ почти всюду по x, так что $\| AE_{(-a,\,a)}\varphi(x)\|^2$ монотонно стремится к $\| A\varphi(x)\|^2$ при $a\to\infty$. Итак,

$$\int \lim_{a\to\infty}\| AE_{(-a,\,a)}\hat{\varphi}(p)\|^2\,dp = \int \| A\varphi(x)\|^2\,dx < \infty.$$

В частности, $\lim\limits_{a\to\infty}\| AE_{(-a,\,a)}\hat{\varphi}(p)\|^2 < \infty$ почти всюду по p. Отсюда следует, что $\hat{\varphi}(p)\in D(A)$ п. в., и справедливо (32). Пусть, наконец, A — произвольный замкнутый оператор. По теореме VIII.32, существует самосопряженный оператор $|A|$, такой, что $D(|A|) = D(A)$ и $\||A|\psi\| = \|A\psi\|$. Таким образом, теперь (32) следует из случая, когда A самосопряжен. ∎

Пример 1. Пусть $H = -i\,d/dx$ в $L^2(\mathbb{R})$, так что $(e^{-iHt}\varphi)(x) = \varphi(x-t)$. Пусть g лежит в $L^2(\mathbb{R})$, и пусть A — оператор умножения на g. С помощью замены переменных получаем, что $\int |g(x)\varphi(x-t)|^2\,dx\,dt = \|g\|_2^2\,\|\varphi\|_2^2$, так что по теореме Фубини для любого $\varphi\in L^2$ и почти всех t имеем $e^{-iHt}\varphi\in D(A)$ и $\int_{-\infty}^{\infty}\| Ae^{-iHt}\varphi\|^2\,dt = \|g\|_2^2\,\|\varphi\|_2^2$. Фиксируем $\varepsilon > 0$; тогда

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon t}e^{i\lambda t}e^{-iHt}\varphi\,dt = -iR(\lambda+i\varepsilon)\varphi.$$

Итак, по лемме

$$\int_{-\infty}^{\infty}\| AR(\lambda+i\varepsilon)\varphi\|^2\,d\lambda = 2\pi\int_0^\infty e^{-2\varepsilon t}\| Ae^{-itH}\varphi\|^2\,dt.$$

Применяя аналогичное вычисление для $\lambda - i\varepsilon$, видим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\| AR(\lambda+i\varepsilon)\varphi\|^2 + \| AR(\lambda-i\varepsilon)\varphi\|^2)\,d\lambda =$$
$$= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\varepsilon|t|}\| Ae^{-itH}\varphi\|^2\,dt. \qquad (33)$$

Из равенства (33) и оценки интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \| Ae^{-iHt}\varphi \|^2 dt$ следует, что g есть H-гладкий оператор и $\| g \|_H = (2\pi)^{-1/2} \| g \|_2$.

Пример 2. Пусть H — произвольный самосопряженный оператор, и пусть $A = I$ — тождественный оператор. Мы снова пользуемся леммой 1 и заключаем, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \| R(\lambda + i\varepsilon)\varphi \|^2 d\lambda = 2\pi \int\limits_{0}^{\infty} e^{-2\varepsilon t} \| e^{-itH}\varphi \|^2 dt = \pi\varepsilon^{-1} \| \varphi \|^2, \qquad (34)$$

так что $\sup\limits_{\varepsilon>0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \| R(\lambda + i\varepsilon)\varphi \|^2 d\lambda = \infty$ для любого $\varphi \neq 0$. Итак, I не есть H-гладкий оператор.

Одна из эквивалентных формулировок свойства H-гладкости дается в терминах унитарной группы e^{itH}. Как немедленное следствие равенства (33) получается

Лемма 2. Оператор A H-гладкий тогда и только тогда, когда для всех $\varphi \in \mathscr{H}$ имеем $e^{itH}\varphi \in D(A)$ для почти всех $t \in \mathbb{R}$, причем для некоторой константы C

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \| Ae^{-iHt}\varphi \|^2 dt \leqslant C \| \varphi \|^2.$$

C может быть выбрана равной $2\pi \| A \|_H^2$, но не меньше.

Эта лемма имеет ряд важных следствий.

Теорема XIII.22. Если оператор A H-гладкий, то он H-ограничен с нулевой относительной гранью.

Доказательство. Пусть $\psi \in D(A^*)$. По резольвентной формуле

$$-i(A^*\psi,\ R(\lambda + i\varepsilon)\varphi) = \int\limits_{0}^{\infty} (A^*\psi,\ e^{-iHt}\varphi)\, e^{i\lambda t} e^{-\varepsilon t}\, dt.$$

Итак, в силу неравенства Шварца и леммы 2,

$$|(A^*\psi, R(\lambda + i\varepsilon)\varphi)|^2 \leqslant \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{0}^{\infty} |(A^*\psi,\ e^{-iHt}\varphi)|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\varepsilon} \| \psi \|^2 \int\limits_{0}^{\infty} \| Ae^{-iHt}\varphi \|^2 dt \leqslant \frac{\pi}{\varepsilon} \| A \|_H^2 \| \psi \|^2 \| \varphi \|^2.$$

Таким образом, $R(\lambda+i\varepsilon)\varphi\in D(A^{**})=D(A)$ и $\|AR(\lambda+i\varepsilon)\|^2\leqslant$ $\leqslant(\pi/\varepsilon)\|A\|_H^2$. Отсюда получаем, что $D(H)\subset D(A)$ и для $\psi\in D(H)$

$$\|A\psi\|\leqslant\pi^{1/2}\|A\|_H(\varepsilon^{-1/2}\|H\psi\|+\varepsilon^{1/2}\|\psi\|).$$

Поскольку ε произвольно, теорема доказана. ∎

Усиление теоремы XIII.22 приведено в задаче 49.

Теорема XIII.23. Если A является H-гладким, то $\overline{\operatorname{Ran}(A^*)}\subset$ $\subset\mathcal{H}_{ac}(H)$.

Доказательство. Поскольку множество $\mathcal{H}_{ac}(H)$ замкнуто, достаточно доказать лишь включение $\operatorname{Ran}(A^*)\subset\mathcal{H}_{ac}(H)$. Пусть $\varphi\in D(A^*)$, $\psi=A^*\varphi$, и пусть $d\mu_\psi$ — спектральная мера оператора H, ассоциированная с ψ. Введем

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-itx}\,d\mu_\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(A^*\varphi,\ e^{-itH}\psi).$$

Тогда $|F(t)|\leqslant(2\pi)^{-1/2}\|\varphi\|\|Ae^{-itH}\psi\|$, так что, по лемме 2, $F\in$ $\in L^2(\mathbb{R})$. По теореме Планшереля, и $\check{F}\in L^2$, а потому мера $d\mu_\psi=$ $=\check{F}\,dx$ абсолютно непрерывна по отношению к мере Лебега. ∎

Поучительным упражнением является доказательство теоремы XIII.23, опирающееся на теорему XIII.20 и непосредственное определение H-гладкости. См. также условие (5) приведенной ниже теоремы XIII.25. Лемма 2 ведет к важным следствиям в теории рассеяния.

Теорема XIII.24. Пусть H и H_0 — самосопряженные операторы. Предположим, что $H=H_0+\sum\limits_{i=0}^{n}A_i^*B_i$ в следующем смысле:

(1) $D(H)\subset D(A_i)$; $D(H_0)\subset D(B_i)$; $i=1,\ \dots,\ n$;

(2) если $\varphi\in D(H)$ и $\psi\in D(H_0)$, то

$$(H\varphi,\ \psi)=(\varphi,\ H_0\psi)+\sum_{i=1}^{n}(A_i\varphi,\ B_i\psi). \tag{35}$$

Если каждый A_i H-гладкий, а каждый B_i H_0-гладкий, то волновые операторы $\operatorname*{s-lim}\limits_{t\to\mp\infty}e^{iHt}e^{-iH_0t}$ существуют и унитарны.

Доказательство. Положим сначала $n=1$. Пусть $\varphi\in D(H_0)$, $w(t)=e^{iHt}e^{-iH_0t}\varphi$ и $\psi\in D(H)$. Тогда функция $(\psi,\ w(t))$ дифференцируема и

$$\frac{d}{dt}(\psi,\ w(t))=i(Ae^{-iHt}\psi,\ Be^{-iH_0t}\varphi).$$

Поэтому если $t > s$, то

$$|(\psi,\ w(t)-w(s))| = \int_s^t |(Ae^{-i\tau H}\psi,\ Be^{-iH_0\tau}\varphi)|\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|Ae^{-i\tau H}\psi\|^2\,d\tau\right)^{1/2}\left(\int_s^t \|Be^{-iH_0\tau}\varphi\|^2\,d\tau\right)^{1/2}.$$

Поскольку ψ — произвольный элемент $D(H)$, то

$$\|w(t)-w(s)\| \leqslant \sqrt{2\pi}\,\|A\|_H\left(\int_s^t \|Be^{-iH_0\tau}\varphi\|^2\,d\tau\right)^{1/2}.$$

Так как подынтегральная функция в правой части принадлежит $L^1(\mathbb{R})$, то эта последняя оценка показывает, что направленность $w(s)$ при $s \to +\infty$ или $s \to -\infty$ есть направленность Коши. Следовательно, пределы существуют на плотном в $\mathscr{H}$ подмножестве, а потому и на всех $\mathscr{H}$. Поскольку в силу симметрии $H_0 = H - B^*A$, то пределы $\text{s-lim}\, e^{iH_0t}e^{-iHt}$ существуют, а потому и унитарны. Доказательство для $n > 1$ аналогично. ∎

Отметим, что предельный оператор из теоремы XIII.24 *не содержит* $P_{\text{ac}}(H_0)$ (см. для сравнения § XI.3). Поэтому если $H_0\psi = E\psi$, то $H\psi = E\psi$. Это следует непосредственно из предположений, так как условие $\text{Ran}(B^*) \subset \mathscr{H}_{\text{ac}}(H_0)$ влечет за собой $\mathscr{H}_{\text{pp}}(H_0) \subset \text{Ker}(B)$, откуда в свою очередь $H\psi = H_0\psi$.

В качестве заключительного результата общей теории докажем эквивалентность различных форм гладкости.

Теорема XIII.25. Пусть A — замкнутый оператор, а H самосопряженный. Тогда следующие условия эквивалентны:

(0) A H-гладкий;

(1) для всех $\varphi \in \mathscr{H}$ при почти всех t имеем $e^{-itH}\varphi \in D(A)$ и

$$c_1 = \sup_{\|\varphi\|=1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \|Ae^{-itH}\varphi\|^2\,dt < \infty;$$

(2) $D(H) \subset D(A)$ и

$$c_2 = \sup_{\substack{\|\varphi\|=1 \\ -\infty < a < b < \infty}} \frac{\|AE_{(a,\,b]}\varphi\|^2}{|b-a|} < \infty,$$

где E_Ω — спектральное семейство для H;

(3) $$c_3 = \sup_{\substack{\|\varphi\|=1;\ \varphi\in D(A^*) \\ -\infty < a < b < \infty}} \frac{\|E_{(a,\,b]}A^*\varphi\|^2}{|b-a|} < \infty;$$

(4) $c_4 = \frac{1}{2\pi} \sup\limits_{\substack{\mu \notin \mathbb{R};\ \varphi \in D(A^*) \\ \|\varphi\|=1}} |(A^*\varphi,\ [R(\mu) - R(\bar{\mu})]\, A^*\varphi)| < \infty;$

(5) $c_5 = \frac{1}{\pi} \sup\limits_{\substack{\mu \notin \mathbb{R};\ \varphi \in D(A^*) \\ \|\varphi\|=1}} \|R(\mu) A^*\varphi\|^2 |\operatorname{Im}\mu| < \infty;$

(6) $D(H) \subset D(A)$ и

$$c_6 = \frac{1}{\pi} \sup_{\mu \notin \mathbb{R},\ \|\varphi\|=1} \|AR(\mu)\varphi\|^2 |\operatorname{Im}\mu| < \infty;$$

(7) $D(H) \subset D(A)$ и

$$c_7 = \frac{1}{\pi} \sup_{\mu \notin \mathbb{R},\ \|\varphi\|=1} (\|AR(\mu)\varphi\|^2 + \|AR(\bar{\mu})\varphi\|^2) |\operatorname{Im}\mu| < \infty.$$

Кроме того, если некоторые (а тогда и все) константы $c_1, \ldots, c_7$ конечны, то все они равны $\|A\|_H^2$.

Прежде чем доказывать эту теорему, заметим, что в пунктах (5) и (6) sup по $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ можно заменить на sup по $0 < \operatorname{Im}\mu < \alpha$ для любого $\alpha > 0$. В исходном определении можно условие $\varepsilon > 0$ заменить на $0 < \varepsilon < \alpha$. Это прямо следует из доказательства теоремы, если заметить, что (в силу (33)) выражение в (31) монотонно возрастает при убывании ε.

Следующее утверждение, содержащее условие более сильное, чем гладкость, вытекает из п. (4).

Следствие. Если $AR(\mu)A^*$ ограничено для каждого $\mu \notin \mathbb{R}$ в том смысле, что

$$\sup_{\substack{\psi,\ \varphi \in D(A^*) \\ \|\psi\| = \|\varphi\| = 1}} |(A^*\varphi,\ R(\mu)A^*\psi)| < \infty \quad \text{и} \quad \Gamma \equiv \sup_{\mu \notin \mathbb{R}} \|AR(\mu)A^*\| < \infty,$$

то A H-гладкий и $\|A\|_H \leqslant \Gamma/\pi$.

Доказательство теоремы XIII.25. Заметим сначала, что для любого замкнутого оператора A, любого ограниченного оператора B и любых $\varphi \in D(A)$ и $\psi \in \mathcal{H}$ имеем

$$(\psi,\ BA\varphi) = (B^*\psi,\ A\varphi).$$

Это означает, что оценка $\|BA\varphi\| \leqslant c\|\varphi\|$ выполняется для всех $\varphi \in D(A)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ran} B^* \subset D(A^*)$ и $\|A^*B^*\| \leqslant c$. Как следствие получаем: $c_2 = c_3$ и $c_5 = c_6$. Более того, поскольку $(A^*\varphi,\ [R(\mu) - R(\bar{\mu})]\, A^*\varphi) = 2\operatorname{Im}\mu \|R(\mu)A^*\varphi\|^2$, то $c_5 = c_4$. Далее, $c_0 = c_1$ в силу леммы 2. Итак, мы должны доказать лишь, что $c_0 = c_3 = c_4 = c_7$, где $c_0 \equiv \|A\|_H^2$. Мы покажем, что

$$c_0 \leqslant c_4 \leqslant c_3 \leqslant c_0 \quad \text{и} \quad c_3 \leqslant c_7 \leqslant c_1.$$

$c_0 \leqslant c_4$. $(2\pi i)^{-1}[R(\mu)-R(\bar\mu)]=\pi^{-1}(\operatorname{Im}\mu)R(\bar\mu)R(\mu)\geqslant 0$, если $\operatorname{Im}\mu>0$. Пусть $K(\mu)$ — положительный квадратный корень из этой величины. По определению c_4 имеем $\|K(\mu)A^*\varphi\|^2\leqslant c_4\|\varphi\|^2$, если $\varphi\in D(A^*)$. Итак, если $c_4<\infty$, то из сделанного выше замечания следует, что $\operatorname{Ran}K(\mu)\subset D(A)$ и $\|AK(\mu)\|^2\leqslant c_4$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|A[R(\lambda+i\varepsilon)-R(\lambda-i\varepsilon)]\varphi\|^2\,d\lambda=$$

$$=4\pi^2\int_{-\infty}^{\infty}\|AK(\lambda+i\varepsilon)K(\lambda+i\varepsilon)\varphi\|^2\,d\lambda\leqslant 4\pi^2c_4\int_{-\infty}^{\infty}\|K(\lambda+i\varepsilon)\varphi\|^2\,d\lambda=$$

$$=4\pi^2c_4\,\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi,\ [R(\lambda+i\varepsilon)-R(\lambda-i\varepsilon)]\varphi)\,d\lambda=4\pi^2c_4\|\varphi\|^2,$$

ибо, пользуясь спектральной мерой $d\mu_\varphi$ оператора H, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi,\ [R(\lambda+i\varepsilon)-R(\lambda-i\varepsilon)]\varphi)\,d\lambda=$$

$$=\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-\lambda)^2+\varepsilon^2}\,d\mu_\varphi(x)\,d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}d\mu_\varphi(x)=\|\varphi\|^2.$$

Далее,

$$[R(\lambda+i\varepsilon)-R(\lambda-i\varepsilon)]\varphi=i\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\varepsilon|t|}e^{i\lambda t}e^{-iHt}\varphi\,dt,$$

так что по лемме 1

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|A[R(\lambda+i\varepsilon)-R(\lambda-i\varepsilon)]\varphi\|^2\,d\lambda=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\varepsilon|t|}\|Ae^{-iHt}\varphi\|^2\,dt, \tag{36}$$

т. е. $c_0=c_1\leqslant c_4$.

$c_4\leqslant c_3$. Пусть $\varphi\in D(A^*)$, и пусть $d\mu_{A^*\varphi}$ — спектральная мера оператора H, ассоциированная с вектором $A^*\varphi$. Тогда в силу определения c_3 (см. п. (3))

$$d\mu_{A^*\varphi}(a,\ b]\leqslant c_3|b-a|\|\varphi\|^2.$$

Если I — произвольное борелево множество, обозначим через $|I|$ его лебегову меру. Тогда $d\mu_{A^*\varphi}(I)\leqslant c_3|I|\|\varphi\|^2$ для любого I, поскольку это справедливо для открытых множеств, а тогда, в силу внешней регулярности меры, и для произвольных множеств. Поэтому мера $d\mu_{A^*\varphi}$ абсолютно непрерывна относительно dx и производная Радона — Никодима $g(x)$ удовлетворяет оценке $\|g\|_\infty\leqslant$

$\leqslant c_3 \|\varphi\|^2$. Итак, если $\mu = \lambda + i\varepsilon$, то

$$|(A^*\varphi, [R(\mu) - R(\bar{\mu})] A^*\varphi)| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2|\varepsilon|}{(x-\lambda)^2+\varepsilon^2} g(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2|\varepsilon|}{(x-\lambda)^2+\varepsilon^2} dx \leqslant c_3 (2\pi) \|\varphi\|^2.$$

Это и означает, что $c_4 \leqslant c_3$.

$c_3 \leqslant c_0$. Пусть $\varphi \in D(A^*)$. Предположим, что a и b не являются собственными значениями оператора H. По формуле Стоуна

$$|(A^*\varphi, E_{(a,b]}\psi)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left| \int_a^b (A^*\varphi, [R(\lambda+i\varepsilon) - R(\lambda - i\varepsilon)]\psi)\, d\lambda \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\pi^2} \|\varphi\|^2 |b-a| \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|A[R(\lambda+i\varepsilon) - R(\lambda - i\varepsilon)]\psi\|^2 d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant |b-a| \|A\|_H^2 \|\varphi\|^2 \|\psi\|^2.$$

Последний шаг здесь сделан на основе равенства (36). Если a, или b, или и a, и b — собственные значения, то $a+\delta$ и $b+\delta$ не являются собственными значениями при почти всех достаточно малых δ, а тогда $E_{(a,b]} = \text{s-}\lim_{\delta \to 0} E_{(a+\delta, b+\delta]}$, так что $c_3 \leqslant c_0$.

$c_3 \leqslant c_7$. Уже известно, что $c_3 = c_6$, а неравенство $c_6 \leqslant c_7$ очевидно.

$c_7 \leqslant c_1$. Здесь по существу повторяется прием, примененный в доказательстве теоремы XIII.22. Действительно, там мы имели

$$|(A^*\psi, R(\lambda+i\varepsilon)\varphi)|^2 \leqslant \frac{1}{2\varepsilon} \|\psi\|^2 \int_0^\infty \|Ae^{-iHt}\varphi\|^2 dt,$$

так что

$$\|AR(\lambda+i\varepsilon)\varphi\|^2 \leqslant \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\infty \|Ae^{-iHt}\varphi\|^2 dt.$$

Аналогичная выкладка для $R(\lambda - i\varepsilon)$ доказывает справедливость оценки

$$\|AR(\lambda+i\varepsilon)\varphi\|^2 + \|AR(\lambda-i\varepsilon)\varphi\|^2 \leqslant \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \|Ae^{-iHt}\varphi\|^2 dt.$$

Итак, $c_7 \leqslant c_1$. ∎

Заметим, что критерий (3) дает другое доказательство того, что $\operatorname{Ran}(A^*) \subset \mathcal{H}_{ac}(H)$, если A является H-гладким, а из критерия (6) вытекает теорема XIII.22. Равенство постоянных c_6 и c_7, на первый взгляд, очень загадочно. Отчасти эта загадочность проясняется, если обратиться к доказательству равенства, близкого к рассматриваемому:

$$\sup_{\substack{\varepsilon>0\\ \|\varphi\|=1}} \int_{-\infty}^{\infty} \|AR(\lambda+i\varepsilon)\varphi\|^2\,d\lambda =$$

$$= \sup_{\substack{\varepsilon>0\\ \|\varphi\|=1}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\|AR(\lambda+i\varepsilon)\varphi\|^2 + \|AR(\lambda-i\varepsilon)\varphi\|^2)\,d\lambda \right\}.$$

В силу (33) это равенство эквивалентно следующему:

$$\sup_{\|\varphi\|=1} \int_0^{\infty} \|Ae^{-itH}\varphi\|^2\,dt = \sup_{\|\varphi\|=1} \int_{-\infty}^{\infty} \|Ae^{-itH}\varphi\|^2\,dt,$$

а это последнее вытекает из того, что если $\varphi_s = e^{-isH}\varphi$, то

$$\int_0^{\infty} \|Ae^{-itH}\varphi_s\|^2\,dt = \int_s^{\infty} \|Ae^{-itH}\varphi\|^2\,dt$$

сходится к $\int_{-\infty}^{\infty} \|Ae^{-itH}\varphi\|^2\,dt$ при $s \to -\infty$.

Прежде чем обратиться к приложениям, приведем еще два примера гладких операторов.

Пример 3. Пусть $H_0 = -\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$, и пусть A — умножение на функцию V из класса потенциалов Рольника R. В силу оценки

$$\||V|^{1/2}(H_0-\lambda)^{-1}|V|^{1/2}\|_{\text{oper}} \leqslant \||V|^{1/2}(H_0-\lambda)^{-1}|V|^{1/2}\|_2 \leqslant (4\pi)^{-1}\|V\|_R$$

и следствия теоремы XIII.25, оператор $|A|^{1/2}$ является H_0-гладким.

Пример 4. Пусть H — умножение на x в $L^2([\alpha, \beta], dx)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Пусть A — ограниченный оператор на $\mathscr{H}$, такой, что A^*A — интегральный оператор вида

$$(A^*A\psi)(x) = \int_{\alpha}^{\beta} K(x, y)\,\psi(y)\,dy, \tag{37}$$

причем $\|K\|_\infty \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{[\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta]} |K(x, y)| < \infty$. Тогда A H-гладкий и $\|A\|_H \leqslant \|K\|_\infty^{1/2}$. Действительно, пусть $(a, b]$ — произвольный интервал и φ — вектор с нормой 1. Тогда

$$\|AE(a,\ b]\varphi\|^2 = (\varphi,\ E(a,\ b]A^*AE(a,\ b]\varphi) =$$
$$= \int_a^b\int_a^b K(x,\ y)\overline{\varphi(x)}\varphi(y)\,dx\,dy \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_a^b\int_a^b |K(x,\ y)|^2\,dx\,dy\right)^{1/2}\left(\int_a^b\int_a^b |\overline{\varphi}(x)\varphi(y)|^2\,dx\,dy\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant |b-a|\,\|K\|_\infty\|\varphi\|^2.$$

В силу критерия (2), $\|A\|_H \leqslant \|K\|_\infty^{1/2}$. С помощью дальнейшего анализа (см. задачи 50, 51) можно показать, что для любого H-гладкого оператора A произведение A^*A имеет вид (37) и что $\|A\|_H = \|K\|_\infty^{1/2}$. В частности, отметим, что, как показывает предыдущее рассмотрение, любой интегральный оператор

$$(A\psi)(x) = \int_\alpha^\beta A(x,\ y)\,\psi(y)\,dy$$

с $\|A\|_\infty < \infty$ является H-гладким. Таким образом, мы нашли много H-гладких операторов и, в частности, H-гладкие операторы A с ядром $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Пример 1 также относится к этому случаю, хотя оператор H в этом примере и не ограничен. Действительно, если $f \in L^2$, то для оператора A, который есть умножение на f, A^*A — умножение на $g \equiv |f|^2 \in L^1$. Переходя к представлению, где диагонален оператор $-id/dx$ (посредством преобразования Фурье), получаем, что A^*A — интегральный оператор с ядром, равным $(2\pi)^{-1/2}\hat{g}(x-y) \in L^\infty$.

Теперь мы обратимся к различным приложениям.

А. Слабо взаимодействующие квантовые системы

Предположим, что H_0 — положительный самосопряженный оператор и что C самосопряжен. Если $|C|^{1/2}(H_0+I)^{-1}|C|^{1/2}$ — ограниченный оператор с гранью a, то для любого $\varphi \in D(|C|^{1/2})$ имеем $\|(H_0+I)^{-1/2}|C|^{1/2}\varphi\|^2 \leqslant a\|\varphi\|^2$, так что оператор $(H_0+I)^{-1/2}|C|^{1/2}$ ограничен. Переходя к сопряженным, получаем $Q(H_0) \subset Q(C)$ и $\||C|^{1/2}(H_0+I)^{-1/2}\|^2 \leqslant a$. Отсюда $(\varphi,\ |C|\varphi) \leqslant a(\varphi,\ (H_0+I)\varphi)$ для всех $\varphi \in Q(H_0)$. Итак, C H_0-ограничен в смысле форм, и если $a < 1$, то сумма $H = H_0 + C$ в смысле форм дает самосопряженный оператор. Для таких сумм в смысле форм имеет место следующая

Теорема XIII.26 (теорема Като о гладкости). Пусть H_0 — положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, и пусть $C_1, \ldots, C_n$ — самосопряженные операторы, причем

$$\alpha_{ij} \equiv \sup_{\mu \notin R} \| |C_i|^{1/2} (H_0-\mu)^{-1} |C_j|^{1/2} \| < \infty.$$

Предположим, что $\{\alpha_{ij}\}_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ — матрица оператора с нормой, меньшей 1, в $\mathbb{C}^n$ (снабженном естественной нормой гильбертова пространства). Тогда:

(a) сумма $H = H_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i$ в смысле форм есть замкнутая форма на $Q(H_0)$;

(b) волновые операторы $\operatorname{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t}$ существуют и унитарны.

В частности, H и H_0 — унитарно эквивалентные операторы.

Доказательство. Введем гильбертово пространство $\mathscr{H}' = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathscr{H}_i$, где каждое $\mathscr{H}_i$ — копия $\mathscr{H}$. В силу рассмотрения, предшествующего этой теореме, а также условия $\alpha_{ii} < \infty$, каждый $|C_i|$ ограничен относительно H_0 в смысле форм, так что $|C_i|^{1/2}$ определен как оператор из $Q(H_0)$ в $\mathscr{H}$. В итоге можно определить оператор B: $Q(H_0) \to \mathscr{H}'$ посредством $(B\psi)_i = |C_i|^{1/2} \psi$. Из условия теоремы вытекает, что

$$\alpha \equiv \sup_{\mu \notin R} \| B (H_0-\mu)^{-1} B^* \| < 1. \tag{38}$$

Пусть $B = U|B|$ — полярное разложение B. Тогда, поскольку $|B| = U^*B$ и U частично изометричен, из (38) следует, что $|B|(H_0+I)^{-1}|B|$ — ограниченный оператор с нормой, меньшей α. Опять же из построения, предшествующего теореме, следует, что

$$(\varphi, |B|^2 \varphi) \leqslant \alpha (\varphi, (H_0+I)\varphi),$$

или что

$$\left(\varphi, \sum_{i=1}^{n} |C_i| \varphi\right) \leqslant \alpha (\varphi, (H_0+I)\varphi). \tag{39}$$

Отсюда заключаем, что сумма $\sum_{i=1}^{n} C_i$ ограничена относительно H_0 в смысле форм с относительной гранью $\alpha < 1$, что доказывает (a).

Далее заметим, что для $\mu \notin [0, \infty)$

$$(H-\mu)^{-1} = (H_0-\mu)^{-1} -$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (H_0-\mu)^{-1} B^* W (B (H_0-\mu)^{-1} B^* W)^n B (H_0-\mu)^{-1}, \tag{40}$$

где оператор W: $\mathscr{H}' - \mathscr{H}'$ определен равенством $(W\varphi)_i = (\operatorname{sgn} C_i) \varphi_i$. Равенство (40) справедливо, поскольку сумма сходится в силу

(38), и, как можно проверить, на языке квадратичных форм (§ VIII.6) правая часть задает отображение $\mathscr{H}_{-1}$ в $\mathscr{H}_{+1}$, являющееся обратным к $(H-\mu)$: $\mathscr{H}_{+1} \to \mathscr{H}_{-1}$. Из (40) легко видеть, что

$$\sup_{\mu \notin \mathbb{R}} \| B(H-\mu)^{-1} B^* \| \leqslant \alpha (1-\alpha)^{-1}, \tag{41}$$

поэтому каждый $|C_i|^{1/2}$ и $C_i^{1/2} \equiv |C_i|^{1/2} \operatorname{sgn} C_i$ является H-гладким в силу следствия теоремы XIII.25. Аналогично, в силу основных предположений и этого же следствия, каждый $|C_i|^{1/2}$ H_0-гладкий. Итак, по теореме XIII.24, и $\operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t}$, и $\operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{iH_0 t} e^{-iHt}$ существуют. Эти отображения изометричны и обратны друг другу. Это доказывает (b). ∎

В качестве приложения этой теоремы читателю следует доказать усиленную версию теоремы XIII.21, сформулированную в задаче 56. Если нет желания возиться с подробными оценками, то часто полезно применять теорему Като о гладкости в следующей форме.

Следствие. Пусть H_0 самосопряжен и положителен. Пусть $C_1, \ldots, C_n$ самосопряжены, и пусть $C = \sum_{i=1}^{n} C_i$. Предположим, что для каждых i и j

$$\sup_{\mu \notin \mathbb{R}} \| |C_i|^{1/2} (H_0 - \mu)^{-1} |C_j|^{1/2} \| < \infty.$$

Тогда существует такое $\Lambda > 0$, что для всех $\lambda \in (-\Lambda, \Lambda)$

(a) $H(\lambda) = H_0 + \lambda C$ — замкнутая форма на $Q(H_0)$;

(b) волновые операторы $\Omega_\lambda^\pm = \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{itH(\lambda)} e^{-itH_0}$ существуют и унитарны.

В действительности можно доказать, что $\Omega_\lambda^\pm$ аналитичны по λ (см. Замечания и задачи 53, 54). Теперь для нас не составит труда исследование шредингеровых операторов N слабо взаимодействующих частиц.

Теорема XIII.27 (теорема Иорио—О'Кэррола). Пусть $m \geqslant 3$, $N \geqslant 2$. Пусть

$$\tilde{H}_0 = \sum_{i=1}^{N} (-2\mu_i)^{-1} \Delta_i$$

— оператор в $L^2(\mathbb{R}^{Nm})$, причем каждое $\mu_i > 0$, а $r \in \mathbb{R}^{Nm}$ записывается в виде $r = \langle r_1, \ldots, r_N \rangle$, $r_i \in \mathbb{R}^m$. Пусть H_0 — оператор $\tilde{H}_0$

с отделенным движением центра масс (см. § XI.5). Пусть $V = \sum_{i<j} V_{ij}(r_i - r_j)$, где каждая функция $V_{ij} \in L^{m/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^m) \cap L^{m/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^m)$ для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$. Тогда для всех достаточно малых по модулю $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор $H_0 + \lambda V$ (определенный как сумма форм) унитарно эквивалентен оператору H_0. Эта эквивалентность обеспечивается волновыми операторами. В частности, $H_0 + \lambda V$ не имеет ни связанных состояний, ни сингулярного спектра и обладает волновыми операторами, которые полны.

Прежде чем доказывать теорему Иорио—О'Кэррола, сделаем несколько замечаний. Во-первых, движение центра масс отделяется исключительно для согласования с понятиями квантовой теории N частиц. Во-вторых, заметим, что понятие суммы в смысле форм необходимо только при $m=3$. При $m \geqslant 4$ по теореме X.20 операторная сумма $H_0 + \lambda V$ самосопряжена на $C_0^\infty(\mathbb{R}^{m(N-1)})$, если λ вещественно. В-третьих, отметим, что по теореме XIII.11 при $m=1$ или 2 теорема о слабом взаимодействии не имеет места, однако справедлив некоторый результат, относящийся к $L^2([0, \infty))$ (задача 58). Наконец, условия на V_{ij} не могут быть заметно ослаблены, так как если V_{ij} обладает локальными особенностями в конечных точках, выводящими его из $L^{m/2}$ (например, поведением $r^{-2-\varepsilon}$ при $r=0$), то утрачивается самосопряженность, а если V_{ij} выходит из $L^{m/2}$ на бесконечности (например, убывает лишь как $r^{-2+\varepsilon}$), то может оказаться, что $H_0 + \lambda V$ имеет связанные состояния при любом сколь угодно малом λ (см. теорему XIII.6).

Доказательство теоремы XIII.27. Рассмотрим сначала случай $N=2$. Тогда $H_0 = (-2\nu)^{-1}\Delta$ действует в $L^2(\mathbb{R}^m)$, так что по теореме IX.30

$$\|e^{-iH_0t}\varphi\|_r \leqslant (ct)^{-m[1/2-r^{-1}]}\|\varphi\|_{r'}, \tag{42}$$

где $2 \leqslant r \leqslant \infty$, $r^{-1} + r'^{-1} = 1$ и константа c выбрана подходящим образом. Итак, если $f \in L^p$ и $p > 2$, то по неравенствам Гёльдера и (42)

$$\|fe^{-iH_0t}f\varphi\|_2 \leqslant (ct)^{-mp^{-1}}\|f\|_p^2\|\varphi\|_2. \tag{43}$$

Итак, если $f \in L^{m-\varepsilon} \cap L^{m+\varepsilon}$ (и $m > 2+\varepsilon$), то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|fe^{-iH_0t}f\varphi\|_2\,dt \leqslant d\,(\|f\|_{m+\varepsilon} + \|f\|_{m-\varepsilon})^2\,\|\varphi\|_2$$

с подходящей константой d. Поскольку

$$f(H_0 - z)^{-1}f\varphi = i\int_0^\infty e^{izt}(fe^{-iH_0t}f)\,\varphi\,dt,$$

если $\operatorname{Im} z > 0$, заключаем, что при $\operatorname{Im} z > 0$

$$\|f(H_0 - z)^{-1} f\varphi\|_2 \leqslant d(\|f\|_{m+\varepsilon} + \|f\|_{m-\varepsilon})^2 \|\varphi\|_2.$$

Аналогичное рассуждение справедливо при $\operatorname{Im} z < 0$. Полагая $f = |V|^{1/2}$, находим, что

$$\sup_{z \notin \mathbb{R}} \| |V|^{1/2} (H_0 - z)^{-1} |V|^{1/2} \| < \infty.$$

Тогда доказываемая теорема (для случая $N = 2$) вытекает из следствия теоремы XIII.26.

Чтобы доказать теорему в общем случае, следует показать лишь, что

$$\sup_{z \notin \mathbb{R}} \| |V_{ij}|^{1/2} (H_0 - z)^{-1} |V_{kl}|^{1/2} \| < \infty$$

для всех i, j, k, l, и применить следствие теоремы XIII.26. Необходимо рассмотреть три различных случая.

Случай 1: $(ij) = (kl)$. Без потери общности предположим, что $i = k = 1$ и $j = l = 2$. Пусть $H_0^{(12)} = (-2\mu_{12})^{-1} \Delta_{12}$, где $\mu_{12}^{-1} = \mu_1^{-1} + \mu_2^{-1}$ и Δ_{12} — лапласиан по переменной r_{12} в якобиевой системе координат (см. § XI.5). Итак, разность $H_0 - H_0^{(12)}$ зависит только от остальных якобиевых координат $\zeta_2, \ldots, \zeta_{N-1}$, а потому коммутирует с любой функцией от $\zeta_1 = r_2 - r_1$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$ и f_1 — умножение на $f(\zeta_1)$, то

$$\|f_1 e^{-itH_0} f_1 \varphi\|_2 = \left\| f_1 e^{-itH_0^{(12)}} f_1 \varphi \right\|_2. \tag{44}$$

Пусть $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{m(N-1)})$. По основной двухчастичной оценке (43) имеем

$$\int \left| f_1 \left(e^{-itH_0^{(12)}} f_1 \varphi \right) (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{N-1}) \right|^2 d\zeta_1 \leqslant$$
$$\leqslant (ct)^{-2mp^{-1}} \|f\|_p^4 \int |\varphi(\zeta)|^2 d\zeta_1.$$

Интегрируя по $\zeta_2, \ldots, \zeta_{N-1}$ и используя (44), мы видим, что (43) продолжает выполняться. Итак, действуя аналогично доказательству в двухчастичном случае, получаем

$$\sup_{z \notin \mathbb{R}} \| |V_{12}|^{1/2} (H_0 - z)^{-1} |V_{12}|^{1/2} \| < \infty.$$

Случай 2: $j = k$; i, j, l различны. Без потери общности предположим, что $i = 1$, $j = k = 2$, $l = 3$. Опять воспользуемся якобиевыми координатами с $\zeta_1 = r_2 - r_1$ и $r_{23} = \alpha\zeta_1 + \beta\zeta_2$ (где α, $\beta \neq 0$). Поскольку разность $H_0 - H_0^{(12)}$ коммутирует с функциями от ζ_1, то

$$\| |V_{12}|^{1/2} e^{-itH_0} |V_{23}|^{1/2} \varphi \| = \left\| |V_{12}|^{1/2} e^{-itH_0^{(12)}} |V_{23}|^{1/2} \varphi \right\|.$$

Фиксируем $\zeta' \equiv \langle\zeta_2, \ldots, \zeta_{N-1}\rangle$, и пусть $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{m(N-1)})$. Тогда, в силу основной двухчастичной оценки (43),

$$\int |V_{12}(\zeta_1)| \left| e^{-itH_0^{(12)}} V_{23}^{1/2}(\alpha\zeta_1 - \beta\zeta_2)\varphi(\zeta_1, \zeta')\right|^2 d\zeta_1 \leqslant$$
$$\leqslant (ct)^{-2mp^{-1}} \|V_{12}\|_{p/2} \|V_{23}\|_{p/2}\, \alpha^{-2m/p} \int |\varphi(\zeta)|^2 d\zeta_1,$$

где мы воспользовались тем, что

$$\int |V_{23}(\alpha\zeta_1 - \beta\zeta_2)|^{p/2} d\zeta_1 = \alpha^{-1} \int |V_{23}(x)|^{p/2} dx$$

независимо от ζ_2. Интегрируя по ζ', находим, что

$$\| |V_{12}|^{1/2} e^{-itH_0^{(12)}} |V_{23}|^{1/2} \varphi\|_2^2 \leqslant \alpha^{-2/p} (ct)^{-2mp^{-1}} \|V_{12}\|_{p/2} \|V_{23}\|_{p/2} \|\varphi\|_2^2.$$

Из этой оценки следует, что

$$\sup_{z \notin \mathbb{R}} \| |V_{12}|^{1/2} (H_0 - z)^{-1} |V_{23}|^{1/2} \| < \infty,$$

как и в двухчастичном случае.

Случай 3: i, j, k, l все различны. Без потери общности предположим, что $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$, $l = 4$. Тогда

$$|(\varphi, |V_{12}|^{1/2} e^{-itH_0} |V_{34}|^{1/2} \psi)| =$$
$$= |(e^{itH_0^{(34)}} \varphi, |V_{12}|^{1/2} e^{-it(H_0 - H_0^{(34)})} |V_{34}|^{1/2} \psi)| =$$
$$= |(|V_{34}|^{1/2} e^{itH_0^{(34)}} \varphi, |V_{12}|^{1/2} e^{-it(H_0 - H_0^{(34)})} \psi)| \leqslant$$
$$\leqslant \| |V_{34}|^{1/2} e^{itH_0^{(34)}} \varphi\| \| |V_{12}|^{1/2} e^{-itH_0^{(12)}} \psi\|.$$

На первом шаге мы воспользовались тем, что $|V_{12}|^{1/2}$ и $H_0^{(34)}$ коммутируют, на втором шаге — тем, что $|V_{34}|^{1/2}$ коммутирует с $H_0 - H_0^{(34)}$ и $|V_{12}|^{1/2}$, а на последнем — тем, что коммутируют $|V_{12}|^{1/2}$ и $H_0 - H_0^{(34)} - H_0^{(12)}$. В силу критерия (1) и следствия теоремы XIII.25, оператор $|V_{ij}|^{1/2}$ $H_0^{(ij)}$-гладкий. Итак

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| |V_{34}|^{1/2} e^{+itH_0^{(34)}} \varphi\| \| |V_{12}|^{1/2} e^{-itH_0^{(12)}} \psi\| dt \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} \| |V_{34}|^{1/2} e^{itH_0^{(34)}} \varphi\|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \| |V_{12}|^{1/2} e^{-itH_0^{(12)}} \psi\|^2 dt \right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \| |V_{34}|^{1/2} \|_{H_0^{(34)}} \| |V_{12}|^{1/2} \|_{H_0^{(12)}} \|\varphi\| \|\psi\|,$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(\varphi, |V_{12}|^{1/2} e^{-itH_0} |V_{34}|^{1/2} \psi)| dt \leqslant c \|\varphi\| \|\psi\|.$$

Поскольку при $\operatorname{Im} z > 0$

$$(\varphi, |V_{12}|^{1/2}(H_0 - z)^{-1}|V_{34}|^{1/2}\psi) = \\ = -i\int_0^\infty e^{izt}(\varphi, |V_{12}|^{1/2}e^{-iH_0t}|V_{23}|^{1/2}\psi)\,dt,$$

мы заключаем, что

$$\sup_{z\notin\mathbb{R}}\| |V_{12}|^{1/2}(H_0 - z)^{-1}|V_{34}|^{1/2}\| < \infty.$$

Это завершает доказательство случая 3. ∎

Если одна из частиц имеет бесконечную массу, то в случае 2 нельзя действовать так, как выше, поскольку $\alpha = 0$ при $\mu_2 = \infty$. В этой ситуации будет работать метод случая 3, и теорема остается справедливой.

B. Положительные коммутаторы и потенциалы отталкивания

В качестве второго приложения техники, основанной на понятии гладкости, мы разовьем метод, который позволит доказать, что гамильтонианы с потенциалами отталкивания имеют только абсолютно непрерывные спектры.

Теорема XIII.28 (теорема Путнама — Като). Пусть H и A — ограниченные самосопряженные операторы. Предположим, что оператор $C = i[H, A]$ положителен. Тогда $C^{1/2}$ H-гладкий. В частности, если $\operatorname{Ker} C = \{0\}$, то H имеет только абсолютно непрерывный спектр.

Доказательство. Второе утверждение следует из первого в силу теоремы XIII.23 и того факта, что $\operatorname{Ker}(C^{1/2}) = [\operatorname{Ran}(C^{1/2})]^\perp = \{0\}$. Непосредственное вычисление дает

$$\frac{d}{dt}e^{itH}Ae^{-itH}\varphi = ie^{itH}[H, A]e^{-itH}\varphi = e^{itH}Ce^{-itH}\varphi.$$

Таким образом,

$$\int_s^t (\varphi, e^{i\tau H}Ce^{-i\tau H}\varphi)\,d\tau = (\varphi, e^{itH}Ae^{-itH}\varphi) - (\varphi, e^{isH}Ae^{-isH}\varphi),$$

откуда

$$\int_s^t \|C^{1/2}e^{-i\tau H}\varphi\|^2\,d\tau \leqslant 2\|A\|\,\|\varphi\|^2.$$

Поскольку t и s произвольны, оператор $C^{1/2}$ H-гладкий и $\|C^{1/2}\|_H^2 \leqslant \|A\|/\pi$. ∎

Другой способ доказательства предложен в задаче 59.

Пример 5. Поскольку непосредственно построить операторы, коммутаторы которых положительны, не легко, мы приведем примеры, показывающие, что условия теоремы XIII.28 иногда выполняются. Действительно, имеет место утверждение, в каком-то смысле обратное к факту H-гладкости оператора $C^{1/2}$. Именно, если H — ограниченный, а B — произвольный ограниченный H-гладкий оператор, то существует ограниченный оператор A, такой, что $i[H, A]=B^*B$. Поскольку H-гладкие операторы с нулевым ядром в случае, когда H обладает лишь абсолютно непрерывным спектром, существуют (см. пример 4), то можно построить много пар H, A, для которых выполняются условия теоремы XIII.28. Докажем приведенное утверждение. Если B H-гладкий, то, следуя построению в доказательстве теоремы XIII.24, можно показать, что существует оператор $\Gamma_H^+(B^*B)\equiv \equiv \operatorname*{s-lim}_{s\to\infty} i\int_0^s e^{itH}B^*Be^{-itH}\,dt$. Далее,

$$[H, \Gamma_H^+(B^*B)]=\operatorname*{s-lim}_{s\to\infty} i\int_0^s e^{itH}[H, B^*B]e^{-itH}\,dt=$$
$$=\operatorname*{s-lim}_{s\to\infty}(e^{isH}B^*Be^{-isH}-B^*B)=-B^*B,$$

где мы воспользовались тем, что $e^{itH}B^*Be^{-itH}\varphi$ принадлежит L^2 вместе с равномерно ограниченной производной, откуда $\operatorname*{s-lim}_{s\to\infty}(e^{isH}B^*Be^{-isH})=0$ (задача 62). Полагая $A=i\Gamma_H^+(B^*B)$, видим, что $i[H, A]=B^*B$.

Мы хотим применить идею, основанную на положительных коммутаторах, для доказательства того, что N-частичные шредингеровы операторы с потенциалами отталкивания имеют только абсолютно непрерывный спектр. Потенциал отталкивания — это такая функция V на $\mathbb{R}^m$, что $V(r\hat{e})\leqslant V(r'\hat{e})$ для каждого единичного вектора $\hat{e}$ и всех $r>r'$. Такие потенциалы отталкивания стремятся развести частицы друг от друга, так что мы ожидаем, что связанных состояний нет, а потому и спектры только абсолютно непрерывные. Имеется иной способ описания того факта, что V — потенциал отталкивания, делающий связь с положительностью коммутаторов более прозрачной. Пусть $U(\theta)$ — семейство масштабных преобразований, т. е. $(U(\theta)\psi)(r)=e^{m\theta/2}\psi(e^\theta r)$. Тогда $[U(\theta)VU(\theta)^{-1}](r)=V(e^\theta r)$, т. е. потенциалы отталкивания удовлетворяют тому условию, что операторнозначная функция $V_\theta\equiv U(\theta)VU(\theta)^{-1}$ монотонно убывает при возрастании θ. Поскольку $U(\theta)H_0U(\theta)^{-1}=e^{-2\theta}H_0$, кинетическая энергия тоже монотонно убывает при масштабных преобразованиях. Итак, формально

$$\frac{d}{d\theta} U(\theta)(H_0+V) U(\theta)^{-1} \leqslant 0.$$

Обозначим через

$$D = \frac{i}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}x_i\right)$$

генератор $U(\theta)$ (т. е. $U(\theta)=\exp(-i\theta D)$); тогда, опять-таки формально, $i[D, H]\geqslant 0$.

С физической точки зрения существует другой способ обнаружить неотрицательность коммутатора $i[D, H]$. Действительно, $D=-(i/2)[H, x^2]$. Поэтому если определить момент инерции в гейзенберговой картине как

$$I(t)=e^{+iHt}x^2e^{-iHt},$$

то на формальном уровне условие $i[D, H]\geqslant 0$ эквивалентно условию $\ddot{I}(t)\geqslant 0$. Легко видеть, что в классической теории потенциалы отталкивания удовлетворяют этому условию, и мы действительно применяли подобные идеи в теореме XI.3.

Теорема XIII.28 неприменима в этой ситуации непосредственно в силу следующих причин. (1) Вычисления проводились формально; как обычно, здесь необходимо аккуратно следить за областями определения и существенными областями определения, однако оказывается, что ни в каких дополнительных технических предположениях надобности нет. (2) H не ограничен. Однако, поскольку H положителен, само по себе это не было бы очень серьезным препятствием (см. задачу 61). (3) D не ограничен. Вот это уже более серьезно. Оператор d/dx, входящий в D, контролировать нетрудно, поскольку он H-ограничен, но вот оператор умножения на x трудно контролировать непосредственно. В доказательстве приводимой ниже теоремы мы применим обрезание оператора умножения на x, что усложнит вычисления. Поскольку свойство отталкивания связано с условием $dV/dr\leqslant 0$, то в D важнее производная, чем x; таким образом, обрезание x не нарушит условия $i[D, H]\geqslant 0$.

Теорема XIII.29 (теорема Лавина). Пусть $H_0=-\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^m)$ $(m\geqslant 3)$. Пусть V — функция на $\mathbb{R}^m$, такая, что

(i) умножение на V H_0-ограничено с относительной гранью, равной нулю;

(ii) производная в смысле обобщенных функций $\sum_{i=1}^{n} x_i\,\partial V/\partial x_i$ отрицательна.

Тогда оператор $H = H_0 + V$ имеет только абсолютно непрерывный спектр.

Доказательство. Выберем α, удовлетворяющее условию $1/2 < \alpha < 3/2$, и введем $g(r) = \int_0^r (1+\rho^2)^{-\alpha}\, d\rho$. Пусть A — оператор

$$Af = i \sum_{k=1}^{m} \left[x_k \frac{g(r)}{r} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(x_k \frac{g(r) f}{r} \right) \right]. \tag{45}$$

Поскольку $g(r) r^{-1} \in C^\infty$, то A отображает множество C_0^∞ в себя. Если g в (45) заменить на r, то полученный оператор будет в точности генератором масштабных преобразований, поэтому (45) — частично обрезанная аппроксимация этого генератора. На самом деле A обладает непосредственной геометрической интерпретацией. Пусть семейство операторов $T_\gamma: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ определяется условиями: $T_0 x = x$, а вектор $y(\gamma) = T_\gamma x$ есть решение уравнения $\dot{y} = |y|^{-1} g(|y|)\, y$. Тогда

$$(e^{-i\gamma A} f)(x) = N_\gamma(x)\, f(T_\gamma x),$$

где $N_\gamma(x)$ — нормирующий множитель (корень квадратный из якобиана).

Наша ближайшая цель — доказать, что для некоторой константы $c > 0$

$$i[A, H] \geqslant c(1+r^2)^{-\alpha-1},$$

в том смысле, что для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$i(A\varphi, H\varphi) - i(H\varphi, A\varphi) \geqslant c(\varphi, (1+r^2)^{-\alpha-1}\varphi). \tag{46}$$

Сначала проведем такую выкладку:

$$i(A\varphi, V\varphi) - i(V\varphi, A\varphi) =$$

$$= 2\,\mathrm{Re} \sum_{i=1}^{m} \int V(x) \left[\overline{\varphi(x)} \left\{ \frac{x_i}{r} g(r) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{r} g(r) \right) \right\} \varphi(x) \right] dx =$$

$$= 2 \int V(x) \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} x_i \left(\frac{g(r)}{r} |\varphi(x)|^2 \right) dx \geqslant 0,$$

последнее в силу (ii). Итак, нам необходимо доказать (46) лишь при $V = 0$ — задача скучная, но не слишком сложная. Предварительно отметим, что для всех r

$$rg'(r) - g(r) \leqslant 0, \tag{47a}$$

$$g''(r) = -2\alpha r(1+r^2)^{-\alpha-1}, \tag{47b}$$

$$g'''(r) + (2\alpha+1) r^{-1} g''(r) \leqslant 0. \tag{47c}$$

Чтобы доказать (47а), заметим, что функция $(1+r^2)^{-\alpha}$ монотонно убывает, поэтому и ее среднее значение $r^{-1}\int_0^r (1+\rho^2)^{-\alpha}\,d\rho = g(r)\,r^{-1}$ также монотонно убывает. Поскольку $rg'-g=r^2(r^{-1}g)'$, (47а) доказана. Две другие формулы следуют из явных выкладок:

$$g''(r) = -2\alpha r(1+r^2)^{-\alpha-1},$$
$$g'''(r)+(2\alpha+1)\,r^{-1}g''(r) = -4\alpha(\alpha+1)(1+r^2)^{-\alpha-2}.$$

Докажем далее, что

$$-\Delta\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g_j}{\partial x_j}\right) \geqslant c\,(1+r^2)^{-\alpha-1}, \tag{48}$$

где $g_j(x)=x_j r^{-1}g(r)$. Действительно,

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_k} = r^{-1}g\,(\delta_{jk}-r^{-2}x_jx_k)+r^{-2}x_jx_kg'. \tag{49}$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g_j}{\partial x_j} = (n-1)\,r^{-1}g+g'.$$

Пользуясь тем, что для сферически симметричной функции h

$$\Delta h = r^{-1}(rh)''+(n-3)\,r^{-1}h',$$

находим, что

$$-\Delta\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_j}{\partial x_j}\right) = -(g'''+(2\alpha+1)\,r^{-1}g'')-(2n-2\alpha-3)\,r^{-1}g''-$$
$$-(n-1)(n-3)\,r^{-3}(rg'-g).$$

Поскольку $n\geqslant 3$ и $\alpha<3/2$, (48) следует из (47). Наконец, на функциях из C_0^∞ вычисление коммутатора дает

$$-\left[g_k\frac{\partial}{\partial x_k},\ H_0\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[g_k\frac{\partial}{\partial x_k},\ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right] = \sum_{i=1}^{n}2p_i\frac{\partial g_k}{\partial x_i}p_k+i\,\frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i^2}p_k,$$

где $p_k=i^{-1}\partial/\partial x_k$. Применяя равенство

$$-\left[g_k\frac{\partial}{\partial x_k}+\frac{\partial}{\partial x_k}g_k,\ H_0\right] = -\left[g_k\frac{\partial}{\partial x_k},\ H_0\right]-\left[g_k\frac{\partial}{\partial x_k},\ H_0\right]^*,$$

видим, что

$$i\,[A,\ H_0] = \sum_{i,\,k}2p_k\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_k}+\frac{\partial g_k}{\partial x_i}\right)p_i-\Delta\left(\sum_j\frac{\partial g_j}{\partial x_j}\right).$$

Итак, в силу (48) доказательство оценки (46) свелось к доказательству неравенства

$$\sum_{l,\,k} 2p_k \left(\frac{\partial g_l}{\partial x_k} + \frac{\partial g_k}{\partial x_l}\right) p_l \geqslant 0. \tag{50}$$

В силу (49) левая часть (50) равна

$$4\sum_{l,\,k} \{p_k [(r^{-1}g)(\delta_{lk} - r^{-2}x_l x_k)] p_l + p_k (r^{-2}g') x_l x_k p_l\}.$$

Фиксируем $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда, по неравенству Шварца, матрица $\{\delta_{lk} - r^{-2}x_l x_k\}$ положительно определена. Далее, матрица $\{x_l x_k r^{-2}\}$, очевидно, положительно определена, так что (50) выполняется, и это завершает доказательство (46).

Теперь необходимо убедиться, что $A \ll H$, т. е. что A H-ограничен с относительной гранью, равной нулю. Поскольку $V \ll H_0$ по предположению, следует доказать лишь, что $A \ll H_0$. Но $\partial/\partial x_i \ll H_0$, оператор $x_i g r^{-1}$ ограничен и

$$A = 2i \sum_{l=1}^{n} x_l g r^{-1} \partial/\partial x_l + i(n-1) r^{-1} g + ig',$$

так что свойство $A \ll H_0$ доказано. Поскольку C_0^∞ — существенная область определения для H и $A \ll H$, то (46) выполняется для всех $\varphi \in D(H)$.

Пусть теперь $\varphi \in D(H)$, и пусть B — умножение на $c^{1/2}(1+r^2)^{-(\alpha+1)/2}$. Тогда утверждается, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| Be^{-itH}\varphi \|^2 \, dt \leqslant d \| (H+I)\varphi \|^2 \tag{51}$$

при подходящей константе d. Действительно, в силу (46),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| Be^{-itH}\varphi \|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-itH}\varphi,\ B^* B e^{-itH}\varphi)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} i\{(Ae^{-itH}\varphi,\ He^{-itH}\varphi) - (He^{-itH}\varphi,\ Ae^{-itH}\varphi)\}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{-\infty < s < \infty} |(e^{-isH}\varphi,\ Ae^{-isH}\varphi)| \leqslant 2\|\varphi\| \| A(H+I)^{-1} \| \| (H+I)\varphi \|,$$

что доказывает (51).

Для завершения доказательства отметим, что из (51) следует H-гладкость оператора $B(H+I)^{-1}$. Поскольку $\operatorname{Ran}(B^*)$ и $\operatorname{Ran}(H+I)^{-1}$ плотны замыкание множества $\operatorname{Ran}(H+I)^{-1}B^*$ есть $\mathcal{H}$. Из теоремы XIII.23, таким образом, вытекает, что $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{\text{ac}}$. Поэтому H имеет только абсолютно непрерывный спектр. ∎

Следствие. Пусть $m(N-1)\geqslant 3$. Пусть $\tilde{H}_0=\sum_{i=1}^{N}(-2\mu_i)^{-1}\Delta_i$ в $L^2(\mathbb{R}^{Nm})$, и пусть H_0 — оператор $\tilde{H}_0$ за вычетом движеиия центра масс. Предположим, что для любых i, j функции V_{ij}: $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ удовлетворяют условиям

(i) $V_{ij}\in L^p(\mathbb{R}^m)+L^\infty(\mathbb{R}^m)$ ($p=2$ при $m\leqslant 3$, $p>2$ при $m=4$, $p=m/2$ при $m\geqslant 5$);

(ii) $\sum_{k=1}^{m}x_k\,\partial V_{ij}/\partial x_k\leqslant 0$ в смысле обобщенных функций.

Тогда оператор $H=H_0+\sum_{i<j}V_{ij}(r_i-r_j)$ в $L^2(\mathbb{R}^{m(N-1)})$ обладает только абсолютно непрерывным спектром.

Доказательство. Пусть ζ — якобиева система координат, так что $H_0=\sum_{i=1}^{N-1}(-2M_i)^{-1}\Delta_{\zeta_i}$, и пусть $q_i=(2M_i)^{1/2}\zeta_i$, так что $H_0=-\sum_{i=1}^{N-1}\Delta_{q_i}$. Если можно показать, что $\sum_{i=1}^{N-1}q_i\cdot\nabla_{q_i}V_{jk}\leqslant 0$ для всех j, k, то требуемый результат следует из теоремы XIII.29. Предположим сначала, что каждая функция V_{jk} гладкая. Тогда $V_{jk}(r)=V_{jk}\left(\sum_{i=1}^{N-1}\alpha_i q_i\right)$ с соответствующими α_i. Поэтому

$$\sum_i q_i\cdot\nabla_{q_i}V_{jk}\left(\sum_l\alpha_l q_l\right)=\left(\sum_i\alpha_i q_i\right)\cdot(\nabla_r V_{jk})(r)\big|_{r=\sum\alpha_l q_l}=$$
$$=(r\cdot\nabla_r V_{jk})(r)\big|_{r=\sum\alpha_l q_l}.$$

Последнее неположительно по условию. При произвольных V_{jk} нужно произвести усреднение с основными функциями и повторить предыдущее построение. ▌

C. Локальная гладкость и волновые операторы для потенциалов отталкивания

В качестве последнего вопроса из теории гладких операторов мы обсудим некоторое расширение теоремы XIII.24. «Неприятность» с этой теоремой состоит в том, что ее результат слишком силен: H и H_0 унитарно эквивалентны. В частности, она не применима к квантовым гамильтонианам, имеющим какой бы то ни было чисто точечный спектр. Поэтому мы введем понятие более слабое, чем гладкость:

Определение. Пусть H — самосопряженный оператор со спектральными проекторами E_Ω. Оператор A называют ***H-гладким*** **на Ω**, где Ω — борелево множество, тогда и только тогда, когда оператор AE_Ω является H-гладким.

Теорема XIII.30. Пусть H — самосопряженный оператор с резольвентой R и спектральными проекторами $\{E_\Omega\}$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}$. Предположим, что $D(A) \supset D(H)$ и что *либо*

(a) $\sup\limits_{0<|\varepsilon|<1,\ \lambda\in\Omega} |\varepsilon| \, \| AR(\lambda + i\varepsilon) \|^2 < \infty$,

либо

(b) $\sup\limits_{0<\varepsilon<1,\ \lambda\in\Omega} \| AR(\lambda + i\varepsilon) A^* \| < \infty$.

Тогда A H-гладкий на $\bar{\Omega}$ — замыкании Ω.

Доказательство. (a) Для каждого $\varepsilon \neq 0$ норма $\| AR(\lambda + i\varepsilon) \|$ непрерывна по λ, поэтому оценка

$$C = \sup \{ |\varepsilon| \, \| AR(\lambda + i\varepsilon) \|^2 \mid \lambda \in \Omega,\ 0 < |\varepsilon| < 1 \}$$

продолжается на все $\lambda \in \bar{\Omega}$. Предположим, что $\lambda \in \mathbb{R} \diagdown \bar{\Omega}$. Выберем $\lambda_0 \in \bar{\Omega}$ так, что $|\lambda - \lambda_0| = \operatorname{dist}(\lambda, \bar{\Omega})$. Тогда

$$\begin{aligned} &|\varepsilon| \, \| AR(\lambda + i\varepsilon) E_{\bar\Omega} \varphi \|^2 = \\ &\quad = |\varepsilon| \, \| AR(\lambda_0 + i\varepsilon) [I - (\lambda_0 - \lambda) R(\lambda + i\varepsilon)] E_{\bar\Omega} \varphi \|^2 \leqslant \\ &\quad \leqslant |\varepsilon| \, \| AR(\lambda_0 + i\varepsilon) \|^2 \, \| (I - (\lambda_0 - \lambda) R(\lambda + i\varepsilon)) E_{\bar\Omega} \|^2 \, \| \varphi \|^2 \leqslant \\ &\quad \leqslant 4 |\varepsilon| \, \| AR(\lambda_0 + i\varepsilon) \|^2 \, \| \varphi \|^2, \end{aligned}$$

поскольку $|\lambda_0 - \lambda| \, |x - \lambda + i\varepsilon|^{-1} < 1$ для любого $x \in \bar{\Omega}$. Итак,

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R},\ \varepsilon\neq 0} |\varepsilon| \, \| AR(\lambda + i\varepsilon) E_{\bar\Omega} \| < \infty,$$

поэтому $AE_{\bar\Omega}$ H-гладкий в силу теоремы XIII.25 и замечания, сделанного после ее формулировки.

(b) Поскольку $(AR(\lambda + i\varepsilon) A^*)^* = AR(\lambda - i\varepsilon) A^*$, имеем

$$c = \sup_{\lambda\in\Omega,\ 0<|\varepsilon|<1} \| AR(\lambda + i\varepsilon) A^* \| < \infty.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\sup_{\lambda\in\Omega,\ 0<|\varepsilon|<1} |\varepsilon| \, \| R(\lambda + i\varepsilon) A^* \|^2 = \\ &\quad = \sup_{\lambda\in\Omega,\ 0<|\varepsilon|<1} |\varepsilon| \, \| AR(\lambda + i\varepsilon) R(\lambda - i\varepsilon) A^* \| = \\ &\quad = \sup_{\lambda\in\Omega,\ 0<|\varepsilon|<1} {}^1/_2 \| A [R(\lambda + i\varepsilon) - R(\lambda - i\varepsilon)] A^* \| \leqslant c < \infty. \end{aligned}$$

Поскольку $\| R(\lambda + i\varepsilon) A^* \| = \| AR(\lambda - i\varepsilon) \|$, то выполняются условия пункта (a). ∎

Теперь мы можем сформулировать обобщение теоремы XIII.24.

Теорема XIII.31. Пусть H и H_0 — самосопряженные операторы со спектральными проекторами E_Ω и $E_\Omega^{(0)}$. Предположим, что

$$H - H_0 = A^* B$$

в смысле (35). Предположим, что A H-ограниченный, а также H-гладкий на некотором ограниченном открытом интервале $\Omega \subset \mathbb{R}$ и что B H_0-ограниченный и H_0-гладкий на Ω. Тогда существуют пределы

$$W_\pm = \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t} E_\Omega^{(0)}, \quad \tilde{W}_\pm = \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} e^{iH_0 t} e^{-iHt} E_\Omega.$$

Более того,

$$W_\pm^* = \tilde{W}_\pm, \tag{52}$$

$$\tilde{W}_\pm W_\pm = E_\Omega^{(0)}; \quad W_\pm \tilde{W}_\pm = E_\Omega. \tag{53}$$

Доказательство. Допустим, мы доказали, что $W_\pm$ существуют и что $\operatorname{Ran} W_\pm \subset E_\Omega$. Тогда, в силу симметрии и того, что $H_0 - H = -B^* A$, операторы $\tilde{W}_\pm$ существуют и $\operatorname{Ran} \tilde{W}_\pm \subset E_\Omega^{(0)}$. Равенство (52) очевидно, а (53) следуют из того, что $W_\pm$ (соответственно $\tilde{W}_\pm$) — частичные изометрии с начальным пространством $E_\Omega^{(0)}$ (соответственно E_Ω). Мы покажем, что операторы $W_\pm$ существуют и $\operatorname{Ran} W_\pm \subset E_\Omega$, доказав, что существует $\operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} E_\Omega e^{iHt} e^{-iH_0 t} E_\Omega^{(0)}$ и

$$\operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} E_{\mathbb{R} \setminus \Omega} e^{iHt} e^{-iH_0 t} E_\Omega^{(0)} = 0. \tag{54}$$

Доказательство существования первого предела идентично доказательству теоремы XIII.24, а (54) достаточно доказать

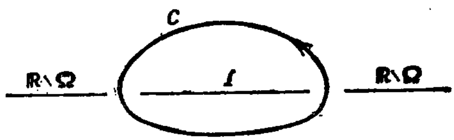

Рис. XIII.4. Контур интегрирования.

с $E_I^{(0)}$ вместо $E_\Omega^{(0)}$ для произвольного компактного подынтервала $I \subset \Omega$. Для такого I пусть C — такой контур, как на рис. XIII.4. Тогда

$$E_{\mathbb{R} \setminus \Omega} e^{iHt} e^{-iH_0 t} E_I^{(0)} \varphi = \frac{1}{2\pi i} \oint_C E_{\mathbb{R} \setminus \Omega} (H - z)^{-1} e^{iHt} e^{-iH_0 t} E_I^{(0)} \varphi \, dz -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \oint_C E_{\mathbb{R} \setminus \Omega} e^{iHt} e^{-iH_0 t} (H_0 - z)^{-1} E_I^{(0)} \varphi \, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C E_{\mathbb{R} \setminus \Omega} e^{iHt} \left[(H - z)^{-1} - (H_0 - z)^{-1} \right] e^{-iH_0 t} E_I^{(0)} \varphi \, dz.$$

Поскольку последнее подынтегральное выражение равномерно ограничено на C, достаточно, в силу теоремы о мажорированной сходимости, доказать, что

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} [(H-z)^{-1}-(H_0-z)^{-1}]\, e^{-iH_0t}E_I^{(0)}=0 \tag{55}$$

для всех невещественных z. Однако

$$\begin{aligned}|(\psi, [(H-z)^{-1}-(H_0-z)^{-1}]\, e^{-iH_0t}E_I^{(0)}\varphi)| &= \\ &= |(A(H-z)^{-1}\psi,\ B(H_0-z)^{-1}e^{-iH_0t}E_I^{(0)}\varphi)| \leqslant \\ &\leqslant \|A(H-z)^{-1}\|\,\|B(H_0-z)^{-1}e^{-iH_0t}E_I^{(0)}\varphi\|\,\|\psi\|.\end{aligned}$$

Итак, чтобы доказать (55), достаточно показать, что

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|B(H_0-z)^{-1}\, e^{-iH_0t}E_I^{(0)}\varphi\|=0. \tag{56}$$

Но, в силу предположений о гладкости, функция от t в (56) квадратично интегрируема. Более того, она имеет равномерно ограниченную производную, поэтому (56) выполняется (задача 62). ▮

Следствие. Предположим, что H и H_0 — самосопряженные операторы со спектральными проекторами E_Ω и $E_\Omega^{(0)}$ и что

$$H-H_0=A^*B,$$

где B H_0-ограничен, а A H-ограничен. Пусть $S\subset\mathbb{R}$, причем $S=\bigcup_{l=1}^{\infty}\Omega_l$, а каждое Ω_l — ограниченный открытый интервал. Предположим, что

(i) A H-гладкий на каждом Ω_l, а B H_0-гладкий на каждом Ω_l;

(ii) как множество $\sigma(H)\setminus S$, так и $\sigma(H_0)\setminus S$ имеют нулевую лебегову меру.

Тогда обобщенные волновые операторы $\operatorname*{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{iHt}e^{-iH_0t}E_{ac}^{(0)}$ существуют и полны.

Доказательство. Поскольку $S=\bigcup_{l=1}^{\infty}\Omega_l$ и $E_{ac}^{(0)}=E_S^{(0)}$, то существование будет доказано, если мы убедимся в том, что $\lim_{t\to\mp\infty} e^{iHt}e^{-iH_0t}\varphi$ существует для $\varphi\in\bigcup_{l=1}^{\infty}\operatorname{Ran}E_{\Omega_l}^{(0)}$. Но это есть прямое следствие предыдущей теоремы. Поскольку обратные волновые операторы существуют в силу симметрии, то волновые операторы полны. ▮

Одно возможное приложение этого следствия будет дано в § 8. Здесь же мы применим его для доказательства одного результата из теории потенциалов отталкивания. Этот результат не является лучшим из возможных (см. Замечания).

Теорема XIII.32. Пусть H — оператор типа указанного в следствии теоремы XIII.29. Предположим, что каждый V_{ij} — функция от $|x|$, удовлетворяющая условию $|V_{ij}(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-5/2-\varepsilon}$ для каждых i и j и некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда волновые операторы $\Omega^{\pm} = \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{iHt}e^{-iH_0t}$ существуют и унитарны.

Доказательство. Поскольку уже известно, что H имеет только абсолютно непрерывный спектр, достаточно доказать, что волновые операторы существуют и полны. В обозначениях, использованных в доказательстве теоремы XIII.29, пусть

$$A_{jk} = +i\left[g(r_j - r_k)\frac{d}{dr_{jk}} + \frac{d}{dr_{jk}}g(r_j - r_k)\right], \quad A = \sum_{j=k} A_{jk},$$

где $r_{jk} = |r_j - r_k|$, а d/dr_{jk} определено так, что

$$r_{jk}d/dr_{jk} = (r_j - r_k)\cdot(\nabla_j - \nabla_k).$$

Далее, $i[A_{ij}, V_{ij}] \geqslant 0$, как в доказательстве теоремы XIII.29, и $i[A_{kl}, V_{ij}] = 0$, если i, j, k, l различны. Наконец, если различны i, j, k, то

$$i[A_{ik} + A_{kj}, V_{ij}(r_{ij})] = \mathbf{a}(i, j, k)\cdot(\nabla V_{ij})(r_{ij}),$$

где $\mathbf{a}(i, j, k) = g(r_{ik})\mathbf{e}_{ik} + g(r_{kj})\mathbf{e}_{kj}$ и $\mathbf{e}_{ik} = r_{ik}^{-1}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)$. Поскольку V_{ij} — функция только от $|x|$ и $(\mathbf{x}\cdot\nabla)V_{ij} \leqslant 0$, заключаем, что $i[A_{ik} + A_{kj}, V_{ij}] \geqslant 0$, если $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\cdot(\mathbf{a}(i, j, k)) \geqslant 0$. Но

$$\begin{aligned}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\cdot\mathbf{a}(i, j, k) &= r_{ik}g(r_{ik}) + r_{kj}g(r_{kj}) + \\ &\quad + (\mathbf{e}_{ik}\cdot\mathbf{e}_{kj})(r_{ik}g(r_{kj}) + r_{kj}g(r_{ik})) \geqslant \\ &\geqslant (r_{ik} - r_{kj})(g(r_{ik}) - g(r_{jk})) \geqslant 0,\end{aligned}$$

ибо g монотонно. Отсюда следует, что $i[A, V] \geqslant 0$, так что вычисления, идентичные тем, которые проводились в теореме XIII.29, показывают, что (задача 64)

$$i[A, H] \geqslant c(1 + r_{jk})^{-3-\varepsilon}$$

при подходящей константе c. Снова следуя доказательству теоремы XIII.29, заключаем, что оператор $(1 + r_{jk})^{-3/2-\varepsilon}(H + I)^{-1}$ H-гладкий. Поскольку

$$\| |V_{ij}|^{3/5}(H + I)^{-1}e^{-iHt}\varphi\| \leqslant c^{1/2}\|(1 + r_{jk})^{-3/2-\varepsilon}(H + I)^{-1}e^{-iHt}\varphi\|,$$

оператор $|V_{ij}|^{3/5}(H + I)^{-1}$ H-гладкий, а потому $|V_{ij}|^{3/5}$ H-гладкий на любом компактном множестве. По предположению $|V_{ij}|^{2/5} \in L^{m+\varepsilon}(\mathbb{R}^m) \cap L^{m-\varepsilon}(\mathbb{R}^m)$, так что, согласно доказательству теоремы XIII.27, $|V_{ij}|^{2/5}$ H_0-гладкий. Доказываемый результат теперь вытекает из предыдущего следствия. ∎