XIII.8. Отсутствие сингулярного спектра III: пространства L^2 с весом

Как мы уже видели, достаточное условие того, что множество $\sigma_{\text{sing}}(H)$ пусто, состоит в существовании плотного набора векторов $X \subset \mathcal{H}$, такого, что внутреннее произведение $(\varphi, (H-z)^{-1}\varphi)$ остается ограниченным при $z \to \lambda \in \mathbb{R}$ для любого $\varphi \in X$. Имеется естественный способ проверки этого условия в конкретной ситуации. Предположим, что множество $X \subset \mathcal{H}$ плотно, существует норма $|||\cdot|||_+$ на X, превращающая X в банахово пространство, и $|||\varphi|||_+ \geqslant \|\varphi\|$ для любого $\varphi \in X$. Тогда внутреннее произведение на $\mathcal{H}$ позволяет естественно реализовать $\mathcal{H}$ как подмножество в X^*. Если $|||\cdot|||_-$ обозначает норму на X^*, то $\|\varphi\| \geqslant |||\varphi|||_-$ для любого $\varphi \in \mathcal{H}$. Мы уже рассматривали такую ситуацию и связанные с ней понятия в § VIII.6 и в дополнении к § XI.6. Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $\operatorname{Im} z \neq 0$. Тогда $(H-z)^{-1}$ переводит $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$, а потому X в X^*. Конечно, норма оператора $(H-z)^{-1}$ как отображения из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$ расходится, когда z стремится к спектру $\sigma(H)$, однако предположим, что она остается ограниченной, если этот оператор рассматривать как отображение из X в X^*. Тогда

$$|(\varphi, (H-z)^{-1}\varphi)| \leqslant |||\varphi|||_+^2 \|(H-z)^{-1}\|_{+,-},$$

где

$$\|A\|_{+,-} = \sup_{\psi \neq 0,\, \psi \in X} |||A\psi|||_- / |||\psi|||_+,$$

так что можно заключить, что $\sigma_{\text{sing}}(H) = \varnothing$ в силу теоремы XIII.20.

Естественно попытаться реализовать эту идею при помощи техники теории возмущений. Точнее говоря, мы исследуем оператор $H = H_0 + V$ и начнем с доказательства оценок на $(H_0 - z)^{-1}$ как отображение из X в X^*. Мы будем рассматривать операторы Шредингера и возьмем $H_0 = -\Delta$. Чтобы обоснсвать наш выбор множества X, возьмем $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и вычислим

$$\begin{aligned}\lim_{y \downarrow 0} (f, [(H_0 - x + iy)^{-1} - (H_0 - x - iy)^{-1}] f) &= \\ = \lim_{y \downarrow 0} \int |\hat{f}(p)|^2\, 2i \operatorname{Im}[(p^2 - x + iy)^{-1}]\, d^n p &= \\ = -2i\pi \int |\hat{f}(p)|^2\, \delta(p^2 - x)\, d^n p&,\end{aligned}$$

последнее в силу уравнения (V.4). Итак, для того чтобы $(f, (H_0 - x + iy)^{-1} f)$ имело предел при $y \downarrow 0$, функция $\hat{f}$ должна обладать «естественным» сужением на сферу радиуса $x^{1/2}$. В силу исследования, проведенного нами в § IX.9, естественно выбрать в качестве X пространство L^2_δ (с $\delta > 1/2$); тогда X^* есть $L^2_{-\delta}$:

$$L^2_\delta(\mathbb{R}^n) = \left\{ f(x) \,\Big|\, \|f\|_\delta^2 \equiv \int (1 + x^2)^\delta |f(x)|^2\, dx < \infty \right\}.$$

Мы будем все время опираться на оценки, доказанные в § IX.9, особенно на теоремы IX.39 и IX.41.

Определение. Оператор умножения на функцию $V(x)$ называется **потенциалом Агмона**, если $V(x)=(1+x^2)^{-1/2-\varepsilon}W(x)$ для некоторого $\varepsilon>0$ и некоторого W, являющегося относительно компактным возмущением оператора $(-\Delta)$.

Потенциалы Агмона образуют векторное пространство $-\Delta$-ограниченных возмущений с нулевой относительной гранью (см. задачу 20 к гл. X).

Пример 1. Пусть $p>n/2$, $p<\infty$ и $p\geqslant 2$. Тогда любая функция $W\in L^p(\mathbb{R}^n)$ задает относительно компактный оператор (задача 41), так что любой V, такой, что $(1+x^2)^{1/2+\varepsilon}V\in L^p$, является потенциалом Агмона.

Пример 2. Пусть $W\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$; определим $V(x)=(1+x^2)^{-1/2-\varepsilon}W(x)$. Чтобы убедиться, что V — потенциал Агмона, достаточно доказать, что $U(x)=(1+x^2)^{-\varepsilon/2}W(x)$ относительно компактен. Но это справедливо, поскольку $U(x)$ принадлежит $L^p+(L^\infty)_\varepsilon$ для всех p (см. задачу 41).

Сформулируем теперь основную теорему этого раздела.

Теорема XIII.33 (теорема Агмона — Като — Куроды). Пусть V — потенциал Агмона, и пусть $H=H_0+V$, где $H_0=-\Delta$. Тогда:

(a) множество $\mathscr{E}_+$ положительных собственных значений H есть дискретное подмножество в $(0,\infty)$, и каждое собственное значение имеет конечную кратность;

(b) если C — произвольный компактный подынтервал в $(0,\infty)\setminus\mathscr{E}_+$ и $\delta>1/2$, то

$$\sup_{\lambda\in C,\ 0<y<1}\ \sup_{\psi,\ \varphi\in L^2_\delta;\ \|\varphi\|_\delta\leqslant 1,\ \|\psi\|_\delta\leqslant 1}|(\psi,(H-\lambda-iy)^{-1}\varphi)|<\infty;$$

(c) $\sigma_{\rm sing}(H)=\varnothing$;

(d) волновые операторы $\Omega^\pm(H,H_0)$ существуют и полны.

Доказательство теоремы XIII.33 хотя и элегантно, но довольно длинно, поэтому мы разобьем его на ряд лемм. После доказательства (a) мы проведем несколько технических оценок, которые позволят нам вывести (c) и (d) из (b). Затем мы докажем (b) в случае $V=0$. Наконец, мы воспользуемся доказанными для H_0 оценками, теоремами IX.39 и IX.41 и техникой бутстрапа для завершения доказательства. Здесь всюду мы полагаем $\rho(x)\equiv(1+x^2)^{1/2}$. В следующем доказательстве иллюстрируется применение L^2-пространств с весом и теоремы IX.39.

Доказательство части (a) теоремы XIII.33. Предположим, что $\varphi\in D(H)$ и $H\varphi=\lambda\varphi$ с $\lambda>0$. Сначала покажем, что $\|\varphi\|_\delta\leqslant c\|\varphi\|$

для некоторого $\delta > 0$, где c зависит только от λ и остается ограниченным, когда λ изменяется в компактных подмножествах из $(0, \infty)$. Поскольку W H_0-компактен, он H-ограничен, так что $\|W\varphi\| \leqslant a\|H\varphi\| + b\|\varphi\| = (a\lambda + b)\|\varphi\|$. Следовательно, функция $\psi \equiv V\varphi = \rho^{-1-\varepsilon}W\varphi$ принадлежит $L^2_{1+\varepsilon}$. В частности, по теореме IX.40, $\hat{\psi}$ обладает сужениями на каждую сферу S_E и эти сужения непрерывны по Гёльдеру по E. Поскольку $(H_0 - \lambda)\varphi = -\psi$, имеем $\hat{\varphi} = -(k^2 - \lambda)^{-1}\hat{\psi}$. Но если бы сужение $\hat{\psi} \restriction S_{\sqrt{\lambda}}$ было отлично от тождественного нуля, $\hat{\varphi}$ не могло бы лежать в L^2, поэтому заключаем, что $\hat{\psi} \restriction S_{\sqrt{\lambda}} = 0$. В результате применима теорема IX.41, так что

$$\|\varphi\|_{\varepsilon/2} \leqslant c_\lambda \|\psi\|_{1+\varepsilon} = c_\lambda \|W\varphi\| \leqslant d_\lambda \|\varphi\|.$$

Пусть $\eta \equiv \rho^{\varepsilon/2}(-\Delta + 1)\varphi$. Тогда из $H\varphi = \lambda\varphi$ вытекает, что

$$\|\eta\| \leqslant \|\rho^{\varepsilon/2}(\lambda + 1)\varphi\| + \|\rho^{\varepsilon/2}V\varphi\| \leqslant (\lambda + 1)\|\varphi\|_{\varepsilon/2} + \|W\varphi\| \leqslant c'_\lambda \|\varphi\|.$$

Поскольку $\varphi = (-\Delta + 1)^{-1}\rho^{-\varepsilon}\eta$, мы заключаем, что для любого компактного подмножества $K \subset (0, \infty)$ любое решение уравнения $H\varphi = \lambda\varphi$ с $\lambda \in K$ и $\|\varphi\| = 1$ имеет вид $\varphi = A\eta$, где (i) $A = (-\Delta + 1)^{-1}\rho^{-\varepsilon}$ и (ii) $\|\eta\| \leqslant c$, где c—константа, зависящая только от K. Согласно задаче 41, A—компактный оператор, так что множество $M = \{\varphi = A\eta \mid \|\eta\| \leqslant c\}$ компактно. Если бы какое-нибудь собственное значение $\lambda \in K$ имело бесконечную кратность или если бы в K лежало бесконечно много собственных значений, то M содержало бы бесконечный ортонормированный набор. Поскольку M компактно, K содержит лишь конечное число собственных значений, причем каждое с конечной кратностью. ∎

В § 13 мы покажем, что $\mathscr{E}_+ = \varnothing$ при некоторых дополнительных предположениях о регулярности V.

Лемма 1. Пусть F и G—два произвольных вещественнозначных оператора умножения, которые H_0-ограничены с нулевой относительной гранью. Тогда для любого $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ операторы $(H_0 - \mu)^{-1}$, $(H_0 + G - \mu)^{-1}$, $F(H_0 - \mu)^{-1}$ и $F(H_0 + G - \mu)^{-1}$ ограничены на каждом L^2_δ. Более того, если F также и H_0-компактен, то $F(H_0 - \mu)^{-1}$ и $F(H_0 + G - \mu)^{-1}$ компактны на каждом L^2_δ.

Доказательство. Мы докажем лемму для $(H_0 - \mu)^{-1}$ в случае $|\delta| \leqslant 1$. Другие случаи аналогичны и оставлены в качестве задач (задача 66). Введем символ ∂_j для оператора $\partial/\partial x_j$ и проведем формальное вычисление:

$$[(H_0-\mu)^{-1}, \rho^\delta] = -(H_0-\mu)^{-1}[H_0, \rho^\delta](H_0-\mu)^{-1} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \{(H_0-\mu)^{-1}\partial_i\}(\partial_i\rho^\delta)(H_0-\mu)^{-1} +$$
$$+ (H_0-\mu)^{-1}(\partial_i\rho^\delta)\{\partial_i(H_0-\mu)^{-1}\}.$$

В применении к векторам из $\mathscr{S}$ все вычисления законны. Более того, если $\delta \leqslant 1$, производная $\partial_i(\rho^\delta)$ ограничена. Поскольку $(H_0-\mu)^{-1}$ и $\partial_i(H_0-\mu)^{-1}$ ограничены на L^2, мы заключаем, что

$$\|[(H_0-\mu)^{-1}, \rho^\delta]\psi\| \leqslant \text{const}\,\|\psi\|,$$

если $\psi \in \mathscr{S}$, а потому и для произвольного $\psi \in L^2$. Предположим, что $1 \geqslant \delta > 0$. Тогда

$$\|(H_0-\mu)^{-1}\psi\|_\delta = \|\rho^\delta(H_0-\mu)^{-1}\psi\| \leqslant$$
$$\leqslant \|(H_0-\mu)^{-1}\|\|\psi\|_\delta + \|[(H_0-\mu)^{-1}, \rho^\delta]\psi\| \leqslant d\|\psi\|_\delta,$$

так что $(H_0-\mu)^{-1}$ есть ограниченный оператор из L^2_δ в L^2_δ. В силу двойственности, $(H_0-\bar{\mu})^{-1}$ — ограниченный оператор из $L^2_{-\delta}$ в $L^2_{-\delta}$. ∎

Лемма 2. Пусть $H = H_0 + V$, как в теореме XIII.33. Предположим, что F — потенциал Агмона и что для некоторого компактного интервала $\Omega \subset \mathbb{R}$ и каждого $\delta > 1/2$

$$\sup_{x\in\Omega,\ 0<y<1}\ \sup_{\psi,\ \varphi\in L^2_\delta:\ \|\varphi\|_\delta<1,\ \|\psi\|_\delta<1} |(\psi, (H-\lambda-iy)^{-1}\varphi)| < \infty. \tag{57}$$

Тогда оператор $|F|^{1/2}$ H-гладкий на Ω.

Доказательство. По теореме XIII.30 достаточно доказать, что

$$\sup_{\substack{\lambda\in\Omega\\ 0<y<1}} \||F|^{1/2}(H-\lambda-iy)^{-1}|F|^{1/2}\| < \infty.$$

Из (57) следует, что $(H-\lambda-iy)^{-1}$ — равномерно ограниченный оператор из L^2_δ в $L^2_{-\delta}$ для $\lambda+iy \in \Omega\times(0, 1)$. Напишем $F = \rho^{-1-\varepsilon}G$, где G H_0-компактен, и пусть $\delta = 1/2+\varepsilon/2$. Тогда, по лемме 1, $(H-i)^{-1}|G|^{1/2}$ — ограниченный оператор из L^2_δ в L^2_δ, так что $|G|^{1/2}(H-i)^{-1}(H-\lambda-iy)^{-1}(H-i)^{-1}|G|^{1/2}$ — равномерно ограниченный оператор из L^2_δ в $L^2_{-\delta}$ для $\lambda+iy \in \Omega\times(0, 1)$. Таким образом,

$$|F|^{1/2}(H-i)^{-1}(H-\lambda-iy)^{-1}(H-i)^{-1}|F|^{1/2}$$

есть равномерно ограниченный оператор из L^2 в L^2 для $\lambda+iy \in \Omega\times(0, 1)$. Записывая

$$(H-z)^{-1} = (H-i)^{-1} + (z-i)(H-i)^{-2} +$$
$$+ (z-i)^2(H-i)^{-1}(H-z)^{-1}(H-i)^{-1}$$

и пользуясь тем фактом, что $\||F|^{1/2}(H-i)^{-1}|F|^{1/2}\|<\infty$, мы видим, что

$$\sup_{\lambda+iy\in\Omega\times(0,\,1)}\|\,|F|^{1/2}(H-\lambda-iy)^{-1}|F|^{1/2}\|<\infty. \blacksquare$$

Сведение доказательства теоремы XIII.33 к доказательству части (b). Мы хотим показать, что, коль скоро удалось доказать (b), доказательство (c) и (d) тривиально. Предположим, что (b) выполнено, $\varphi\in L^2_\delta$ для $\delta>1/2$ и K — компактный подынтервал в $(0,\infty)\setminus\mathscr{E}_+$. Тогда $E_K\varphi\in\mathscr{H}_{ac}$ по теореме XIII.20. Таким образом, $K\cap\sigma_{sing}=\varnothing$. Согласно второму следствию теоремы XIII.14, $\sigma_{ess}=[0,\infty)$, откуда мы заключаем, что $\sigma_{sing}\cap\cap(-\infty,0)=\varnothing$. Следовательно, $\sigma_{sing}\subset(\mathscr{E}_+\cup\{0\})$. Но $\mathscr{E}_+$ счетно по (a), и потому $\sigma_{sing}=\varnothing$. Применяя лемму 2 к случаю $V=0$, мы видим, что оператор $|V|^{1/2}$ из теоремы XIII.33 H_0-гладкий на Ω для любого интервала $[a,b]$ с $a>0$. Кроме того, оператор $|V|^{1/2}$ H-гладкий на каждом таком Ω при условии $\Omega\cap\mathscr{E}_+=\varnothing$. Теперь (d) вытекает из следствия теоремы XIII.31. $\blacksquare$

Оставшаяся часть этого раздела посвящена доказательству пункта (b). Сначала рассматривается случай $V=0$, который сводится к оценке, весьма похожей на оценку из теоремы IX.41. Само доказательство также вполне аналогично.

Лемма 3. Пусть $\varepsilon>0$. Тогда существует константа c, такая, что для всех $\lambda\in\mathbb{C}$ и всех $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$

$$\|\varphi\|_{-1/2-\varepsilon}\leqslant c\left\|\left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)\varphi\right\|_{1/2+\varepsilon}. \tag{58}$$

Доказательство. Предположим, что $\operatorname{Re}\lambda\leqslant 0$. Пусть $\psi=(d/dx-\lambda)\varphi$. Тогда

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{x}e^{\lambda(x-y)}\psi(y)\,dy.$$

Таким, образом,

$$\|\varphi\|_{L^\infty}\leqslant\|\psi\|_{L^1}=((1+x^2)^{-1/4-\varepsilon/2},\ (1+x^2)^{1/4+\varepsilon/2}\psi)\leqslant c_1\|\psi\|_{1/2+\varepsilon}.$$

Поскольку

$$\|\varphi\|_{-1/2-\varepsilon}\leqslant\|\varphi\|_{L^\infty}\|(1+x^2)^{-1/4-\varepsilon/2}\|_{L^2},$$

отсюда вытекает оценка (58) в случае $\operatorname{Re}\lambda\leqslant 0$. Аналогичное рассуждение проходит и для $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$. $\blacksquare$

Лемма 4. Пусть n фиксировано. Тогда при всех $\varepsilon>0$ существует такая константа d, что для всех $\lambda\in\mathbb{C}$, каждого $j=1,\ldots,n$ и всех $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\|\partial_j\varphi\|_{-1/2-\varepsilon}\leqslant d\|(-\Delta-\lambda)\varphi\|_{1/2+\varepsilon}. \tag{59}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $n=1$. Пусть $\lambda=-\mu^2$. Тогда по лемме 3

$$\left\|\frac{d}{dx}\varphi\right\|_{-1/2-\varepsilon}\leqslant\frac{1}{2}\left\|\left(\frac{d}{dx}-\mu\right)\varphi\right\|_{-1/2-\varepsilon}+\frac{1}{2}\left\|\left(\frac{d}{dx}+\mu\right)\varphi\right\|_{-1/2-\varepsilon}\leqslant$$
$$\leqslant c\left\|\left(-\frac{d^2}{dx^2}-\lambda\right)\varphi\right\|_{1/2+\varepsilon}.$$

Пусть теперь $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, и пусть $\psi(x_1, k_2, \ldots, k_n)$ — частичный фурье-образ φ по переменным $x_2, \ldots, x_n$:

$$\psi(x_1, k_2, \ldots, k_n)=(2\pi)^{-(n-1)/2}\int e^{-i\sum\limits_2^n k_jx_j}\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dx_2\ldots dx_n.$$

Применяя уже доказанный одномерный результат, при любых фиксированных $k_2, \ldots, k_n$ имеем

$$\int(1+x_1^2)^{-1/2-\varepsilon}|\partial_1\psi(x_1, k_2, \ldots, k_n)|^2\,dx_1\leqslant$$
$$\leqslant c\int(1+x_1^2)^{1/2+\varepsilon}|(-\partial_1^2+k_2^2+\ldots+k_n^2-\lambda)\psi|^2\,dx_1.$$

Интегрируя по $k_2, \ldots, k_n$ и применяя теорему Планшереля, мы видим, что

$$\int(1+x_1^2)^{-1/2-\varepsilon}|\partial_1\varphi(x)|^2\,d^nx\leqslant c\int(1+x_1^2)^{1/2+\varepsilon}|(-\Delta-\lambda)\varphi|^2\,d^nx.$$

Поскольку $(1+x^2)^{-1/2-\varepsilon}\leqslant(1+x_1^2)^{-1/2-\varepsilon}$ и $(1+x_1^2)^{1/2+\varepsilon}\leqslant\leqslant(1+x^2)^{1/2+\varepsilon}$, отсюда следует (59). ∎

Лемма 5. Пусть n фиксировано. Для любого компактного множества $K\subset\mathbb{C}\diagdown\{0\}$ существует такая константа c, что для всех $\lambda\in K$ и $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\|\varphi\|_{-1/2-\varepsilon}\leqslant c\,\|(-\Delta-\lambda)\varphi\|_{1/2+\varepsilon}. \tag{60}$$

Доказательство. Можно найти константу $c_1>0$, удовлетворяющую условию

$$\inf_{x\in\mathbb{R},\,\lambda\in K}[|x^2-\lambda|^2+|x|^2]\geqslant c_1^{-2}.$$

Поэтому для заданного $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

$$|\hat{\psi}(k_1, \ldots, k_n)|^2\leqslant c_1^2\left[|(\sum k_l^2-\lambda)\hat{\psi}(k_1, \ldots, k_n)|^2+\sum_{l=1}^n|k_l\hat{\psi}(k_1,\ldots,k_n)|^2\right].$$

Интегрируя это неравенство и применяя теорему Планшереля, получим

$$\|\psi\|^2 \leqslant c_1^2 \left[\|(-\Delta-\lambda)\psi\|^2 + \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j\psi\|^2\right] \tag{61a}$$

для всех $\lambda \in K$. Пусть α — положительное вещественное число, которое будет подобрано ниже. Положим $\delta = 1/2+\varepsilon$ и $\rho_\alpha = (1+\alpha x^2)^{1/2}$. Наконец, пусть $\varphi = (\rho_\alpha)^\delta \psi$. Тогда, в силу (61a),

$$\|\rho_\alpha^{-\delta}\varphi\| \leqslant c_1 \|(-\Delta-\lambda)\rho_\alpha^{-\delta}\varphi\| + c_1 \sum_{j=1}^{n} \|\partial_j \rho_\alpha^{-\delta}\varphi\|. \tag{61b}$$

Далее, $\partial_j\rho_\alpha^{-\delta}\varphi = \rho_\alpha^{-\delta}\partial_j\varphi - \delta\alpha x_j \rho_\alpha^{-\delta-1}\varphi$, так что

$$\|\partial_j\rho_\alpha^{-\delta}\varphi\| \leqslant \|\rho_\alpha^{-\delta}\partial_j\varphi\| + \alpha^{1/2}\delta \|\rho_\alpha^{-\delta}\varphi\|,$$

поскольку $|\alpha^{1/2}x_j\rho^{-1}| \leqslant 1$ для всех x. Аналогично (задача 67)

$$\|(-\Delta-\lambda)\rho_\alpha^{-\delta}\varphi\| \leqslant \|\rho_\alpha^{-\delta}(-\Delta-\lambda)\varphi\| + 2\delta\alpha^{1/2} \sum_{j=1}^{n} \|\rho_\alpha^{-\delta}\partial_j\varphi\| + \\ + d_{n,\varepsilon}\alpha \|\rho_\alpha^{-\delta}\varphi\|, \tag{62}$$

где единственное, что зависит от n и ε, — это $d_{n,\varepsilon}$. Возьмем α настолько малым, что $c_1(n\delta\alpha^{1/2} + d_{n,\varepsilon}\alpha) < 1/2$ и $\alpha < 1$. Тогда, в силу (61), для всех $\varphi \in \mathscr{S}$ и $\lambda \in K$

$$\frac{1}{2}\|\rho_\alpha^{-\delta}\varphi\| \leqslant c_2 \left| \|\rho_\alpha^{-\delta}(-\Delta-\lambda)\varphi\| + \sum_{j=1}^{n} \|\rho_\alpha^{-\delta}\partial_j\varphi\| \right|.$$

Поскольку $\rho^{-\delta} \leqslant \rho_\alpha^{-\delta} \leqslant \alpha^{-\delta/2}\rho^{-\delta}$, имеем

$$\|\varphi\|_{-\delta} \leqslant c_3 \left[\|(-\Delta-\lambda)\varphi\|_{-\delta} + \sum_j \|\partial_j\varphi\|_{-\delta}\right],$$

где c_3 не зависит от $\lambda \in K$ и $\varphi \in \mathscr{S}$. Поскольку $\|\cdot\|_{-\delta} \leqslant \|\cdot\|_\delta$ и $\|\partial_j\varphi\|_{-\delta} \leqslant c\|(-\Delta-\lambda)\varphi\|_\delta$ в силу леммы 4, то отсюда следует (60). ∎

Если теперь $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ и $\delta > 1/2$, то, по лемме 1, $(H_0-\lambda)^{-1}$ есть ограниченный оператор из L_δ^2 в L_δ^2. Лемма 5 гарантирует, что для $\lambda \in K = [a, b] \times (0, 1]$, где $a > 0$, имеет место основная оценка:

$$\|(H_0-\lambda)^{-1}\varphi\|_{-\delta} \leqslant c\|\varphi\|_\delta. \tag{63}$$

Коль скоро справедливо (63), естественно рассматривать граничные значения $\lim\limits_{y \downarrow 0}(H_0-x-iy)^{-1}$ как отображения из L_δ^2 в $L_{-\delta}^2$. Для данного доказательства не обязательны именно такие граничные значения, но они помогают выделить лежащие в его основе идеи, поэтому мы введем их. В качестве предварительного результата нам необходима

Лемма 6. Пусть $\delta > 3/2$, и пусть $0 < a < b$. Тогда существует такая константа c, что для всех $\varphi \in L^2_\delta$ и $\lambda = x + iy$, где $x \in [a, b]$ и $y \in (0, 1]$, справедливо неравенство

$$\|(H_0 - \lambda)^{-2}\varphi\|_{-\delta} \leqslant c\|\varphi\|_\delta.$$

Доказательство. Пусть A — оператор $\sum_{j=1}^{n} x_j \partial_j$. Тогда $[A, (H_0 - \lambda)] = -2H_0$, так что

$$[A, (H_0 - \lambda)^{-1}] = -(H_0 - \lambda)^{-1}[A, (H_0 - \lambda)](H_0 - \lambda)^{-1} = \\ = 2H_0 (H_0 - \lambda)^{-2} = 2(H_0 - \lambda)^{-1} + 2\lambda (H_0 - \lambda)^{-2},$$

где все выкладки становятся законными в применении к векторам из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Поскольку $(H_0 - \lambda)^{-1}$ равномерно ограничен как отображение из L^2_δ в $L^2_{-\delta}$, нужно только доказать, что $[A, (H_0 - \lambda)^{-1}]$ — ограниченный оператор из L^2_δ в $L^2_{-\delta}$ равномерно по λ в области $a \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant b$ и $0 < \operatorname{Im}\lambda \leqslant 1$. А потому достаточно доказать, что $\rho^{-\delta}(x_j\partial_j)(H_0 - \lambda)^{-1}\rho^{-\delta}$ ограничен на L^2 равномерно по λ. Напишем

$$(H_0 - \lambda)^{-1} = (H_0 + 1)^{-1} + (\lambda + 1)(H_0 + 1)^{-1}(H_0 - \lambda)^{-1}.$$

Конечно, $(\rho^{-\delta}x_j)[\partial_j(H_0 + 1)^{-1}]\rho^{-\delta}$ ограничен на L^2. Более того, оператор

$$\rho^{-1}x_j[\rho^{-\delta+1}(\partial_j(H_0 + 1)^{-1})\rho^{\delta-1}](\rho^{-\delta+1}(H_0 - \lambda)^{-1}\rho^{-\delta+1})\rho^{-1}$$

ограничен, поскольку первый и последний множители, как легко видеть, ограничены, третий ограничен по лемме 5, а ограниченность второго доказывается подобно лемме 1 (задача 66с). ∎

Лемма 7. Пусть $\delta > 1/2$, и пусть $x > 0$. Тогда предел $(H_0 - x - i0)^{-1} = \lim_{y \downarrow 0}(H_0 - x - iy)^{-1}$ существует в смысле нормы как отображение из L^2_δ в $L^2_{-\delta}$. Более того,

(a) оператор $V(H_0 - x - i0)^{-1}$ компактен как отображение из L^2_δ в L^2_δ, если V — агмонов потенциал, такой, что $\rho^{2\delta}V = W$ относительно H_0-компактен;

(b) $\operatorname{Im}(\varphi, (H_0 - x - i0)^{-1}\varphi) = (\pi/2)x^{1/2n-1} \int_{S^{n-1}} |\hat{\varphi}(x^{1/2}\Omega)|^2 d\Omega$, где $\hat{\varphi} \restriction S_{x^{1/2}}$ определено теоремой IX.39, а $d\Omega$ — обычная мера на сфере.

Доказательство. Пусть $\delta' = \delta + 1$. Тогда, понимая соответствующие операторы как отображения из $L^2_{\delta'}$ в $L^2_{-\delta'}$, имеем

$$\|(H_0 - \lambda_1)^{-1} - (H_0 - \lambda_2)^{-1}\| \leqslant |\lambda_2 - \lambda_1| \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|[H_0 - t\lambda_1 - (1 - t)\lambda_2]^{-2}\|.$$

Согласно лемме 6, $(H_0-x-iy)^{-1}$ — направленность Коши по норме при $y\downarrow 0$. Пусть $\delta''=\frac{1}{2}(\delta+\frac{1}{2})$. Тогда по лемме 5 оператор $(H_0-x-iy)^{-1}$ ограничен по норме при $y\downarrow 0$ как отображение из $L^2_{\delta''}$ в $L^2_{-\delta''}$. Поскольку $\delta''<\delta<\delta'$, можно провести интерполяцию между результатами для δ' и δ'' (см. пример 3 из дополнения к § IX.4) и заключить, что как отображения из L^2_δ в $L^2_{-\delta}$ операторы $(H_0-x-iy)^{-1}$ образуют направленность Коши по норме при $y\downarrow 0$. Чтобы доказать (а), напишем

$$W(H_0-x-i0)^{-1}=W(H_0+1)^{-1}+(x+1)\,W(H_0+1)^{-1}(H_0-x-i0)^{-1};$$

тогда по лемме 1 оператор $W(H_0-x-i0)^{-1}$ компактен как отображение из L^2_δ в $L^2_{-\delta}$. Поскольку $\rho^{-2\delta}$ — изометрия из $L^2_{-\delta}$ в L^2_δ, отсюда следует (а). Наконец, (b) выполняется в силу формулы (V.4) (см. также задачу 22 к гл. V) для $\varphi\in\mathscr{S}$. По теореме IX.39 это равенство продолжается тогда на все $\varphi\in L^2_\delta$. ∎

Лемма 8. Пусть $\delta>1/2$, и пусть $\varphi\in L^2_\delta$ удовлетворяет уравнению $\varphi=-V(H_0-x-i0)^{-1}\varphi$, где $x>0$, а V — агмонов потенциал, такой, что оператор $\rho^{2\delta}V=W$ относительно H_0-компактен, и где $V(H_0-x-i0)^{-1}$ понимается как композиция отображений $W(H_0-x-i0)^{-1}$ из L^2_δ в $L^2_{-\delta}$ и $\rho^{-2\delta}$ из $L^2_{-\delta}$ в L^2_δ. Тогда

(a) $\psi\equiv(H_0-x-i0)^{-1}\varphi$ принадлежит L^2;

(b) если $\varphi\neq 0$, то x — собственное значение $H=H_0+V$ как оператора в L^2.

Доказательство очень похоже на доказательство пункта (а) теоремы XIII.33. Поскольку

$$(H_0-x-i0)^{-1}=(H_0+1)^{-1}+(x+1)(H_0+1)^{-1}(H_0-x-i0)^{-1},$$

то $\psi\in(H_0+1)^{-1}[L^2_{-\delta}]$, так что $W\psi\in L^2_{-\delta}$ по лемме 1. Следовательно, интеграл $\int V(\xi)\,|\psi(\xi)|^2\,d\xi=(\rho^{-\delta}\psi,\rho^{-\delta}W\psi)$ абсолютно сходится и, очевидно, веществен. Но $V\psi=-\varphi$, так что $(\varphi,(H_0-x-$ $-i0)^{-1}\varphi)$ вещественно. В силу пункта (b) леммы 7, $\hat\varphi\restriction S_{x^{1/2}}\equiv 0$. Таким образом, применима теорема IX.41, и можно провести следующее построение типа «бутстрапа». Пусть $\delta=1/2+\varepsilon$. Поскольку $\varphi\in L^2_\delta$, то $\psi\in L^2_{\delta-1-\varepsilon}$ по теореме IX.41. Применяя лемму 1 и равенство

$$W\psi=W(H_0+1)^{-1}\varphi+(x+1)\,W(H_0+1)^{-1}\psi,$$

мы видим, что и $W\psi\in L^2_{\delta-1-\varepsilon}$. Итак, $\varphi=-V\psi=-\rho^{2\delta}W\psi$ принадлежит $L^2_{\delta-1-\varepsilon+2\delta}=L^2_{\delta+\varepsilon}$. С помощью этого рассуждения оценка улучшается: вместо $\varphi\in L^2_\delta$ получаем $\varphi\in L^2_{\delta+\varepsilon}$. Ничто не мешает нам проделать то же самое еще раз! Итак, $\varphi\in L^2_{\delta+n\varepsilon}$ для всех n, а потому $\psi\in L^2_{\delta-1+(n-1)\varepsilon}$ для всех n. В частности, $\psi\in L^2$. Для

$\eta \in \mathscr{S}$ имеем

$$(H_0\eta, \psi) = \lim_{y \downarrow 0} (\eta, H_0 (H_0 - x - iy)^{-1}\varphi) = \lim_{y \downarrow 0} (\eta, (x+iy)\psi + \varphi) = \\ = (\eta, x\psi + \varphi).$$

Следовательно, $\psi \in D(H_0)$ и $H_0\psi = x\psi + \varphi = x\psi - V\psi$, так что x — собственное значение H как оператора в L^2. ∎

Завершение доказательства теоремы XIII.33. Выберем $\delta > 1/2$, так что $\rho^{2\delta}V = W$ относительно H_0-компактен. Для заданного компактного подынтервала $K \subset (0, \infty)\setminus\mathscr{E}_+$ рассмотрим операторнозначную функцию $A(\mu) = V(H_0 - \mu)^{-1}$ на $K \times [0, 1]$, где $(H_0 - \mu)^{-1}$ понимается как $(H_0 - \mu - i0)^{-1}$, если $\operatorname{Im}\mu = 0$. Тогда $A(\mu)$ — функция со значениями во множестве компактных операторов на L^2_δ, непрерывная в области $K \times [0, 1]$ и аналитическая внутри нее. Более того, уравнение $A(\mu)\varphi = -\varphi$ не имеет ненулевых решений при $\mu \in K \times [0, 1]$. Когда $\operatorname{Im}\mu = 0$, это следует из предположения, что $K \cap \mathscr{E}_+ = \varnothing$, и леммы 8. Когда $\operatorname{Im}\mu \neq 0$, это вытекает из формулы $(1 + V(H_0 - \mu)^{-1})(H_0 - \mu) = H - \mu$ и обратимости (по лемме 1) $H_0 - \mu$ и $H - \mu$ как отображений из L^2_δ в $L^{2\delta}$. Простое обобщение аналитической теоремы Фредгольма (теорема VI.14) показывает, что $(1 + A(\mu))^{-1}$ — непрерывная функция на $K \times [0, 1]$; в частности, она равномерно ограничена. Но при $\operatorname{Im}\mu \neq 0$ имеем $(H - \mu)^{-1} = (H_0 - \mu)^{-1}(1 + A(\mu))^{-1}$. Поскольку оператор $(H_0 - \mu)^{-1}$ по лемме 5 равномерно ограничен как отображение из L^2_δ в $L^2_{-\delta}$, а $(1 + A(\mu))^{-1}$ равномерно ограничен как отображение из L^2_δ в L^2_δ, то $(H - \mu)^{-1}$ — равномерно ограниченный оператор из L^2_δ в $L^2_{-\delta}$ при $\mu \in K \times [0, 1]$. А это просто другая формулировка пункта (b) доказываемой теоремы. ∎

XIII.9. Спектр тензорных произведений операторов

В § VIII.10 мы доказали, что если A и B — самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ с областями определения D_1 и D_2, то оператор $A \otimes I + I \otimes B$ в существенном самосопряжен на $D_1 \otimes D_2$ и спектр $\sigma(A \otimes I + I \otimes B) = \sigma(A) + \sigma(B)$. Цель данного раздела — распространить этот результат на случай, когда A и B m-секториальны (см. § VIII.6). При этом мы будем пользоваться связью между m-секториальными операторами и ограниченными голоморфными полугруппами (см. § X.8). В самосопряженном случае доказательство было «легким» в том смысле, что утверждение было довольно прямым следствием спектральной теоремы. В m-секториальном случае вместо спектральной теоремы применяется теория коммутативных банаховых алгебр и формулы преобразования Лапласа, связывающие ограниченные голоморфные полугруппы с резольвентами их генераторов. Литературные ссылки в связи с коммутативными банахо-