$\eta \in \mathscr{S}$ имеем

$$(H_0\eta, \psi) = \lim_{y \downarrow 0} (\eta, H_0(H_0 - x - iy)^{-1}\varphi) = \lim_{y \downarrow 0} (\eta, (x+iy)\psi + \varphi) = \\ = (\eta, x\psi + \varphi).$$

Следовательно, $\psi \in D(H_0)$ и $H_0\psi = x\psi + \varphi = x\psi - V\psi$, так что x — собственное значение H как оператора в L^2. ∎

Завершение доказательства теоремы XIII.33. Выберем $\delta > 1/2$, так что $\rho^{2\delta}V = W$ относительно H_0-компактен. Для заданного компактного подынтервала $K \subset (0, \infty) \setminus \mathscr{E}_+$ рассмотрим операторнозначную функцию $A(\mu) = V(H_0 - \mu)^{-1}$ на $K \times [0, 1]$, где $(H_0 - \mu)^{-1}$ понимается как $(H_0 - \mu - i0)^{-1}$, если $\operatorname{Im} \mu = 0$. Тогда $A(\mu)$ — функция со значениями во множестве компактных операторов на L^2_δ, непрерывная в области $K \times [0, 1]$ и аналитическая внутри нее. Более того, уравнение $A(\mu)\varphi = -\varphi$ не имеет ненулевых решений при $\mu \in K \times [0, 1]$. Когда $\operatorname{Im} \mu = 0$, это следует из предположения, что $K \cap \mathscr{E}_+ = \varnothing$, и леммы 8. Когда $\operatorname{Im} \mu \neq 0$, это вытекает из формулы $(1 + V(H_0 - \mu)^{-1})(H_0 - \mu) = H - \mu$ и обратимости (по лемме 1) $H_0 - \mu$ и $H - \mu$ как отображений из L^2_δ в $L^{2\delta}$. Простое обобщение аналитической теоремы Фредгольма (теорема VI.14) показывает, что $(1 + A(\mu))^{-1}$ — непрерывная функция на $K \times [0, 1]$; в частности, она равномерно ограничена. Но при $\operatorname{Im} \mu \neq 0$ имеем $(H - \mu)^{-1} = (H_0 - \mu)^{-1}(1 + A(\mu))^{-1}$. Поскольку оператор $(H_0 - \mu)^{-1}$ по лемме 5 равномерно ограничен как отображение из L^2_δ в $L^2_{-\delta}$, а $(1 + A(\mu))^{-1}$ равномерно ограничен как отображение из L^2_δ в L^2_δ, то $(H - \mu)^{-1}$ — равномерно ограниченный оператор из L^2_δ в $L^2_{-\delta}$ при $\mu \in K \times [0, 1]$. А это просто другая формулировка пункта (b) доказываемой теоремы. ∎

XIII.9. Спектр тензорных произведений операторов

В § VIII.10 мы доказали, что если A и B — самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ с областями определения D_1 и D_2, то оператор $A \otimes I + I \otimes B$ в существенном самосопряжен на $D_1 \otimes D_2$ и спектр $\sigma(A \otimes I + I \otimes B) = \sigma(A) + \sigma(B)$. Цель данного раздела — распространить этот результат на случай, когда A и B m-секториальны (см. § VIII.6). При этом мы будем пользоваться связью между m-секториальными операторами и ограниченными голоморфными полугруппами (см. § X.8). В самосопряженном случае доказательство было «легким» в том смысле, что утверждение было довольно прямым следствием спектральной теоремы. В m-секториальном случае вместо спектральной теоремы применяется теория коммутативных банаховых алгебр и формулы преобразования Лапласа, связывающие ограниченные голоморфные полугруппы с резольвентами их генераторов. Литературные ссылки в связи с коммутативными банаховыми алгебрами читатель найдет в Замечаниях. Этот раздел состоит из двух частей. В первой части мы доказываем, что $\sigma(A\otimes B)=\sigma(A)\sigma(B)$, если A и B — ограниченные операторы на $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$. Во второй части этот результат применяется к тензорному произведению $e^{-tA}\otimes e^{-tB}$, где A и B — генераторы ограниченных голоморфных полугрупп, чтобы получить требуемое утверждение для m-секториальных операторов.

Пусть A — ограниченный оператор на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Обозначим через $\mathscr{R}(A)$ банахову алгебру операторов, порождаемую единицей и всеми резольвентами A, т. е. $\mathscr{R}(A)$ есть не что иное, как замыкание по операторной норме семейства полиномов от конечного числа переменных по резольвентам A в различных точках. Это коммутативная банахова алгебра, которая содержит A, поскольку $\lambda^2(\lambda-A)^{-1}-\lambda I\to A$ по норме при $\lambda\to\infty$. Поскольку все резольвенты A лежат в $\mathscr{R}(A)$, имеем $\sigma(A)=\sigma_{\mathscr{R}(A)}(A)$, где $\sigma_{\mathscr{R}(A)}(A)$ обозначает гельфандов спектр A по отношению к $\mathscr{R}(A)$.

Пусть $\mathscr{R}(A)$ и $\mathscr{R}(B)$ — резольвентные алгебры операторов A и B на $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ соответственно. Тогда, если $C\in\mathscr{R}(A)$ и $D\in\mathscr{R}(B)$, то $C\otimes D$ — корректно определенный ограниченный оператор на $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ и $\|C\otimes D\|=\|C\|\|D\|$ (см. второе предложение из § VIII.10). Обозначим через $\mathscr{A}$ замыкание по норме в $\mathscr{L}(\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2)$ конечных линейных комбинаций таких операторов $C\otimes D$. Тогда $\mathscr{A}$ — коммутативная банахова алгебра, а отображения $A\mapsto A\otimes I$, $B\mapsto I\otimes B$ — изометрические изоморфизмы, вкладывающие $\mathscr{R}(A)$ и $\mathscr{R}(B)$ в $\mathscr{A}$. Если $\lambda\in\sigma(A\otimes B)$, то λ тем более лежит в спектре $A\otimes B$ по отношению к алгебре $\mathscr{A}$, так что, согласно теории Гельфанда, на $\mathscr{A}$ имеется такой мультипликативный линейный функционал l, что $\lambda=l(A\otimes B)=l(A\otimes I)\,l(I\otimes B)$. Поскольку сужения l на $\mathscr{R}(A)\otimes I$ и $I\otimes\mathscr{R}(B)$ мультипликативны, то $l(A\otimes I)\in\in\sigma(A)$ и $l(I\otimes B)\in\sigma(B)$. Это показывает, что

$$\sigma(A\otimes B)\subset\sigma(A)\sigma(B)\equiv\{\lambda_1\lambda_2\mid\lambda_1\in\sigma(A),\ \lambda_2\in\sigma(B)\}. \tag{64}$$

Чтобы доказать обратное включение, придется потрудиться немножко больше. Введем сначала новое подмножество спектра.

Определение. Пусть A — замкнутый линейный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть S — множество таких $\lambda\in\mathbb{C}$, что для некоторой константы $c_\lambda>0$ выполняется $\|(A-\lambda)\varphi\|\geqslant c_\lambda\|\varphi\|$ для всех $\varphi\in D(A)$. Определим **аппроксимативно точечный спектр** как $\sigma_{ap}(A)\equiv\mathbb{C}\setminus S$. Определим, кроме того, $\sigma_r(A)\equiv\sigma(A)\setminus\sigma_{ap}(A)$.

Термин «аппроксимативно точечный спектр» выбран потому, что если $\lambda\in\sigma_{ap}(A)$, то существует последовательность $\varphi_n\in D(A)$, $\|\varphi_n\|=1$, такая, что $(A-\lambda)\varphi_n\to 0$. Читатель может проверить сам, что σ_r — подмножество остаточного спектра, определенного в § VI.3.

Следующая лемма содержит два важных свойства $\sigma_r(A)$.

Лемма 1. (a) Если $\lambda\in\sigma_r(A)$, то $\bar\lambda\in\sigma_{ap}(A^*)$.
(b) Множество $\sigma_r(A)$ открыто.

Доказательство. Часть (a) доказать легко. Действительно, пусть $\lambda\in\sigma_r(A)$. Поскольку оператор $A-\lambda$ необратим, а $\|(A-\lambda)\varphi\|\geqslant c_\lambda\|\varphi\|$ для некоторого $c_\lambda>0$, то $\operatorname{Ran}(\lambda-A)$ не плотно. Поэтому $\bar\lambda$ лежит в точечном спектре оператора A^*.

Для доказательства (b) предположим, что $\lambda\in\sigma_r(A)$. Тогда, поскольку $\|(A-\lambda)\varphi\|\geqslant c_\lambda\|\varphi\|$, множество $\operatorname{Ran}(A-\lambda)$ — замкнутое подпространство в $\mathscr{H}$; но $\lambda\in\sigma_r(A)$, поэтому $\operatorname{Ran}(A-\lambda)\neq\mathscr{H}$. Далее, если $|z|\leqslant c_\lambda/2$, то $\|(A-(\lambda+z))\varphi\|\geqslant{}^1/_2c_\lambda\|\varphi\|$, так что для доказательства того, что $\lambda+z\in\sigma_r(A)$ при достаточно малых z, нужно только показать, что $\operatorname{Ran}(A-(\lambda+z))\neq\mathscr{H}$. Предположим, что $\operatorname{Ran}(A-(\lambda+z))=\mathscr{H}$, и пусть $\psi\in[\operatorname{Ran}(A-\lambda)]^\perp$ и $\|\psi\|=1$. Тогда существует вектор $\varphi_z\in\mathscr{H}$, такой, что $(A-(\lambda+z))\varphi_z=\psi$ и $\|(A-(\lambda+z))\varphi_z\|\geqslant{}^1/_2c_\lambda\|\varphi_z\|$, если $|z|\leqslant c_\lambda/2$. Таким образом, $\|\varphi_z\|\leqslant 2/c_\lambda$. К тому же

$$1=\|\psi\|^2=((A-(\lambda+z))\varphi_z,\psi)=-z(\varphi_z,\psi)\leqslant|z|\|\varphi_z\|\leqslant|z|\frac{2}{c_\lambda}.$$

Для малых z тем самым получается противоречие, так что $\operatorname{Ran}(A-(\lambda+z))\neq\mathscr{H}$, если z достаточно мало. ∎

Заметим, что, как отмечено выше при доказательстве теоремы X.1, из доказательства пункта (b) видно, что коразмерность множества $\operatorname{Ran}(A-\lambda)$ постоянна на каждой компоненте связности $\sigma_r(A)$.

Лемма 2. Пусть A и B — ограниченные операторы. Пусть $\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle$ — внутренняя точка множества $\sigma(A)\times\sigma(B)$, причем $\lambda_1\neq0$. Тогда существует точка $\langle\lambda_1',\lambda_2'\rangle$ на топологической границе $\sigma(A)\times\sigma(B)$, такая, что $\lambda_1\lambda_2=\lambda_1'\lambda_2'$.

Доказательство. Пусть $s_1=\sup\{t\in\mathbb{R}\mid t\lambda_1\in\sigma(A)\}$, $s_2=\sup\{t\in\mathbb{R}\mid \lambda_2/t\in\sigma(B)\}$ и $s=\min\{s_1,s_2\}$. Поскольку A ограничен, то $s_1<\infty$, а тогда и $s<\infty$. Поскольку либо $s\lambda_1$ лежит на $\partial\sigma(A)$ — топологической границе $\sigma(A)$, либо λ_2/s лежит на $\partial\sigma(B)$, то $\langle s\lambda_1,\lambda_2/s\rangle$ лежит на топологической границе $\sigma(A)\times\sigma(B)$. ∎

Теорема XIII.34. Пусть A и B — ограниченные операторы на гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ соответственно. Тогда $\sigma(A\otimes B)=\sigma(A)\sigma(B)$.

Доказательство. Поскольку уже доказано равенство (64), осталось лишь показать, что $\sigma(A)\sigma(B)\subset\sigma(A\otimes B)$. Пусть $\lambda_1\in\sigma(A)$ и $\lambda_2\in\sigma(B)$. Если $\lambda_1=0$, то, как легко видеть, $0\in\sigma(A\otimes B)$, так что предположим, что $\lambda_1\neq0\neq\lambda_2$. По лемме 2 можно считать, что $\langle\lambda_1, \lambda_2\rangle$ лежит на топологической границе множества $\sigma(A)\times\sigma(B)$. Без потери общности допустим, что $\lambda_1\in\partial\sigma(A)$. Поскольку $\sigma(A)$ замкнуто, то $\lambda_1\in\sigma(A)$. С другой стороны, $\sigma_r(A)$ открыто, так что $\lambda_1\in\sigma_{ap}(A)$ и аналогично $\bar\lambda_1\in\sigma_{ap}(A^*)$. Теперь у нас два случая, которые надо рассмотреть отдельно. Предположим, что $\lambda_2\in\sigma_{ap}(B)$. Тогда существует последовательность $\varphi_n\in\mathcal{H}_1$ с $\|\varphi_n\|=1$ и $(A-\lambda_1)\varphi_n\to 0$ и последовательность $\psi_n\in\mathcal{H}_2$ с $\|\psi_n\|=1$ и $(B-\lambda_2)\psi_n\to 0$. Положим $\eta_n=\varphi_n\otimes\psi_n$. Тогда

$$(A\otimes B-\lambda_1\lambda_2 I)\eta_n=(A-\lambda_1)\varphi_n\otimes B\psi_n+\lambda_1\varphi_n\otimes(B-\lambda_2)\psi_n\to 0$$

$$\text{при } n\to\infty.$$

Итак, $\lambda_1\lambda_2\in\sigma_{ap}(A\otimes B)$. Напротив, предположим теперь, что $\lambda_2\in\sigma_r(B)$. Тогда $\bar\lambda_2\in\sigma_{ap}(B^*)$ и $\bar\lambda_1\in\sigma_{ap}(A^*)$. То же построение, что и выше, показывает, что $\bar\lambda_1\bar\lambda_2\in\sigma_{ap}((A\otimes B)^*)\subset\sigma(A^*\otimes B^*)$. Значит, $\lambda_1\lambda_2\in\sigma(A\otimes B)$ по теореме VI.7. ∎

Мы воспользуемся теоремой XIII.34, чтобы доказать, что $\sigma(A\otimes I+I\otimes B)=\sigma(A)+\sigma(B)$; при этом сначала мы получим отображения спектров, которые свяжут спектр генератора ограниченной голоморфной полугруппы со спектром его резольвенты, а также самой полугруппы. Пусть C порождает ограниченную голоморфную полугруппу на банаховом пространстве X; положим $\mathscr{C}\equiv\{e^{-tC}\mid t\geqslant 0\}''$, где $\{\cdot\}'$ означает коммутант семейства операторов, а $\{\cdot\}''$ — двойной коммутант. В явной записи:

$$\mathscr{A}'=\{B\mid AB=BA \text{ для всех } A\in\mathscr{A}\},\qquad \mathscr{A}''=\{\mathscr{A}'\}'.$$

Лемма 3. Если C — генератор ограниченной голоморфной полугруппы, то

$$\mathscr{C}\equiv\{e^{-tC}\mid t\geqslant 0\}''=\{R_\lambda(C)\mid\lambda\in\rho(C)\}''.$$

Более того, $\mathscr{C}$ — абелева банахова алгебра.

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\{e^{-tC}\mid t\geqslant 0\}'=\{R_\lambda(C)\mid\lambda\in\rho(C)\}'.$$

Это легко следует из (X.98):

$$(\lambda+C)^{-1}\varphi=\int_0^\infty e^{-\lambda t}e^{-tC}\varphi\,dt$$

и (X.102):

$$e^{-zC}=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda z}(\lambda-C)^{-1}\,d\lambda,$$

где Γ — подходящий путь.

Последнее утверждение леммы представляет собой общий факт из теории операторных алгебр. Поскольку полугруппа

$\{e^{-tC} \mid t \geqslant 0\}$ абелева, то $\{e^{-tC} \mid t \geqslant 0\} \subset \{e^{-tC} \mid t \geqslant 0\}'$. Таким образом, $\{e^{-tC} \mid t \geqslant 0\}'' \subset \{e^{-tC} \mid t \geqslant 0\}'$. Следовательно, если A и B принадлежат $\{e^{-tC} \mid t \geqslant 0\}''$, то A принадлежит $\{e^{-tC} \mid t \geqslant 0\}'$, так что A и B коммутируют. ∎

Поскольку алгебра $\mathscr{C}$ — коммутант, она обладает следующим очень важным свойством. Гельфандов спектр по отношению к этой алгебре любого оператора $D \in \mathscr{C}$ совпадает с его спектром как оператора на X. Причина этого в том, что, когда D коммутирует с $\{e^{-tC} \mid t \geqslant 0\}'$, все резольвенты D также коммутируют с $\{e^{-tC} \mid t \geqslant 0\}'$, т. е. все они лежат в $\mathscr{C}$. Поэтому для элемента $D \in \mathscr{C}$ мы будем писать просто $\sigma(D)$, имея в виду его спектр по отношению к $\mathscr{C}$.

Следующая лемма есть, по существу, переформулировка леммы 2 из § 4.

Лемма 4. Пусть C — замкнутый оператор с непустым резольвентным множеством на банаховом пространстве X. Предположим, что $\lambda \in \rho(C)$, и рассмотрим h: $z \mapsto (\lambda - z)^{-1}$ как отображение расширенной комплексной плоскости на себя. Тогда

(a) если C ограничен, то h — гомеоморфизм $\sigma(C)$ на $\sigma((\lambda - C)^{-1})$;

(b) если C не ограничен, то h — гомеоморфизм $\sigma(C) \cup \{\infty\}$ на $\sigma((\lambda - C)^{-1})$.

Теперь мы в состоянии доказать теорему об отображении спектра для полугруппы, порождаемой оператором C.

Лемма 5. Пусть C — генератор ограниченной голоморфной полугруппы на банаховом пространстве X. Тогда

(a) $\sigma(e^{-tC}) = e^{-t\sigma(C)} \equiv \{e^{-tz} \mid z \in \sigma(C)\}$, если C ограничен;

(b) $\sigma(e^{-tC}) = e^{-t\sigma(C)} \cup \{0\}$, если C неограничен.

Доказательство. Если l принадлежит множеству $\sigma(\mathscr{C})$ мультикативных линейных функционалов на $\mathscr{C}$, то первая резольвентная формула показывает, что либо $l((\lambda - C)^{-1}) = 0$ для всех $\lambda \in \rho(C)$, либо это не выполняется ни для одного $\lambda \in \rho(C)$. Пусть $\mathscr{M}_\infty = \{l \in \sigma(\mathscr{C}) \mid l((\lambda - C)^{-1}) = 0\}$ и $\mathscr{M}_0 = \sigma(\mathscr{C}) \setminus \mathscr{M}_\infty$. Для $l \in \mathscr{M}_0$ определим

$$\hat{C}(l) = \lambda - [l((\lambda - C)^{-1})]^{-1}.$$

Из первой резольвентной формулы следует, что это определение не зависит от того, какое выбрано $\lambda \in \rho(C)$. Поскольку $l((\lambda - C)^{-1}) = 0$ при $l \in \mathscr{M}_\infty$ и $l((\lambda - C)^{-1}) = (\lambda - \hat{C}(l))^{-1}$ при $l \in \mathscr{M}_0$, отсюда следует, что в случае, когда C неограничен, $\sigma((\lambda - C)^{-1}) = \{(\lambda - \hat{C}(l))^{-1} \mid l \in \mathscr{M}_0\} \cup \{0\}$. Итак, по лемме 4, $\sigma(C) = \operatorname{Ran} \hat{C} \restriction \mathscr{M}_0$. То же самое справедливо, если C ограничен. Допустим теперь, что $l \in \mathscr{M}_0$; тогда по (X.102) и теореме Коши

$$l(e^{-tC})=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{-\lambda t} l\left((\lambda-C)^{-1}\right) d\lambda=e^{-\lambda \hat{C}(l)}.$$

Если $l \in \mathcal{M}_\infty$, та же формула показывает, что $l(e^{-tC})=0$ для всех $t>0$. Поскольку $\sigma(e^{-tC})=\{l(e^{-tC}) \mid l \in \sigma(\mathscr{C})\}$, заключаем, что $\sigma(e^{-tC})=e^{-t\sigma(C)} \cup \{0\}$, если C неограничен, и $\sigma(e^{-tC})=e^{-t\sigma(C)}$, если C ограничен. ∎

Следующая теорема и ее доказательство обобщаются на случай банаховых пространств. Мы же формулируем и доказываем ее только для случая гильбертовых пространств, поскольку не рассматривали тензорные произведения банаховых пространств, а также потому, что случай гильбертовых пространств — это все, что потребуется нам в следующем разделе.

Теорема XIII.35. Пусть A и B — генераторы ограниченных голоморфных полугрупп на гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$. Пусть C — замыкание оператора $A \otimes I+I \otimes B$, определенного на $D(A) \otimes D(B)$. Тогда C порождает ограниченную голоморфную полугруппу и

$$\sigma(C)=\sigma(A)+\sigma(B).$$

Доказательство. Предположим, что e^{-zA} и e^{-zB} — ограниченные голоморфные полугруппы с углами θ_1 и θ_2 соответственно. Тогда $W(z)=e^{-zA} \otimes e^{-zB}$ — ограниченная голоморфная полугруппа с углом $\theta=\min\{\theta_1, \theta_2\}$. Пусть G — генератор $W(z)$. Полугруппа $W(t)$ сильно дифференцируема на $D(A) \otimes D(B)$ и $G \restriction D(A) \otimes D(B)=$ $=A \otimes I+I \otimes B$. Поскольку $W(z)$: $D(A) \otimes D(B) \rightarrow D(A) \otimes D(B)$, то из теоремы X.49 следует, что $D(A) \otimes D(B)$ — существенная область определения для G. Таким образом, $G=C$.

По теореме XIII.34, $\sigma(e^{-tC})=\sigma(e^{-tA}) \sigma(e^{-tB})$. Следовательно, по лемме 5,

$$e^{-t\sigma(C)}=\tilde{\sigma}(e^{-tC})=\tilde{\sigma}(e^{-tA}) \tilde{\sigma}(e^{-tB})=e^{-t(\sigma(A)+\sigma(B))},$$

где $\tilde{\sigma}(\cdot)$ обозначает $\sigma(\cdot) \setminus \{0\}$. Итак, если $\mu \in \sigma(A)$ и $\lambda \in \sigma(B)$, то для всех t существует такое $\gamma_t \in \sigma(C)$, что $e^{-t\gamma_t}=e^{-t(\mu+\lambda)}$, т. е. $\gamma_t=\mu+\lambda+t^{-1} 2\pi i n_t$, где n_t — целое. Поскольку $\gamma_t \in \bar{S}_{1/2\pi-\theta}=$ $=\{z \mid |\arg z| \leqslant 1/2\pi-\theta\}$, то n_t должно быть нулем при достаточно малом t. Итак, $\gamma=\mu+\lambda \in \sigma(C)$. Обратно, предположим, что $\gamma \in \sigma(C)$. Тогда для каждого t существуют такое $\mu_t \in \sigma(A) \subset \bar{S}_{1/2\pi-\theta}$ и такое $\lambda_t \in \sigma(B) \subset \bar{S}_{1/2\pi-\theta}$, что $\gamma=\mu_t+\lambda_t+t^{-1} 2\pi i n_t'$, где n_t' — целое. Поскольку γ, μ_t, $\lambda_t \in \bar{S}_{1/2\pi-\theta}$, снова видно, что при достаточно малом t мы имеем $\gamma=\mu_t+\lambda_t$. Итак, $\sigma(C)=\sigma(A)+\sigma(B)$. ∎

Следствие 1. Если A и B — ограниченные операторы на гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, то

$$\sigma(A \otimes I + I \otimes B) = \sigma(A) + \sigma(B).$$

Доказательство. $A + 2\|A\|$ и $B + 2\|B\|$ порождают ограниченные голоморфные полугруппы, так что по предыдущей теореме

$$\sigma(A \otimes I + I \otimes B) + 2\|A\| + 2\|B\| = \sigma((A + 2\|A\|) \otimes I + I \otimes (B + 2\|B\|)) = \sigma(A + 2\|A\|) + \sigma(B + 2\|B\|) = \sigma(A) + \sigma(B) + 2\|A\| + 2\|B\|. \blacksquare$$

Следствие 2 (лемма Итиносэ). Пусть $\bar{S}_{\omega,\varphi,\theta}$ обозначает сектор $\{z \mid \varphi - \theta \leqslant \arg(z - \omega) \leqslant \varphi + \theta,\ \theta < \pi/2\}$. Пусть A и B — строго m-секториальные операторы на гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ с секторами $\bar{S}_{\omega_1,\varphi,\theta_1}$ и $\bar{S}_{\omega_2,\varphi,\theta_2}$ (одно и то же φ!). Пусть C — замыкание оператора $A \otimes I + I \otimes B$, определенного на $D(A) \otimes D(B)$. Тогда C — строго m-секториальный оператор с сектором $\bar{S}_{\omega_1+\omega_2,\varphi,\min\{\theta_1,\theta_2\}}$ и $\sigma(C) = \sigma(A) + \sigma(B)$.

Доказательство. Утверждение немедленно получается, если сдвинуть и повернуть A и B так, чтобы они стали строго m-аккретивны, а затем применить следствие 1 теоремы X.52 и предыдущую теорему. ∎

XIII.10. Отсутствие сингулярного спектра IV: потенциалы, аналитические относительно масштабных преобразований

До сих пор мы доказали отсутствие сингулярного спектра для трех типов операторов Шредингера: широкого класса двухчастичных операторов, n-частичных систем с потенциалами отталкивания и n-частичных систем со слабыми потенциалами. Общее свойство всех этих систем — наличие только одного канала рассеяния, или, что эквивалентно, отсутствие связанных состояний у их подсистем. В этом разделе мы обсудим один метод доказательства отсутствия сингулярного спектра для многоканальных n-частичных систем, где $n \geqslant 3$. Класс парных взаимодействий, который можно здесь исследовать, весьма узок, однако он содержит кулонов потенциал и обобщенный потенциал Юкавы.

Определение. Группа унитарных операторов $u(\theta)$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$, задаваемых посредством

$$(u(\theta)\psi)(r) = e^{3\theta/2}\psi(e^{\theta}r),$$

называется **группой операторов масштабных преобразований (растяжений) на $\mathbb{R}^3$.**