Следствие 1. Если A и B — ограниченные операторы на гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, то

$$\sigma(A \otimes I + I \otimes B) = \sigma(A) + \sigma(B).$$

Доказательство. $A + 2\|A\|$ и $B + 2\|B\|$ порождают ограниченные голоморфные полугруппы, так что по предыдущей теореме

$$\sigma(A \otimes I + I \otimes B) + 2\|A\| + 2\|B\| = \sigma((A + 2\|A\|) \otimes I + I \otimes (B + 2\|B\|)) = \sigma(A + 2\|A\|) + \sigma(B + 2\|B\|) = \sigma(A) + \sigma(B) + 2\|A\| + 2\|B\|. \blacksquare$$

Следствие 2 (лемма Итиносэ). Пусть $\bar{S}_{\omega,\varphi,\theta}$ обозначает сектор $\{z \mid \varphi - \theta \leqslant \arg(z - \omega) \leqslant \varphi + \theta,\ \theta < \pi/2\}$. Пусть A и B — строго m-секториальные операторы на гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ с секторами $\bar{S}_{\omega_1,\varphi,\theta_1}$ и $\bar{S}_{\omega_2,\varphi,\theta_2}$ (одно и то же φ!). Пусть C — замыкание оператора $A \otimes I + I \otimes B$, определенного на $D(A) \otimes D(B)$. Тогда C — строго m-секториальный оператор с сектором $\bar{S}_{\omega_1+\omega_2,\varphi,\min\{\theta_1,\theta_2\}}$ и $\sigma(C) = \sigma(A) + \sigma(B)$.

Доказательство. Утверждение немедленно получается, если сдвинуть и повернуть A и B так, чтобы они стали строго m-аккретивны, а затем применить следствие 1 теоремы X.52 и предыдущую теорему. ■

XIII.10. Отсутствие сингулярного спектра IV: потенциалы, аналитические относительно масштабных преобразований

До сих пор мы доказали отсутствие сингулярного спектра для трех типов операторов Шредингера: широкого класса двухчастичных операторов, n-частичных систем с потенциалами отталкивания и n-частичных систем со слабыми потенциалами. Общее свойство всех этих систем — наличие только одного канала рассеяния, или, что эквивалентно, отсутствие связанных состояний у их подсистем. В этом разделе мы обсудим один метод доказательства отсутствия сингулярного спектра для многоканальных n-частичных систем, где $n \geqslant 3$. Класс парных взаимодействий, который можно здесь исследовать, весьма узок, однако он содержит кулонов потенциал и обобщенный потенциал Юкавы.

Определение. Группа унитарных операторов $u(\theta)$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$, задаваемых посредством

$$(u(\theta)\psi)(r) = e^{3\theta/2}\psi(e^{\theta} r),$$

называется **группой операторов масштабных преобразований (растяжений) на $\mathbb{R}^3$.**

Множитель $e^{3\theta/2}$ введен для того, чтобы сделать u унитарными. На протяжении этого раздела $u(\theta)$ будет всюду обозначать введенное семейство операторов.

Идея, лежащая в основе применения масштабных преобразований в спектральном анализе, состоит в том, что при их действии очень просто преобразуется кинетическая энергия $H_0 = -\Delta$. Действительно,

$$u(\theta) H_0 u(\theta)^{-1} = e^{-2\theta} H_0 \equiv H_0(\theta).$$

Из этого равенства следует, что оператор $u(\theta) H_0 u(\theta)^{-1}$, определенный a priori при вещественных θ, допускает аналитическое продолжение на комплексные θ. Мы ограничим класс рассматриваемых потенциалов так, чтобы то же самое выполнялось для $H = -\Delta + V$ вместо H_0. Ниже мы увидим, что $H(\theta)$ обладает дискретным спектром, который «локально» не зависит от θ. Однако непрерывный спектр — как это видно уже на примере H_0, для которого $\sigma(H_0(\theta)) = \{z \mid \arg z = -2 \operatorname{Im} \theta\}$, — заметно изменяется при изменении θ. Это позволяет отделить непрерывный спектр от вещественной оси.

Определение. Пусть $\alpha > 0$. Говорят, что квадратичная форма V на $L^2(\mathbb{R}^3)$ принадлежит классу $\mathcal{F}_\alpha$ в том и только том случае, когда

(1) V — симметрическая форма, причем $Q(V) \supset Q(H_0)$, где $H_0 = -\Delta$;

(2) оператор $(H_0 + I)^{-1/2} V (H_0 + I)^{-1/2}$ компактен;

(3) семейство операторов

$$F(\theta) = (H_0 + I)^{-1/2} (u(\theta) V u(\theta)^{-1}) (H_0 + I)^{-1/2},$$

определенных при $\theta \in \mathbb{R}$, имеет продолжение до аналитической ограниченной операторнозначной функции в полосе B_α, где

$$B_\alpha \equiv \{\theta \mid |\operatorname{Im} \theta| < \alpha\}.$$

Множество $\bigcup_{\alpha > 0} \mathcal{F}_\alpha$ называется **семейством потенциалов, аналитических относительно растяжений.**

Если функция $F(\theta)$ в (3) имеет продолжение в полосу $\{\theta \mid |\operatorname{Im} \theta| \leqslant \alpha\}$, аналитическое внутри нее и непрерывное по норме вплоть до границы, то говорят, что V принадлежит классу $\overline{\mathcal{F}}_\alpha$.

В предыдущем определении $u(\theta) V u(\theta)^{-1} \equiv V(\theta)$ обозначает квадратичную форму $V(\theta)(\psi, \varphi) = V(u(-\theta)\psi, u(-\theta)\varphi)$. Определение потенциалов, аналитических относительно растяжений, удобно переформулировать в терминах шкалы пространств

$\mathscr{H}_{+1} \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{H}_{-1}$, определенной по квадратичной форме, ассоциированной с оператором H_0 (см. § VIII.6). В самом деле, (1) и (2) говорят о том, что V задает компактный оператор из $\mathscr{H}_{+1}$ в $\mathscr{H}_{-1}$, являющийся самодвойственным. Чтобы сформулировать (3), заметим сначала, что

$$(H_0+I)^{1/2} u(\theta)(H_0+I)^{-1/2} = (H_0+I)^{1/2}(e^{-2\theta}H_0+I)^{-1/2}u(\theta),$$

так что $u(\theta)$ определяет ограниченное отображение из $\mathscr{H}_{+1}$ в $\mathscr{H}_{+1}$, а поскольку $u(-\theta)^* = u(\theta)$, то и из $\mathscr{H}_{-1}$ в $\mathscr{H}_{-1}$. Итак, поскольку V — ограниченное отображение из $\mathscr{H}_{+1}$ в $\mathscr{H}_{-1}$, для любого вещественного θ $u(\theta)Vu(\theta)^{-1}$ есть компактный оператор из $\mathscr{H}_{+1}$ в $\mathscr{H}_{-1}$. Утверждение (3) тогда гласит, что этот оператор имеет $\mathscr{L}(\mathscr{H}_{+1}, \mathscr{H}_{-1})$-значное аналитическое продолжение по θ.

Когда V аналитичен относительно растяжений и $|\operatorname{Im}\theta| < \alpha$, мы будем через $V(\theta)$ обозначать квадратичную форму, ассоциированную с оператором, принадлежащим $\mathscr{L}(\mathscr{H}_{+1}, \mathscr{H}_{-1})$ и полученным посредством описанного выше продолжения. Поскольку предыдущее построение показывает, что $V(\theta)$ — компактный оператор из $\mathscr{H}_{+1}$ в $\mathscr{H}_{-1}$, когда θ вещественно, и поскольку аналитическое продолжение операторнозначной функции с компактными значениями на вещественной оси также компактно (лемма 5 из § 5), заключаем, что $V(\theta)$ — относительно компактное в смысле форм возмущение H_0 при всех θ и, в частности, ограниченное в смысле форм возмущение с нулевой относительной гранью (см. задачу 38). В результате имеем следующее

Предложение 1. Пусть $V \in \mathscr{F}_\alpha$, и пусть $H_0 = -\Delta$. Пусть $H_0(\theta) = e^{-2\theta} H_0$ для $\theta \in B_\alpha$. Определим квадратичную форму $H(\theta) = H_0(\theta) + V(\theta)$ на $Q(H_0)$ как сумму форм $H_0(\theta)$ и $V(\theta)$. Тогда

(a) для любого $\theta \in B_\alpha$ форма $H(\theta)$ строго m-секториальна, а именно: для любого ε существует такое z_0, что

$$S_{z_0,\, \operatorname{Im}\theta,\, \varepsilon} = \{\omega \mid 2\operatorname{Im}\theta - \varepsilon < \arg(\omega - z_0) < 2\operatorname{Im}\theta + \varepsilon\}$$

— сектор для $H(\theta)$;

(b) $H(\theta)$ — аналитическое семейство типа (B) в области B_α;

(c) для любого вещественного φ имеем $u(\varphi)H(\theta)u(\varphi)^{-1} = H(\theta+\varphi)$.

Доказательство. Пусть $A(\theta) \equiv e^{2\theta} H(\theta) = H_0 + e^{2\theta}V(\theta)$. Поскольку H_0 самосопряжен, а $e^{2\theta}V(\theta)$ — ограниченное в смысле форм возмущение H_0 с относительной гранью, равной 0, то для любого δ можно найти такое b, что

$$|(\varphi, e^{2\theta}V(\theta)\varphi)| < \delta(\varphi, (H_0+b)\varphi).$$

Полагая $\varepsilon = \arcsin\delta$, имеем $\arg[(\varphi, (H_0+e^{2\theta}V(\theta)+b)\varphi] < \varepsilon$. Это доказывает (a). Очевидно, $A(\theta)$ есть аналитическое семейство типа (B), так что это справедливо и для $H(\theta)$. Для доказательства (c) фиксируем $\varphi \in \mathbb{R}$ и заметим, что как $u(\varphi) H(\theta) u(\varphi)^{-1}$, так и $H(\theta+\varphi)$ аналитичны в B_α, а если $\theta \in \mathbb{R}$, то они, очевидно, совпадают. ∎

Прежде чем обратиться к некоторым примерам, отметим, что существует операторная версия понятия потенциала, аналитического относительно растяжения, однако соответствующий класс $\mathscr{C}_\alpha$ содержится в $\mathscr{F}_\alpha$ (см. задачу 73).

Пример 1. Пусть V — центральный потенциал, задаваемый вещественнозначной функцией $V(r)$. Тогда при θ вещественном $V(\theta)$ — оператор умножения на функцию $V(e^\theta r)$. Теперь легко видеть (задача 74), что если $V(r)$ обладает аналитическим продолжением $V(z)$ в сектор $\{z \mid |\arg z| < \alpha\}$, причем для каждого $\beta < \alpha$

$$\lim_{\substack{|z| \to \infty \\ |\arg z| < \beta}} V(z) = 0$$

и

$$\sup_{0 < |\varphi| < \beta} \int_{|r|, |r'| \leqslant 1} |V(e^{i\varphi} r)| \, |V(e^{i\varphi} r')| \, |r - r'|^{-2} d^3 r \, d^3 r' < \infty,$$

то V аналитичен относительно растяжений. Действительно, для каждого $\theta \in B_\alpha$ оператор $V(\theta)$ есть умножение на функцию $V(e^\theta r)$, принадлежащую $R + (L^\infty)_\varepsilon$. В частности, кулонов потенциал $V(r) = r^{-1}$ лежит в $\mathscr{F}_\infty$, а потенциал Юкавы $V(r) = e^{-\mu r}/r$, $\mu > 0$, — в $\mathscr{F}_{\pi/2}$.

Пример 2. Потенциалы, аналитические относительно растяжений, не обязаны быть «локальными», т. е. не обязаны быть операторами умножения. Пусть, например, $\psi \in L^2$ — аналитический вектор инфинитезимального генератора группы $u(\theta)$. Тогда $\{u(\theta)\psi\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ обладает аналитическим продолжением в полосу $\{\theta \mid |\operatorname{Im} \theta| < \alpha\}$ (задача 75). Пусть V — оператор единичного ранга $(\psi, \cdot)\psi$. Тогда V аналитичен относительно растяжений; в самом деле, $V(\theta) = (\psi(\bar\theta), \cdot)\psi(\theta)$.

Наша конечная цель в этом разделе — анализ спектра гамильтониана H на $L^2(\mathbb{R}^{3N-3})$, получаемого посредством отделения движения центра масс в гамильтониане $\tilde H = -\sum_{i=1}^{N} (2\mu_i)^{-1} \Delta_i + \sum_{i<j} V_{ij}(r_i - r_j)$ где каждый V_{ij} — оператор в $L^2(\mathbb{R}^3)$, аналитический относительно растяжений. Мы начнем с рассмотрения двухчастичного случая, а затем применим двухчастичный метод в общей ситуации, дополнив его уравнениями Вайнберга — ван Винтера и леммой Итиносэ.

Теорема XIII.36. Пусть $H_0 = -\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$, и пусть $V \in \mathcal{F}_\alpha$ для некоторого $\alpha > 0$. Предположим, что $\theta \in B_\alpha$, и пусть $H(\theta) = e^{-2\theta}H_0 + V(\theta)$. Тогда

(a) $\sigma(H(\theta))$ зависит лишь от $\operatorname{Im}\theta$;

(b) $\sigma(H(\theta))$ состоит из $\{e^{-2\theta}\lambda \mid \lambda \in [0, \infty)\} \cup \sigma_d(\theta)$, где σ_d — множество, не имеющее предельных точек, за исключением, возможно, нуля; каждое $\mu \in \sigma_d(\theta)$ — собственное значение конечной кратности;

(c) $\sigma_d(\bar\theta) = \overline{\sigma_d(\theta)}$;

(d) если $0 < \operatorname{Im}\theta < \pi/2$, то $\sigma_d(\theta) \subset \mathbb{R} \cup \{\mu \mid -2\operatorname{Im}\theta < \arg\mu < 0\}$ и $\mathbb{R} \cap \sigma_d(\theta) = \sigma_{pp}(H(0)) \setminus \{0\}$; более того, если $0 < \operatorname{Im}\varphi < \operatorname{Im}\theta < \pi/2$, то $\sigma_d(\varphi) \subset \sigma_d(\theta)$;

(e) $\sigma_{sing}(H(0)) = \varnothing$.

Доказательство. (a) и (c) следуют из предложения 1, утверждающего, что $H(\theta)$ и $H(\theta+\varphi)$ унитарно эквивалентны, если $\varphi \in \mathbb{R}$, и равенства $H(\theta)^* = H(\bar\theta)$. Из следствия 2 теоремы XIII.14 вытекает $\sigma_{ess}(e^{2\theta}H(\theta)) = \sigma_{ess}(H_0) = [0, \infty)$. Это доказывает (b), за исключением того, что a priori $\sigma_d(\theta)$ может иметь предельные точки где угодно в $e^{-2\theta}\mathbb{R}_+$. Помимо этого остается доказать (d) и (e). Фиксируем θ_0 и предположим, что $E \in \sigma_d(\theta_0)$. Поскольку $H(\theta)$ — аналитическое семейство типа (B), из теоремы XII.13 вытекает, что для θ, близких к θ_0, оператор $H(\theta)$ имеет собственные значения, близкие к E, и что эти близкие собственные значения определяются всеми ветвями одной или нескольких функций $f_1(\theta), \ldots, f_n(\theta)$, аналитических вблизи θ_0 и обладающих в худшем случае алгебраическими точками ветвления около θ_0. С другой стороны, если φ вещественно, то $H(\theta_0)$ и $H(\theta_0+\varphi)$ унитарно эквивалентны, так что единственное собственное значение $H(\theta_0+\varphi)$ около E есть E. Мы заключаем, что $f_i(\theta) = E$, если θ близко к θ_0 и $\theta-\theta_0$ вещественно. Но из аналитичности тогда следует, что $f_i(\theta) = E$ для всей области, где f_i определена! Итак, доказано, что множество $\sigma_d(\theta)$ локально постоянно в том смысле, что если $\lambda \in \sigma_d(\theta_0)$, то оно лежит в $\sigma_d(\theta)$ и для всех θ, близких к θ_0. С другой стороны, если $\theta_n \to \theta$ и $\lambda \in \sigma_d(\theta_n)$ для каждого n, то $\lambda \in \sigma(H(\theta))$, поскольку $H(\theta_n) \to H(\theta)$ в смысле равномерной резольвентной сходимости. Поэтому простое рассуждение, основанное на связности (задача 76), доказывает следующее утверждение. Если $\gamma(t)$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, — кривая в B_α и $\lambda \in \sigma_d(\gamma(0))$, то либо $\lambda \in \sigma_d(\gamma(1))$, либо $\lambda \in \sigma_{ess}(H(\gamma(t)))$ для некоторого $t \in (0, 1]$. В частности, если $\lambda \notin \{\mu \mid -2\operatorname{Im}\theta \leqslant \arg\mu \leqslant 0\}$ и $0 < \operatorname{Im}\theta < \pi/2$, то $\lambda \in \sigma_d(\theta)$ тогда и только тогда, когда $\lambda \in \sigma_d(0)$, поскольку можно выбрать кривую $\gamma(t) = t\theta$. Итак,

$$\sigma_d(\theta) \cap \{\mu \mid 0 < \arg\mu < 2\pi - 2\operatorname{Im}\theta\} = \sigma_{pp}(H) \cap (-\infty, 0).$$

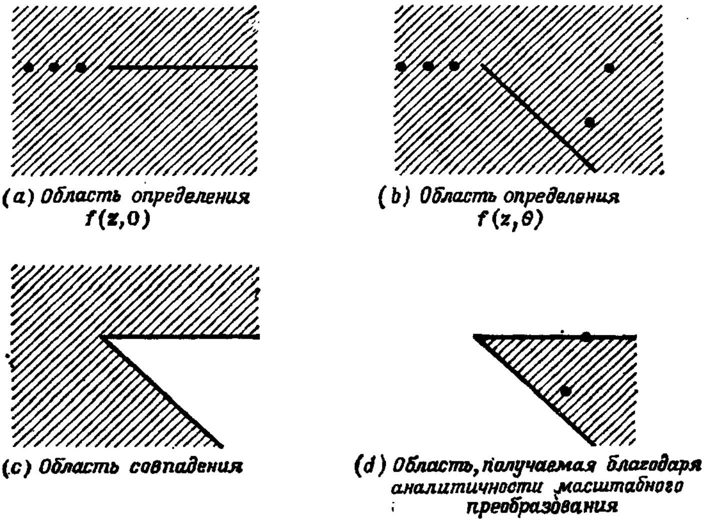

Рис. XIII.5. Аналитическое продолжение матричных элементов резольвенты.

Аналогично, если $0 < \operatorname{Im}\varphi < \operatorname{Im}\theta$, то $\sigma_d(\varphi) \subset \sigma_d(\theta)$. Это показывает, что $\sigma_d(\theta)$ не может иметь никаких предельных точек, кроме нуля. Чтобы завершить доказательство пункта (d), нужно только показать, что $\sigma_d(\theta) \cap (0, \infty) = \sigma_{pp}(H) \cap (0, \infty)$. Для этого требуется дополнительная идея, которая понадобится также при доказательстве (e). Пусть

$$N_\alpha = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^3) \mid u(\theta)\psi \text{ обладает аналитическим продолжением из } \mathbb{R} \text{ в } B_\alpha\}.$$

N_α есть не что иное, как множество аналитических векторов ψ инфинитезимального генератора D группы $u(\theta)$, для которых $\sum_{n=0}^{\infty} t^n \|D^n\psi\|/n!$ имеет радиус сходимости не меньший α. Пусть $\psi \in N_\alpha$, и пусть $\psi(\theta)$ — продолжение $u(\theta)\psi$. Рассмотрим функцию $f(z, \theta) = (\psi(\bar{\theta}), (H(\theta) - z)^{-1}\psi(\theta))$. Для каждого фиксированного $\theta \in B_\alpha$ функция $f(z, \theta)$ аналитична по z при $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H(\theta))$ и мероморфна в области $\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(H(\theta))$. С другой стороны, фиксируем z с $\operatorname{Im} z > 0$. Тогда $f(z, \theta)$ аналитична по θ в области

$$R_z = \{\theta \mid -\min\{\alpha, {}^1/_2 \arg z\} < \operatorname{Im}\theta < \min\{\alpha, {}^1/_2\pi\}\}.$$

Поскольку для $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(z, \varphi) &= (u(\varphi)\psi, (H(\varphi) - z)^{-1} u(\varphi)\psi) = \\ &= (u(\varphi)\psi, u(\varphi)(H(0) - z)^{-1}\psi) = f(z, 0), \end{aligned}$$

заключаем, пользуясь аналитичностью, что $f(z, \cdot)$ — константа на R_z. В частности, если $0 < \operatorname{Im} \theta_0 < \min\{\alpha, {}^1/_2\pi\}$, то $f(z, \theta_0)$ обеспечивает аналитическое продолжение $f(z, 0)$ с $\mathbb{C} \setminus \sigma(H(0))$ в $\mathbb{C} \setminus \sigma(H(\theta_0))$ (см. рис. XIII.5). В частности, если $\psi \in N_\alpha$, то $(\psi, (H-z)^{-1}\psi)$ имеет непрерывные граничные значения при $z \to \mu + i0$, когда $\mu \in \mathbb{R} \setminus \sigma_d(\theta_0)$. Поскольку N_α плотно, а $\sigma_d(\theta_0) \cap \mathbb{R}$ дискретно, то, обращаясь к теореме XIII.20, заключаем, что $\sigma_{\text{sing}}(H(0)) = \varnothing$.

Вернемся, наконец, к доказательству того, что $\sigma_d(\theta) \cap (0, \infty) = \sigma_{pp}(H(0)) \cap (0, \infty)$, если $0 < \operatorname{Im} \theta < \min\{\alpha, \pi/2\}$. Поскольку $H(0)$ самосопряжен, из функционального исчисления немедленно вытекает, что $\operatorname{s-lim}_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon (H - x - i\varepsilon)^{-1} = P_{\{x\}}$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Предположим, что $x \notin \sigma_d(\theta) \cap (0, \infty)$. Тогда, в силу предыдущего построения, $(\psi, (H-z)^{-1}\psi)$ имеет аналитическое продолжение из $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ в некоторую окрестность x, если $\psi \in N_\alpha$. В частности, $\lim_{\varepsilon \downarrow} i\varepsilon (\psi, (H - x - i\varepsilon)^{-1}\psi) = 0$, так что $P_{\{x\}}\psi = 0$. Поскольку N_α плотно, $P_{\{x\}} = 0$, т. е. $x \notin \sigma_{pp}(H(0)) \cap (0, \infty)$. Обратно, пусть $x \in \sigma_d(\theta) \cap (0, \infty)$. Пусть η — собственный вектор $H(\theta)$ с собственным значением x. Тогда $(\varphi, (H(\theta) - z)^{-1}\eta)$ имеет полюс при $z = x$ для некоторых φ. Поскольку $N_{2\alpha}$ плотно, можно найти φ_n, $\eta_n \in N_{2\alpha}$, такие, что $\varphi_n \to \varphi$, $\eta_n \to \eta$. При $z \notin \sigma(H(\theta))$ последовательность $(\varphi_n, (H(\theta) - z)^{-1}\eta_n)$ сходится к $(\varphi, (H(\theta) - z)^{-1}\eta)$, так что по принципу аргумента (который связывает число полюсов мероморфной функции f внутри некоторого контура с интегралом от f'/f по этому контуру) заключаем, что для всех больших n функции $(\varphi_n, (H(\theta) - z)^{-1}\eta_n)$ имеют полюс при $z = x$. Пусть $\psi = \eta_n(-\theta)$, $\varkappa = \varphi_n(-\theta)$. Тогда $(\psi, (H-z)^{-1}\varkappa) = (\varphi_n, (H(\theta) - z)^{-1}\eta_n)$, если $\operatorname{Im} z > 0$, и мы получаем, что $(\psi, (H-z)^{-1}\varkappa)$ имеет полюс при $z = x$. Итак, $(\psi, P_{\{x\}}\varkappa) \neq 0$, и поэтому $x \in \sigma_{pp}(H)$. ∎

Решающую роль в предыдущем доказательстве сыграло то, что мы смогли явно найти $\sigma_{ess}(H(\theta))$, пользуясь теоремой Вейля. В N-частичном случае нам придется заменить теорему Вейля какой-то теоремой типа ХВЖ-теоремы. Имеется одно важное различие между тем, что требуется нам сейчас для анализа $H(\theta)$, и исследованием, проведенным в § 5, а именно то, что потенциалы $V_{ij}(\theta)$ не самосопряжены. В качестве подготовки к N-частичному аналогу теоремы XIII.36 докажем поэтому

Предложение 2. Пусть $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3N-3}$ — разложение $\mathbb{R}^{3N}$ в декартово произведение с выделенной координатой $r_i - r_j$. Пусть $\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \tilde{V}_{ij}$, где

(i) $\tilde{H}_0 = -\sum_{i=1}^{N} (2\mu_i)^{-1} \Delta_i$;

(ii) $\tilde{V}_{ij} = V_{ij} \otimes I$ в соответствии с разложением $\mathbb{R}^{3N} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3N-3}$;

(iii) каждое V_{ij} есть относительно компактное в смысле форм возмущение оператора $-\Delta$ в $L^2(\mathbb{R}^3)$ (однако не обязательно симметрическое).

Пусть H — оператор $\tilde{H}$ с отделенным движением центра масс. Для каждого кластера $C \subset \{1, \ldots, N\}$ определим $H(C_i)$ в соответствии с предписаниями § XI.5. Для каждого кластерного разложения $D=\{C_1, \ldots, C_k\}$ назовем семейство чисел $\{E_1+\ldots+E_k \mid E_i \in \sigma_{\text{disc}}(H(C_i))\}$ множеством **D-порогов** и обозначим его через Σ_D. Пусть Σ — объединение Σ_D по всем D с не менее чем двумя кластерами. Тогда

$$\sigma_{\text{ess}}(H) \subset \bigcup_{\lambda \in \Sigma} (\lambda+[0, \infty)).$$

Доказательство. Мы укажем лишь на изменения, которые необходимо сделать в доказательстве § 5, а детали оставим читателю (задача 77). Если $N=2$, то $\Sigma=\{0\}$ и утверждение теоремы — часть теоремы Вейля о существенном спектре. Таким образом, предположим, что теорема справедлива для всех M-частичных систем, где $M \leqslant N-1$, и докажем ее для N-частичных систем. Первый шаг состоит в доказательстве того, что

$$\sigma(H_D) \subset \bigcup_{\lambda \in \Sigma} (\lambda+[0, \infty)) \tag{65}$$

для любого D с по крайней мере двумя кластерами. Чтобы в этом убедиться, положим $D=\{C_1, \ldots, C_k\}$, так что $H_D = \sum_{i=1}^{k} H(C_i)+T_D$. Теперь каждое V_{ij} есть ограниченное в смысле форм возмущение оператора H_0 с нулевой относительной гранью, а потому каждый $H(C_i)$ — строго m-секториальный оператор с произвольно малым углом раскрытия. Более того, при естественном разбиении $\mathcal{H} \equiv L^2(\mathbb{R}^{3N-3}) = \mathcal{H}_D \otimes \mathcal{H}_{C_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_{C_k}$ каждое слагаемое в $\sum_{i=1}^{k} H(C_i)+T_D$ действует на своем множителе в тензорном произведении. Следовательно, применима лемма Итиносэ (теорема XIII.35 и ее следствие) и $\sigma(H_D)=\sum_{i=1}^{k} \sigma(H(C_i)) + \sigma(T_D)$. Пользуясь тем, что $\sigma(H(C_i))=\sigma_{\text{disc}}(H(C_i)) \cup \sigma_{\text{ess}}(H(C_i))$, и предположением индукции, легко доказать (65).

Далее доказательство очень близко к доказательству ХВЖ-теоремы. Поскольку $\sum V_{ij}$ — ограниченное в смысле форм возмущение с нулевой относительной гранью, ряд теории возмущений для $G(E)=(H_0+\sum V_{ij}-E)^{-1}$ сходится в равномерной топологии, если E — большое по модулю отрицательное число. Полагая

$R(E)=(H_0-E)^{1/2}G(E)(H_0-E)^{1/2}$, как и в § 5, можно получить, что $R(E)=D_R(E)+I_S(E)R(E)$. Как $D_R(E)$, так и $I_S(E)$ могут быть выражены через резольвенты $(H_D-E)^{-1}$, где D имеет по крайней мере два кластера. В силу проведенного выше анализа оба эти оператора имеют аналитические продолжения в $\mathbb{C}\setminus S$, где $S=\bigcup_{\lambda\in\Sigma}(\lambda+[0,\infty))$. На этом шаге докажем замкнутость S по индукции. Наконец, остается показать, что каждая связная диаграмма компактна, с помощью этого доказать компактность $I_S(E)$ и для завершения доказательства применить аналитическую теорему Фредгольма. ▌

Теперь легко доказать основной результат этого раздела. Для облегчения его формулировки дадим сначала

Определение. Пусть $V_{ij}\in\mathcal{F}_\alpha$ для каждой пары $1\leqslant i<j\leqslant N$, и пусть $\tilde{V}_{ij}=V_{ij}\otimes I$ в $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ в соответствии с разложением $\mathbb{R}^{3N}=\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^{3N-3}$, для которого первая координата есть r_i-r_j. Пусть $\tilde{H}_0=-\sum_{i=1}^{N}(2\mu_i)^{-1}\Delta_i$, и пусть $\tilde{H}=\tilde{H}_0+\sum\tilde{V}_{ij}$. Для $\theta\in B_\alpha$ пусть $\tilde{H}(\theta)=e^{-2\theta}\tilde{H}_0+\sum\tilde{V}_{ij}(\theta)$. Пусть $H(\theta)$ и H обозначают $\tilde{H}(\theta)$, $\tilde{H}$ с отделенным движением их центров масс. Для каждого кластерного разложения $D=\{C_1,\ldots,C_k\}$ пусть $\Sigma_D(\theta)\equiv\{E_1+\ldots+E_k \mid E_i\in\sigma_{\mathrm{disc}}(H_{C_i}(\theta))\}$ и $\Sigma(\theta)=\bigcup_{\#(D)\geqslant 2}\Sigma_D(\theta)$. Наконец, положим $\Sigma_{\min}=\min\{\lambda\mid\lambda\in\Sigma(0)\}$.

Теорема XIII.37. Пусть H есть N-частичный гамильтониан в $L^2(\mathbb{R}^{3N-3})$ с аналитическими относительно растяжений парными потенциалами типа, описанного в последнем определении. Тогда

(a) $\sigma(H(\theta))$ и $\Sigma(\theta)$ зависят только от $\operatorname{Im}\theta$;

(b) $\sigma(H(\theta))=\sigma_{\mathrm{ess}}(\theta)\cup\sigma_{\mathrm{d}}(\theta)$, где $\sigma_{\mathrm{ess}}(\theta)=\{\mu+e^{-2\theta}\lambda\mid\mu\in\Sigma(\theta)$ $\lambda\in[0,\infty)\}$ и где $\sigma_{\mathrm{d}}(\theta)$ — дискретный спектр $H(\theta)$;

(c) $\sigma_{\mathrm{d}}(\bar{\theta})=\overline{\sigma_{\mathrm{d}}(\theta)}$; $\Sigma(\bar{\theta})=\overline{\Sigma(\theta)}$.

(d1) Если $0\leqslant\operatorname{Im}\theta<\min\{\alpha,\pi/2\}$, то

$$\Sigma(\theta)\subset\mathbb{R}\cup\{\Sigma_{\min}+\mu\mid -2\operatorname{Im}\theta<\arg\mu<0\}$$

и $R\cap\Sigma(\theta)=\Sigma(0)$. Более того, если $0<\operatorname{Im}\varphi<\operatorname{Im}\theta<\pi/2$, то $\Sigma(\varphi)\subset\Sigma(\theta)$.

(d2) Если $0<\operatorname{Im}\theta<\pi/2$, то $\sigma_{\mathrm{d}}(\theta)\subset\mathbb{R}\cup\{\Sigma_{\min}+\mu\mid -2\operatorname{Im}\theta<\arg\mu<0\}$ и $\mathbb{R}\cap\sigma_{\mathrm{d}}(\theta)=\sigma_{\mathrm{pp}}(H)\setminus\Sigma(0)$. Далее, если $0<\operatorname{Im}\varphi<\operatorname{Im}\theta<\pi/2$, то $\sigma_{\mathrm{d}}(\varphi)\subset\sigma_{\mathrm{d}}(\theta)$.

(e) $\sigma_{\mathrm{sing}}(H)=\varnothing$.

Доказательство. Поскольку доказательство получается непосредственно из теоремы XIII.36, мы оставляем детали читателю (задачи 78, 79). Утверждения (a) и (c) вытекают из равенств $U(\varphi)H(\theta)U(\varphi)^{-1}=H(\theta+\varphi)$ и $H(\bar{\theta})=H(\theta)^*$, а включение $\sigma_{ess}(\theta)\subset \subset\{\mu+e^{-2\theta}\lambda \mid \mu\in\Sigma(\theta),\ \lambda\in[0,\infty)\}$ — из предложения 2. Включение $\{\mu+e^{-2\theta}\lambda \mid \mu\in\Sigma(\theta),\ \lambda\in[0,\infty)\}\subset\sigma_{ess}(\theta)$ нуждается в отдельном доказательстве (задача 78). (d1) для N-частичных систем следует из (d2) для $(N-1)$-частичных систем, а потому только (d2) нуждается в доказательстве. Оно проводится, как в теореме XIII.36, в два этапа. Сначала применяется теория возмущений дискретного спектра, чтобы показать, что $\sigma_d(\theta)$ локальио постоянно, что в свою очередь применяется для доказательства всех утверждений (d2), за исключением равенства $[\Sigma_{min},\infty)\cap\sigma_d(\theta)= =\sigma_{pp}(H)\diagdown(\Sigma(0)\cup(-\infty,\Sigma_{min}))$. Это последнее доказывается аналитическим продолжением матричных элементов $(\psi,(H-z)^{-1}\psi)$ при $\psi\in N_\alpha$. Попутно это рассуждение доказывает (e). ∎

Следствие. Сингулярный спектр N-частичных квантовых гамильтонианов с отделенным движением центра масс и с парными потенциалами Кулона или Юкавы пуст.

Собственные значения $H(\theta)$ в $\sigma_d(\theta)\diagdown\sigma_d(0)$ называются **резонансными собственными значениями** оператора H. Мы уже указывали на их важность в § XII.6. Точки множества $\Sigma(\theta)\diagdown\Sigma$ называются **комплексными порогами** или **порогами резонансов**.

XIII.11. Свойства собственных функций

Не считая доказательства равенства $\sigma_{pp}=\sigma_{disc}$ (к которому мы вернемся в § 13), намеченное исследование спектров различных типов операторов Шредингера в неограниченном пространстве с парными потенциалами, стремящимися к нулю на бесконечности, завершено. Обратимся теперь к ряду проблем, которые непосредственно не входят в спектральный анализ, но близко к нему примыкают. В этом разделе мы рассмотрим свойства регулярности и убывания на бесконечности собственных функций. Существует тесная связь между двумя этими наборами свойств, поскольку, как мы уже видели (см. § IX.2, 3), гладкость функции ψ непосредственно связана со свойствами убывания ее фурье-образа $\hat{\psi}$. Ниже все теоремы формулируются через $\psi(x)$ — функции в x-пространстве, но в доказательствах часто будут встречаться $\hat{\psi}(p)$ — функции в p-пространстве. Сначала мы обсуждаем гладкость $\psi(x)$, затем убывание ψ в том смысле, что при некоторых обстоятельствах $\psi\in D(\exp(a|x|))$. Наконец, мы комбинируем эти два ряда идей для доказательства поточечных оценок $|\psi(x)|\leqslant \leqslant C\exp(-a|x|)$.