аналитична в трубе $\{k \mid |\operatorname{Im} k| < a\}$. По теореме Планшереля для любого $b < a$ существует константа C_b, такая, что

$$\int\limits_{k \in \mathbb{R}^{3N-3}} |\hat{\varphi}(k+i\varkappa)|^2 d^{3N-3}k < C_b, \tag{69}$$

если $|\varkappa| \leqslant b$. Далее мы следуем доказательству теоремы XIII.38. Выполнив аналитическое продолжение, видим, что $\hat{\varphi}(k)$ удовлетворяет уравнению

$$(2M)^{-1}k^2\hat{\varphi}(k) + (2\pi)^{-(3N-3)/2}\int \hat{V}(l)\,\hat{\varphi}(k-l)\,d^{3N-3}l = \widehat{H\varphi}(k)$$

для всех k с $|\operatorname{Im} k| < a$, как только φ и $H\varphi$ лежат в $D(e^{ar})$. Следуя доказательству теоремы XIII.38 и пользуясь неравенством (69), можно показать (задача 88), что для любого $b < a$ существует константа D_b, такая, что

$$\int |\hat{\psi}(k+i\varkappa)|\,d^{3N-3}\varkappa < D_b, \tag{70}$$

если $|\varkappa| \leqslant b$ и ψ, $H\psi, \ldots, H^m\psi \in D(\exp(ar))$ для подходящего m. Поскольку $\hat{\psi}(\cdot + i\varkappa)$ — преобразование Фурье от $e^{\varkappa\cdot\zeta}\psi(\zeta)$, оценка (70) влечет за собой неравенство

$$|e^{\varkappa\cdot\zeta}\psi(\zeta)| \leqslant D_b(2\pi)^{-(3N-3)/2},$$

если $|\varkappa| \leqslant b$. Взяв точную верхнюю грань по таким $\varkappa$, видим, что

$$|e^{br}\psi(\zeta)| \leqslant D_b(2\pi)^{-(3N-3)/2}. \blacksquare$$

Следствие. Пусть H — гамильтониан атома. Тогда любая собственная функция ψ, отвечающая точке дискретного спектра, удовлетворяет оценке вида

$$|\psi(\zeta)| \leqslant C_a e^{-ar}$$

для некоторого положительного a.

XIII.12. Невырожденность основного состояния

Основной результат этого раздела относится к самосопряженному оператору H, который ограничен снизу и имеет собственное значение в качестве низшей точки своего спектра. Мы покажем, что при определенных условиях собственное пространство, отвечающее этому собственному значению, одномерно и что соответствующий собственный вектор есть строго положительная функция при некоторой специальной реализации рассматриваемого гильбертова пространства L^2. Это собственное значение называется **энергией основного состояния**, а собственный вектор —

основным состоянием. Как часто бывает в спектральном анализе, метод проверки упомянутых условий на практике основан на теории возмущений. На первый взгляд это удивительно, поскольку мы будем интересоваться шредингеровыми операторами, а $H_0 = -\Delta$ не обладает ни одной собственной функцией. Поэтому важно, чтобы все наши результаты выражались посредством заключений вида: «либо H не имеет собственных значений ниже существенного спектра, либо он имеет невырожденную энергию основного состояния, а соответствующий собственный вектор строго положителен». Наконец, отметим, что, как обычно, легче изучать ограниченные операторы e^{-tH} и $(H+1)^{-1}$, чем H. Если E_0 — энергия основного состояния для H, то e^{-tE_0} — *наибольшее* собственное значение оператора e^{-tH}, поэтому мы начинаем с изучения ограниченного оператора A и его наибольшего собственного значения.

Определение. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с σ-конечной мерой. Функция $f \in L^2(M, d\mu)$ называется **положительной**, если f неотрицательна почти всюду и не является нулевой функцией; f называется **строго положительной**, если $f(x) > 0$ почти всюду. Ограниченный оператор A на L^2 называется **сохраняющим положительность**, если функция Af положительна, когда положительна f. Оператор A называется **усиливающим положительность**, если Af строго положительна при положительной f. Наконец, A называется **эргодическим** тогда и только тогда, когда он сохраняет положительность, и для любых функций u, $v \in L^2$, которые обе положительны, существует некоторое $n > 0$, для которого $(u, A^n v) \neq 0$.

Заметим, что по определению нулевая функция не положительна. Таким образом, если A сохраняет положительность, то Af — ненулевая функция для любой положительной функции f. Более того, можно так переформулировать понятие строгой положительности, что станет ясно, что каждое усиливающее положительность отображение эргодично. А именно: функция $g \in L^2(M, d\mu)$ строго положительна тогда и только тогда, когда $(f, g) > 0$ для всех положительных функций f. Итак, ограниченный оператор A на $L^2(M, d\mu)$ усиливает положительность в том и только в том случае, когда $(u, Av) > 0$ для всех положительных функций u, $v \in L^2(M, d\mu)$.

Пример 1. Пусть $A = (-\Delta + 1)^{-1}$ на $L^2(\mathbb{R}^3)$. Уравнение (IX.30) утверждает, что

$$(f, Ag) = \int \overline{f(x)} g(y) \frac{e^{-|x-y|}}{4\pi |x-y|} d^3x\, d^3y.$$

Поскольку $(4\pi |x-y|)^{-1} e^{-|x-y|}$ строго положительна, то A усиливает положительность. Аналогично явная форма для $e^{t\Delta}$ на

$L^2(\mathbb{R}^n)$ показывает, что этот оператор также усиливает положительность.

Пример 2. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с вероятностной мерой, т. е. $\mu(M)=1$, и пусть $T\colon M \to M$ — отображение, сохраняющее меру. Пусть $(Af)(x)=f(Tx)$. Тогда A — унитарный оператор, который, очевидно, сохраняет положительность. Однако он не усиливает ее. Оператор A эргодичен тогда и только тогда, когда эргодичен T в смысле определения из § II.5 (задача 90).

Пример 3 (вторично квантованные операторы в пространстве Фока). В ходе доказательства теоремы X.61 (§ X.9) мы видели, что $\Gamma(e^{-tA})$ сохраняет положительность как оператор на Q-пространстве, если A — положительный самосопряженный оператор на одночастичном пространстве, коммутирующий с заданным комплексным сопряжением. Позже мы выясним, когда этот оператор эргодичен, а когда он усиливает положительность.

Основной абстрактный результат этого раздела — следующая

Теорема XIII.43. Пусть A — ограниченный положительный оператор на $L^2(M, d\mu)$. Предположим, что A сохраняет положительность и что $\|A\|$ — собственное значение. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(a) $\|A\|$ — простое собственное значение, а соответствующий собственный вектор строго положителен;

(b) A эргодичен;

(c) множество операторов $L^\infty(M) \cup \{A\}$ действует неприводимым образом, т. е. ни одно нетривиальное замкнутое подпространство не остается инвариантным относительно действия A и множества всех ограниченных операторов умножения.

Доказательство. Докажем, что (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b). Пусть $B=A/\|A\|$, и пусть $\{P_\Omega\}$ — спектральные проекторы B. Поскольку $x^n \to 0$, если $0 \leqslant x < 1$ и $x^n \to 1$, если $x=1$, из функционального исчисления вытекает, что

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} B^n = P_{\{1\}}.$$

По предположению $P_{\{1\}}=(\psi, \cdot)\psi$, где ψ строго положительна. Итак, для любых положительных u, v

$$\lim_{n\to\infty} (u, B^n v) = (u, \psi)(\psi, v) > 0.$$

В результате для некоторого n имеем $(u, A^n v)=\|A\|^n (u, B^n v) > 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Допустим, что (c) не выполняется. Пусть S — нетривиальное подпространство, инвариантное под действием

$L^\infty(M) \cup \{A\}$. Пусть $f \in S$, и пусть $h = \bar{f}/|f| \in L^\infty(M)$. Тогда $|f| = hf \in S$. Аналогично, если $g \in S^\perp$, то $|g| \in S^\perp$. Выберем $f \in S$, $g \in S^\perp$, $f \neq 0 \neq g$. Поскольку A оставляет S инвариантным, то $A^n|f| \in S$, так что $(|g|, A^n|f|) = 0$ для всех n. Но тогда A не эргодичен.

(c) $\Rightarrow$ (a) По предположению $\|A\|$ — собственное значение. Пусть ψ — собственный вектор A с собственным значением $\|A\|$, и предположим, что ψ вещественнозначен. Поскольку $|\psi| \pm \psi \geqslant 0$, то $A(|\psi| \pm \psi) \geqslant 0$, так что $|A\psi| \leqslant A|\psi|$. Итак,

$$(|\psi|, A|\psi|) \geqslant (|\psi|, |A\psi|) \geqslant (\psi, A\psi) = \|A\| \|\psi\|^2.$$

В результате $A|\psi| = \|A\| |\psi|$, так что $|\psi|$ также собственный вектор. Покажем, что $|\psi|$ строго положителен. Пусть $S = \{f \in L^2(M, d\mu) \mid f\psi = 0$ почти всюду$\}$. Очевидно, S — подпространство, инвариантное относительно действия $L^\infty(M)$. Пусть $S_+ = \{g \in S \mid g \geqslant 0\}$. Тогда для $f \in S_+$ имеем $(Af, |\psi|) = (f, A|\psi|) = \|A\| (f, |\psi|) = 0$. Поскольку Af положительна, $(Af)\psi = 0$ почти всюду, т. е. $Af \in S_+$. Итак, A оставляет S_+ инвариантным. Поскольку $S = S_+ - S_+ + i(S_+ - S_+)$, то A оставляет инвариантным и S. Итак, по условию (c), $S = \{0\}$ или $S = \mathscr{H}$. Поскольку $\psi \notin S$ и $\psi \neq 0$, то $S = \{0\}$, откуда следует, что $|\psi| > 0$ почти всюду.

Итак, мы знаем, что каждый вещественный собственный вектор с собственным значением $\|A\|$ почти всюду не равен нулю, а также что $A|\psi| = \|A\| |\psi|$. Таким образом, разность $|\psi| - \psi$ либо есть собственный вектор с собственным значением $\|A\|$, либо тождественно равна нулю. Поэтому она либо почти всюду исчезает, либо почти всюду не исчезает. Это означает, что каждый вещественный собственный вектор с собственным значением $\|A\|$ или почти всюду строго положителен, или почти всюду строго отрицателен. Если бы A обладал двумя вещественными собственными векторами с собственным значением $\|A\|$, то он обладал бы двумя ортогональными почти всюду положительными собственными векторами. Поскольку это невозможно, заключаем, что A имеет только один собственный вектор с собственным значением $\|A\|$ и этот собственный вектор строго положителен.

Пусть, наконец, ψ — произвольный собственный вектор с собственным значением $\|A\|$. Поскольку A переводит положительные функции в положительные, он переводит вещественные функции в вещественные, так что $\operatorname{Re}(A\psi) = A(\operatorname{Re}\psi)$. Значит, $\operatorname{Re}\psi$ и $\operatorname{Im}\psi$ — собственные векторы с собственным значением $\|A\|$. Отсюда следует, что ψ — произведение все того же единственного вещественного собственного вектора на комплексное число. ∎

Чтобы применить этот результат к низшему собственному значению самосопряженного оператора, можно воспользоваться либо резольвентой, либо полугруппой, порожденной этим оператором. Заметим сначала, что справедливо такое

Предложение. Пусть H — самосопряженный оператор, ограниченный снизу. Пусть $E=\inf\sigma(H)$. Оператор e^{-tH} сохраняет положительность при *всех* $t>0$ тогда и только тогда, когда $(H-\lambda)^{-1}$ сохраняет положительность при *всех* $\lambda<E$.

Доказательство. Предложение следует из формул

$$(H-\lambda)^{-1}\varphi=\int\limits_0^\infty e^{\lambda t}e^{-tH}\varphi\,dt \qquad \lambda<E,$$
$$e^{-tH}\varphi=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{tH}{n}\right)^{-n}\varphi, \qquad t>0, \tag{71}$$

знакомых нам из теории полугрупп (§ X.8). В случае самосопряженного оператора их легко доказать посредством функционального исчисления.

Теорема XIII.44. Пусть H — самосопряженный ограниченный снизу оператор в $L^2(M, d\mu)$. Предположим, что e^{-tH} сохраняет положительность при всех $t>0$ и что $E=\inf\sigma(H)$ — собственное значение. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(a) E — простое собственное значение со строго положительным собственным вектором;
(b) оператор $(H-\lambda)^{-1}$ эргодичен при некотором $\lambda<E$;
(c) оператор e^{-tH} эргодичен при некотором $t>0$;
(d) $(H-\lambda)^{-1}$ усиливает положительность для всех $\lambda<E$;
(e) e^{-tH} усиливает положительность для всех $t>0$.

Доказательство. По теореме XIII.43 эквивалентны (a), (b) и (c) и очевидно, что (d)$\Rightarrow$(b) и (e)$\Rightarrow$(c). Мы завершим доказательство, показав, что (c)$\Rightarrow$(d) и (e).

(c)$\Rightarrow$(d) Пусть u и v — положительные векторы. Поскольку e^{-tH} при некотором t эргодичен, $(u, e^{-sH}v)>0$ для некоторого $s>0$. Но функция $(u, e^{-sH}v)$ непрерывна, поэтому она больше нуля при s из некоторого интервала. Итак,

$$(u, (H-\lambda)^{-1}v)=\int\limits_0^\infty e^{\lambda s}(u, e^{-sH}v)\,ds>0.$$

(c)$\Rightarrow$(e) Пусть u, v положительны, и пусть $B=\{t>0\mid(u, e^{-tH}v)>0\}$. Поскольку B непусто и функция $(u, e^{-tH}v)$ аналитична в окрестности положительной вещественной оси, то множество $(0, \infty)\setminus B$ может иметь в качестве предельной точки только 0. В частности, B содержит произвольно малые числа. Итак, если можно показать, что из $t > s$ и $s \in B$ следует $t \in B$, то можно заключить, что $B = (0, \infty)$. Фиксируем $s \in B$. Тогда $(u, e^{-sH}v) > 0$, так что произведение $u(\cdot)(e^{-sH}v)(\cdot)$ не есть тождественный нуль. Пусть $w = \min\{u, e^{-sH}v\}$. Тогда функция $w(m)$ не равна тождественно нулю. Поскольку $e^{-\tau H}$ сохраняет положительность, то

$$(u, e^{-\tau H}(e^{-sH}v)) \geqslant (u, e^{-\tau H}w) = (e^{-\tau H}u, w) \geqslant (e^{-\tau H}w, w) = \\ = \| e^{-\tau H/2}w \|^2 > 0.$$

Мы воспользовались тем, что w положительна и что $e^{-\tau H/2}$ сохраняет положительность, откуда заключили, что $e^{-\tau H/2}w \neq 0$. Итак, из $s \in B$ и $\tau > 0$ вытекает $s + \tau \in B$. ∎

Пример 3 (заново). Пусть A — оператор в комплексном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, коммутирующий с заданным комплексным сопряжением, а также удовлетворяющий неравенству $A \geqslant cI$ для некоторого $c > 0$. Пусть $H = d\Gamma(A)$ — вторичное квантование A в $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$, рассматриваемое как оператор в $L^2(Q, d\mu)$ (см. § X.7). Тогда $H\Omega_0 = 0$, хотя $A \restriction \{\Omega_0\}^\perp \geqslant cI$. Таким образом, H обладает невырожденным строго положительным основным состоянием. Мы заключаем, что оператор $\Gamma(e^{-tA}) = e^{-tH}$ усиливает положительность при всех $t > 0$.

В приложениях теоремы XIII.44 очень полезна следующая теорема теории возмущений. Помимо нее в теории возмущений имеется другой результат, основанный на резольвенте, а не на полугруппе, который также весьма полезен (см. задачи 91, 92).

Теорема XIII.45. Пусть H и H_0 — полуограниченные самосопряженные операторы в $L^2(M, d\mu)$, где $\langle M, \mu \rangle$ — пространство с σ-конечной мерой. Предположим, что существует последовательность ограниченных операторов умножения V_n, такая, что последовательность $H_0 + V_n$ сходится к H в сильном резольвентном смысле, а $H - V_n$ сходится к H_0 в сильном резольвентном смысле. Предположим далее, что $H - V_n$ и $H_0 + V_n$ равномерно ограничены снизу. Тогда

(a) e^{-tH} сохраняет положительность в том и только том случае, когда сохраняет положительность e^{-tH_0};

(b) семейство операторов $\{e^{-tH}\} \cup L^\infty(M, d\mu)$ неприводимо на $L^2(M, d\mu)$ в том и только том случае, когда $\{e^{-tH_0}\} \cup L^\infty(M, d\mu)$ неприводимо на $L^2(M, d\mu)$.

Доказательство. По формуле Троттера для произведения (теорема VIII.31) и по непрерывности, гарантируемой функциональным исчислением (теорема VIII.20),

$$e^{-tH} = \underset{n \to \infty}{\text{s-lim}} \left(\underset{m \to \infty}{\text{s-lim}} \left[e^{-tH_0/m} e^{-tV_n/m} \right]^m \right), \tag{72a}$$

$$e^{-tH_0} = \underset{n \to \infty}{\text{s-lim}} \left(\underset{m \to \infty}{\text{s-lim}} \left[e^{-tH/m} e^{+tV_n/m} \right]^m \right). \tag{72b}$$

Поскольку операторы $e^{\pm tV_n/m}$ сохраняют положительность, мы видим, что (а) выполняется. Более того, из (72) и того, что $e^{\pm tV_n/m} \in L^\infty(M)$, следует инвариантность относительно e^{-tH} любого подпространства, инвариантного относительно действия e^{-tH_0} и $L^\infty(M)$. ∎

Теперь можно применить теорему XIII.44 к шредингеровым операторам и к пространственно обрезанным $P(\varphi)_2$-гамильтонианам.

Теорема XIII.46. Пусть H — гамильтониан N-частичной шредингеровой системы с отделенным движением центра масс. Предположим, что потенциалы V_{ij} лежат в $R + (L^\infty)_\varepsilon$. Тогда, если H имеет собственное значение в качестве нижней грани своего спектра, то оно невырожденно, а соответствующая собственная функция строго положительна.

Доказательство. Согласно теоремам XIII.43 и XIII.44, нужно только доказать, что e^{-tH} сохраняет положительность и что семейство $\{e^{-tH}\} \cup L^\infty(\mathbb{R}^{3N-3})$ действует неприводимым образом. Согласно примеру 1 и доказательству части (b) ⟹ (c) теоремы XIII.43, мы знаем, что это так для e^{-tH_0}. Пусть $V_{ij}^{(n)}$ определены посредством

$$V_{ij}^{(n)}(x) = \begin{cases} V_{ij}(x), & \text{если } |V_{ij}(x)| \leqslant n, \\ n, & \text{если } V_{ij}(x) > n, \\ -n, & \text{если } V_{ij}(x) < -n. \end{cases}$$

Легко доказать, что $V_{ij} - V_{ij}^{(n)} \to 0$ по норме Рольника. По теореме VIII.25 (с), $H_0 + \sum V_{ij}^{(n)} \to H$ и $H - \sum V_{ij}^{(n)} \to H_0$ в равномерном резольвентном смысле. Поэтому применима теорема XIII.45, что завершает доказательство. ∎

Следствие. Пусть H удовлетворяет условиям теоремы XIII.46 и $H\psi = E\psi$, где $E = \inf \sigma(H)$. Пусть U — произвольный сохраняющий положительность унитарный оператор, коммутирующий с H. Тогда $U\psi = \psi$.

Доказательство. Поскольку U коммутирует с H, то $H(U\psi) = E(U\psi)$. Но E невырожденно, поэтому $U\psi = \alpha\psi$. Поскольку U унитарно, то $|\alpha| = 1$, а поскольку U сохраняет положительность и ψ положительно, то $\alpha = 1$. ∎

Например, если все V_{ij} сферически симметричны и H имеет собственное значение в качестве нижней грани спектра, то соответствующий собственный вектор остается инвариантным при поворотах и отражениях.

Мы обращаем внимание читателя на то, что в теореме XIII.46 речь идет о низшем собственном значении H как оператора во всем $L^2(\mathbb{R}^{3N-3})$. Если H коммутирует с семейством $\mathcal{P}$ перестановок координат и мы сужаем его на некоторое подпространство из $L^2(\mathbb{R}^{3N-3})$ с определенной симметрией относительно перестановок, то наинизшее собственное значение суженного оператора не обязано быть невырожденным. Действительно, в силу следствия, если только мы не следим за подпространством, ***поточечно*** инвариантным относительно $\mathcal{P}$, основное состояние суженного оператора есть возбужденное состояние несуженного оператора. Отсюда вытекает утверждение, что *основные состояния бозонных систем невырожденны, в то время как основные состояния фермионных систем могут быть вырожденными.*

Теорема XIII.47. Пусть функция $V\in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$ положительна и $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x)=\infty$. Тогда оператор $-\Delta+V$ имеет невырожденное строго положительное основное состояние.

Доказательство. В § 14 мы увидим, что оператор $-\Delta+V$ имеет чисто дискретный спектр, так что нижняя грань его спектра наверняка есть собственное значение. Доказательство оставшихся заключений близко к доказательству теоремы XIII.46 с точностью до одной детали. Пусть $V_n=\min\{V, n\}$. Тогда все операторы $-\Delta+V_n$, $-\Delta+V$, $-\Delta$ и $-\Delta+(V-V_n)$ в существенном самосопряжены на $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ по теореме X.28. Более того, для любого $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ имеем $V_n\psi\to V\psi$ в L^2. Таким образом, по теореме XIII.25(a) мы имеем сильную резольвентную сходимость. ▮

Если включить в рассмотрение очень сингулярные потенциалы V, то оператор $-\Delta+V$, определенный как сумма квадратичных форм, может обладать вырожденным основным состоянием (см. пример 2 из § 13 и задачу 95). (Ссылки по поводу следующего результата даны в Замечаниях.)

Теорема XIII.48. Пусть G — замкнутое подмножество нулевой меры в $\mathbb{R}^n$, и пусть $V\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n\setminus G)$, $V\geqslant 0$. Пусть оператор $H=-\Delta+V$ определен как сумма квадратичных форм. Тогда:

(a) если $\mathbb{R}^n\setminus G$ связно и $\inf\sigma(H)$ — собственное значение, то это простое собственное значение и соответствующая собственная функция строго положительна;

(b) если $\mathbb{R}^n\setminus G$ несвязно, то V можно выбрать так, что H имеет вырожденное основное состояние.

И наконец, мы обращаемся к проблеме существования и единственности основных состояний в рамках теории гиперсжимающих полугрупп (см. § X.9).

Теорема XIII.49. Пусть H_0 порождает усиливающую положительность гиперсжимающую полугруппу на вероятностном пространстве с мерой $\langle M, \mu\rangle$. Предположим, что V есть (не обязательно ограниченный) оператор умножения, причем V и e^{-V} лежат в $\bigcap_{p<\infty} L^p(M, d\mu)$. Пусть $H = H_0 + V$. Тогда:

(a) $E = \inf \sigma(H)$ — собственное значение;

(b) E невырожденно;

(c) собственная функция основного состояния строго положительна.

В частности, свойства (a)—(c) выполняются для пространственно обрезанных $P(\varphi)_2$-гамильтонианов.

Доказательство. Докажем сначала (b) и (c), предполагая, что выполнено (a), а затем докажем (a). Пусть V_n определено посредством

$$V_n(q) = \begin{cases} V(q), & \text{если} \quad |V(q)| \leqslant n, \\ n, & \text{если} \quad V(q) > n, \\ -n, & \text{если} \quad V(q) < -n. \end{cases}$$

Поскольку $V_n \to V$ в каждом L^p $(p < \infty)$ и $\sup_n \{\|e^{-V_n}\|_p, \|e^{-(V-V_n)}\|_p\} < \infty$, то по теореме X.60 $H_0 + V_n \to H_0 + V$ и $H_0 + V - V_n \to H_0$ в равномерном резольвентном смысле. Поскольку e^{-tH_0} — усиливающая положительность полугруппа, то применима теорема XIII.45, а потому (b) и (c) выполняются, если справедливо (a).

Для доказательства (a) будем действовать следующим образом. Пусть t выбрано так, что $A = \exp(-tH)$ — ограниченный оператор из L^2 в L^4. Нужно только доказать, что $\|A\|$ — собственное значение A. **Конечное разбиение** пространства M есть семейство $\{S_1, \ldots, S_n\} = \alpha$ попарно непересекающихся измеримых подмножеств в M, объединение которых есть M. Если α и β — разбиения, то будем писать $\beta > \alpha$, если каждое множество из β есть подмножество некоторого множества из α. Для каждого разбиения α определим проектор

$$P_\alpha = \sum_{S \in \alpha} \mu(S)^{-1} (\chi_S, \cdot)\, \chi_S$$

и положим $A_\alpha = P_\alpha A P_\alpha$. Докажем сначала следующие свойства набора $\{P_\alpha\}$:

(i) $\text{s-}\lim_{\alpha} P_\alpha = 1$;

(ii) P_α сохраняет положительность;

(iii) P_α есть сжатие на каждом $L^p(M, d\mu)$.

Для доказательства (i) заметим, что $P_\alpha\psi = \psi$ для любой простой функции ψ при достаточно большом α. Поскольку множество простых функций плотно, отсюда следует (i). Свойство (ii) очевидно, а (iii) следует из (ii), равенства $P_\alpha 1 = 1$ и теоремы X.55a. Итак, $\{A_\alpha\}$ удовлетворяет условиям

(iv) $\text{s-}\lim_{\alpha} A_\alpha = A$;

(v) $\|A\| = \lim_{\alpha} \|A\|_\alpha$;

(vi) существует такое K, что $\|A_\alpha\psi\|_4 \leqslant K\|A_\alpha\|\|\psi\|_2$ для всех $\psi \in L^2$ и всех α.

Свойство (iv) следует из (i); (vi) следует из (iii) и того факта, что $\|A\psi\|_4 \leqslant \bar{K}\|\psi\|_2$ для некоторого $\bar{K}$, а также неравенства $\|A_\alpha\| \geqslant (A1, 1)$. Для доказательства (v) заметим сначала, что $\|A_\alpha\| \leqslant \|A\|$, поскольку $\|P_\alpha\| = 1$. С другой стороны, в силу (iv), $\|A\| \leqslant \underline{\lim}\|A_\alpha\|$. Итак, $\lim\|A_\alpha\|$ существует и равен $\|A\|$.

Фиксируем разбиение $\alpha = \{S_1, \ldots, S_n\}$. Тогда $\operatorname{Ran} P_\alpha$ естественно изоморфен $\mathbb{C}^n$ посредством отображения $\sum c_i \chi_{S_i} \mapsto (c_1, \ldots, c_n)$. Представим $\mathbb{C}^n$ как $L^2(\{1, \ldots, n\}, d\nu)$, где $\nu(i) = \mu(S_i)$. Тогда A_α сохраняет положительность на $\mathbb{C}^n$. Поскольку A_α — положительно определенная конечномерная матрица, то $\|A_\alpha\|$ — собственное значение, так что можно найти такое $\varphi_\alpha \in \operatorname{Ran} P_\alpha$, что $A_\alpha\varphi_\alpha = \|A_\alpha\|\varphi_\alpha$. По построению в доказательстве теоремы XIII.43 $\psi_\alpha = |\varphi_\alpha|$ — собственный вектор. Нормируем ψ^α так, чтобы $\|\psi_\alpha\|_2 = 1$. Тогда, с одной стороны, $\|\psi_\alpha\|_4 \leqslant K$, а с другой, $1 = \|\psi_\alpha\|_2 \leqslant \leqslant \|\psi_\alpha\|_1^{1/3}\|\psi_\alpha\|_4^{2/3}$ по неравенству Гёльдера. Итак, $\|\psi_\alpha\|_1 \geqslant K^{-2}$. Пусть ψ — слабая предельная точка направленности $\{\psi_\alpha\}$, и пусть $\{\psi_\beta\}$ — поднаправленность, сходящаяся к ψ. Тогда для любого $\varphi \in L^2$

$$(\varphi, A\psi) = (A\varphi, \psi) = \lim_{\beta} (A\varphi, \psi_\beta) = \lim_{\beta} \|A_\beta\|(\varphi, \psi_\beta) = \|A\|(\varphi, \psi),$$

так что $A\psi = \|A\|\psi$. Более того, поскольку $\psi_\beta \geqslant 0$, то $\|\psi_\alpha\|_1 = (1, \psi_\alpha) \geqslant K^{-2}$. Итак, $(1, \psi) \geqslant K^{-2}$. В частности, $\psi \neq 0$. Таким образом, $\|A\|$ — собственное значение. ∎

Дополнение 1 к § XIII.12. Критерии Бёрлинга — Дени

Существует один особенно простой критерий того, что положительный самосопряженный оператор H в $L^2(M, d\mu)$ порождает сохраняющую положительность полугруппу.