(i) $\text{s-}\lim\limits_{\alpha} P_\alpha = 1$;

(ii) P_α сохраняет положительность;

(iii) P_α есть сжатие на каждом $L^p(M, d\mu)$.

Для доказательства (i) заметим, что $P_\alpha\psi = \psi$ для любой простой функции ψ при достаточно большом α. Поскольку множество простых функций плотно, отсюда следует (i). Свойство (ii) очевидно, а (iii) следует из (ii), равенства $P_\alpha 1 = 1$ и теоремы X.55a. Итак, $\{A_\alpha\}$ удовлетворяет условиям

(iv) $\text{s-}\lim\limits_{\alpha} A_\alpha = A$;

(v) $\| A \| = \lim\limits_{\alpha} \| A \|_\alpha$;

(vi) существует такое K, что $\| A_\alpha\psi \|_4 \leqslant K \| A_\alpha \| \| \psi \|_2$ для всех $\psi \in L^2$ и всех α.

Свойство (iv) следует из (i); (vi) следует из (iii) и того факта, что $\| A\psi \|_4 \leqslant \bar{K} \| \psi \|_2$ для некоторого $\bar{K}$, а также неравенства $\| A_\alpha \| \geqslant (A1, 1)$. Для доказательства (v) заметим сначала, что $\| A_\alpha \| \leqslant \| A \|$, поскольку $\| P_\alpha \| = 1$. С другой стороны, в силу (iv), $\| A \| \leqslant \underline{\lim} \| A_\alpha \|$. Итак, $\lim \| A_\alpha \|$ существует и равен $\| A \|$.

Фиксируем разбиение $\alpha = \{S_1, \ldots, S_n\}$. Тогда $\operatorname{Ran} P_\alpha$ естественно изоморфен $\mathbb{C}^n$ посредством отображения $\sum c_i \chi_{S_i} \mapsto (c_1, \ldots, c_n)$. Представим $\mathbb{C}^n$ как $L^2(\{1, \ldots, n\}, d\nu)$, где $\nu(i) = \mu(S_i)$. Тогда A_α сохраняет положительность на $\mathbb{C}^n$. Поскольку A_α — положительно определенная конечномерная матрица, то $\| A_\alpha \|$ — собственное значение, так что можно найти такое $\varphi_\alpha \in \operatorname{Ran} P_\alpha$, что $A_\alpha \varphi_\alpha = \| A_\alpha \| \varphi_\alpha$. По построению в доказательстве теоремы XIII.43 $\psi_\alpha = |\varphi_\alpha|$ — собственный вектор. Нормируем ψ^αтак, чтобы $\| \psi_\alpha \|_2 = 1$. Тогда, с одной стороны, $\| \psi_\alpha \|_4 \leqslant K$, а с другой, $1 = \| \psi_\alpha \|_2 \leqslant \leqslant \| \psi_\alpha \|_1^{1/3} \| \psi_\alpha \|_4^{2/3}$ по неравенству Гёльдера. Итак, $\| \psi_\alpha \|_1 \geqslant K^{-2}$. Пусть ψ — слабая предельная точка направленности $\{\psi_\alpha\}$, и пусть $\{\psi_\beta\}$ — поднаправленность, сходящаяся к ψ. Тогда для любого $\varphi \in L^2$

$$(\varphi, A\psi) = (A\varphi, \psi) = \lim_\beta (A\varphi, \psi_\beta) = \lim_\beta \| A_\beta \| (\varphi, \psi_\beta) = \| A \| (\varphi, \psi),$$

так что $A\psi = \| A \| \psi$. Более того, поскольку $\psi_\beta \geqslant 0$, то $\| \psi_\alpha \|_1 = = (1, \psi_\alpha) \geqslant K^{-2}$. Итак, $(1, \psi) \geqslant K^{-2}$. В частности, $\psi \neq 0$. Таким образом, $\| A \|$ — собственное значение. ∎

Дополнение 1 к § XIII.12. Критерии Бёрлинга — Дени

Существует один особенно простой критерий того, что положительный самосопряженный оператор H в $L^2(M, d\mu)$ порождает сохраняющую положительность полугруппу.

Теорема XIII.50 (первый критерий Бёрлинга—Дени). Пусть $H \geqslant 0$—самосопряженный оператор в $L^2(M, d\mu)$. Продолжим матричный элемент $(\psi, H\psi)$ на все L^2, полагая его равным бесконечности, когда $\psi \notin Q(H)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(a) e^{-tH} сохраняет положительность при всех $t > 0$;

(b) $(|u|, H|u|) \leqslant (u, Hu)$ для всех $u \in L^2$;

(c) e^{-tH} сохраняет вещественность и $(u_+, Hu_+) \leqslant (u, Hu)$ для всех вещественнозначных $u \in L^2$ (здесь $u_+(x) \equiv \max\{u(x), 0\}$);

(d) e^{-tH} сохраняет вещественность и $(u_+, Hu_+) + (u_- Hu_-) \leqslant \leqslant (u, Hu)$ для всех вещественнозначных $u \in L^2$ (здесь $u_- = u_+ - u$).

Доказательство. Мы докажем, что (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a). Доказательства остальных импликаций аналогичны и оставлены читателю (задача 96).

(a) $\Rightarrow$ (b) При нашем способе продолжения $(\cdot, H\cdot)$ на L^2

$$(u, Hu) = \lim_{t \to 0} t^{-1}[(u, (1 - e^{-tH})u)]. \tag{73}$$

По предположению (a), $|e^{-tH}u| \leqslant e^{-tH}|u|$, так что

$$(u, e^{-tH}u) = \|e^{-tH/2}u\|^2 \leqslant \|e^{-tH/2}|u|\|^2 = (|u|, e^{-tH}|u|).$$

Отсюда, поскольку $(u, u) = (|u|, |u|)$, имеем

$$(u, (e^{-tH} - 1)u) \leqslant (|u|, (e^{-tH} - 1)|u|),$$

так что (b) следует из (73).

(b) $\Rightarrow$ (a) Предположим, что u—положительная функция и $a > 0$. Пусть $w = (H + a)^{-1}u$; определим $Q(\varphi) = (\varphi, H\varphi) + a(\varphi, \varphi)$ на всем L^2. Заметим сначала, что для $\varphi \in D(H)$ и любого ψ

$$Q(\varphi + \psi) = Q(\varphi) + Q(\psi) + 2\mathrm{Re}((H + a)\varphi, \psi).$$

Итак, если $\mathrm{Re}\, v \geqslant 0$, то

$$Q(w + v) = Q(w) + Q(v) + 2\mathrm{Re}(u, v) \geqslant Q(w) + Q(v).$$

Другими словами, если $\varphi \equiv w + v$ удовлетворяет неравенству $\mathrm{Re}\,\varphi \geqslant \mathrm{Re}\, w$, то $Q(\varphi) \geqslant Q(w)$, причем равенство имеет место только при $\varphi = w$. По предположению (b), $Q(|w|) \leqslant Q(w)$. Поскольку $\mathrm{Re}|w| \geqslant \mathrm{Re}\, w$, мы видим, что $|w| = w$, т. е. $w \geqslant 0$. Таким образом, мы убедились, что $(H + a)^{-1}$ сохраняют положительность для любого $a > 0$. Поэтому, согласно предложению, предшествующему теореме XIII.44, наша полугруппа сохраняет положительность. ∎

Пример 1. Из критерия (d) следует, что конечномерная положительно определенная матрица порождает сохраняющую положительность полугруппу тогда и только тогда, когда все ее внедиагональные элементы отрицательны. Это довольно легко доказать непосредственно в более общей форме (задача 97).

Пример 2. Можно обнаружить непосредственно, без обращения к формуле Троттера для произведения, что если V — положительный оператор умножения и H_0 порождает сохраняющую положительность полугруппу, то тем же свойством обладает и оператор H_0+V, определенный как сумма форм. Действительно, когда $Q(H)=Q(H_0)$, критерий (b) справедлив для H_0 в том и только том случае, когда он выполняется для H.

Пример 3. Легко видеть (задача 99), что лапласианы Дирихле и Неймана, определенные в § 15, удовлетворяют критерию (b) и, таким образом, порождают сохраняющие положительность полугруппы; иными словами, интегральные ядра их резольвент («функции Грина») — положительные функции.

Существует и несколько более тонкий критерий того, что e^{-tH} — сжатие на всех пространствах L^p, в случае, если оно сохраняет положительность.

Теорема XIII.51 (второй критерий Бёрлинга — Дени). Пусть $H \geqslant 0$ — самосопряженный оператор, порождающий сохраняющую положительность полугруппу на $L^2(M, d\mu)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(a) e^{-tH} — сжатие на каждом $L^p(M, d\mu)$ для всех p и всех $t \geqslant 0$;

(b) e^{-tH} — сжатие на $L^\infty(M, d\mu)$ для всех $t > 0$;

(c) пусть $(f\wedge 1)(x) \equiv \min\{f(x), 1\}$; для каждого $f \geqslant 0$ имеем $((f\wedge 1), H(f\wedge 1)) \leqslant (f, Hf)$;

(d) пусть F — произвольная функция из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям $|F(x)| \leqslant |x|$ и $|F(x)-F(y)| \leqslant |x-y|$. Тогда $(F(f), HF(f)) \leqslant (f, Hf)$ для всех $f \in L^2$.

Доказательство. Покажем, что (c) $\Rightarrow$ (b) и (a) $\Rightarrow$ (d). Импликация (b) $\Rightarrow$ (a) вытекает из простой модификации интерполяционного построения в доказательстве теоремы X.55(a), а (d) $\Rightarrow$ (c) получается, если заметить, что $F(z)=\min\{\mathrm{Re}\, z, 1\}$ удовлетворяет условиям пункта (d).

(c) $\Rightarrow$ (b) Фиксируем такое $u \in L^2$, что $0 \leqslant u \leqslant 1$. Определим

$$\psi(v)=(v, Hv)+\|u-v\|^2=(v, (H+1)v)+\|u\|^2-2\mathrm{Re}(u, v).$$

Пусть $R=(H+1)^{-1}$. Тогда $\psi(Ru)=\|u\|^2-(u, Ru)$ и

$$((Ru-v), (H+1)(Ru-v))=(u, Ru)+(v, (H+1)v)-2\mathrm{Re}(u, v),$$

так что

$$\psi(v)=\psi(Ru)+((Ru-v), (H+1)(Ru-v)).$$

Это означает, что $\psi(v)$ принимает свое минимальное значение тогда и только тогда, когда $v = Ru$. Теперь, поскольку $u \leqslant 1$,

$$|(u-(v \wedge 1))(x)| \leqslant |(u-v)(x)|,$$

и по предположению $(v \wedge 1,\ H(v \wedge 1)) \leqslant (v,\ Hv)$, если $v \geqslant 0$. Итак,

$$\psi(Ru \wedge 1) \leqslant \psi(Ru).$$

Поскольку Ru минимизирует ψ, получаем, что $Ru \wedge 1 = Ru$, т. е. $Ru \leqslant 1$. Итак, R — сжатие на L^∞. Аналогично, $(1+\varepsilon H)^{-1}$ — сжатие на L^∞ для всех ε, так что $e^{-tH} = \lim\limits_{n \to \infty} (1+tH/n)^{-n}$ — сжатие на L^∞.

(a)$\Rightarrow$(d) В силу (73), достаточно показать, что

$$(F(f),\ (1-e^{-tH})F(f)) \leqslant (f,\ (1-e^{-tH})f)$$

для всех $t > 0$. Пусть K — конечномерное подпространство в $L^2(M, d\mu)$ функций вида $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, где $\{A_i\}_{i=1}^n$ — непересекающиеся множества конечной меры. При упорядочении $K' > K$, если $K \subset K'$, множество таких K становится направленным. Если $P(K)$ — проекция на K, то $\text{s-}\lim\limits_{K} P(K) = 1$, поэтому достаточно показать, что

$$(F(P(K)f),\ (1-e^{-tH})F(P(K)f)) \leqslant (P(K)f,\ (1-e^{-tH})P(K)f)$$

для каждого K. Пусть $b_{ij} = (\chi_{A_i}, (1-e^{-tH})\chi_{A_j})$. Тогда нужно только доказать, что

$$\sum_{i,j} \overline{F(\alpha_i)}\, F(\alpha_j)\, b_{ij} \leqslant \sum_{i,j} \bar{\alpha}_i \alpha_j b_{ij}. \tag{74}$$

Пусть $\lambda_i = (\chi_{A_i},\ \chi_{A_i})$ и $a_{ij} = (\chi_{A_i},\ e^{-tH}\chi_{A_j})$. Тогда $a_{ij} \geqslant 0$ и, поскольку $\|e^{-tH}\chi_{A_j}\|_1 \leqslant \lambda_j$, имеем

$$\sum_i a_{ij} \leqslant \lambda_j.$$

Пусть $m_j = \lambda_j - \sum\limits_i a_{ij} \geqslant 0$. Тогда $b_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} - a_{ij}$, так что

$$\sum_{i,j} \bar{z}_i z_j b_{ij} = \sum_{i<j} a_{ij} |z_i - z_j|^2 + \sum_j m_j |z_j|^2.$$

Из этих равенств следует (74). ∎

Пример 3 (заново). Применяя критерий (c), легко видеть, что лапласианы Неймана и Дирихле порождают сжимающие полугруппы на L^p (задача 99).