## Дополнение 2 к § XIII.12. Формула Леви — Хинчина

Для применения теорем из § 12 необходимы методы доказательства того, что полугруппы сохраняют положительность. Если генераторы имеют вид $-\Delta+V(x)$, то, как мы видели, порождаемые ими полугруппы сохраняют положительность: явное представление оператора $e^{t\Delta}$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$ показывает, что он обладает этим свойством, а формула Троттера для произведения позволяет вывести отсюда, что и $e^{t(\Delta-V)}$ также сохраняет положительность. Естественно задать вопрос: для каких еще функций $F(\cdot)$ оператор $F(-i\nabla)+V(x)$ порождает полугруппу, сохраняющую положительность? Конечно, если

$$F(-i\nabla)=-\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}+c,$$

где $\{a_{ij}\}$ — строго положительно определенная матрица, то ответ утвердительный, поскольку заменой переменных $F(-i\nabla)$ можно свести к $-\Delta+c$. Однако a priori не ясно, какие другие функции допустимы.

Пусть $F$ — непрерывная комплекснозначная функция на $\mathbb{R}^n$, вещественная часть которой ограничена снизу. Как в § IX.7, введем

$$F(-i\nabla)\varphi=(F(p)\hat{\varphi})^{\vee}.$$

В силу полуограниченности вещественной части $F$, оператор $F(-i\nabla)$ порождает сильно непрерывную полугруппу на $L^2(\mathbb{R}^n)$. Для не слишком «скверных» функций $V$ теорема X.50 показывает, что $F(-i\nabla)+V(x)$ также порождает сильно непрерывную полугруппу, а формула Троттера (теорема X.51) сводит вопрос о том, сохраняет ли положительность $\exp(-t(F(-i\nabla)+V(x)))$, к тому же вопросу, но для $\exp(-t(F(-i\nabla)))$. Назначение этого дополнения — охарактеризовать различными способами множество функций, для которых это справедливо.

Сначала положим $G(x)=e^{-tF(x)}$, и пусть $f$ и $g$ — положительные функции из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$(f,\ G(-i\nabla)g)=(G(p)\hat{g})^{\vee}\,(\bar{f})=(2\pi)^{-n/2}(\check{G}*g)(\bar{f})=$$
$$=(2\pi)^{-n/2}(\check{G}*(g*\bar{\bar{f}}))(0).$$

Итак, если $\check{G}$ — полиномиально ограниченная положительная мера, то $(f,\ G(-i\nabla)g)\geqslant 0$ для таких $f$ и $g$. Таким образом, по теореме Бохнера — Шварца (теорема IX.10), если функция $G$ положительно определена, то оператор $G(-i\nabla)$ сохраняет положительность. Обратно, если $G(-i\nabla)$ сохраняет положительность и мы положим $g_y(x)=f(x+y)$, то

$$(2\pi)^{-n/2}(\check{G}*f*\bar{\tilde{f}})(y)=(2\pi)^{-n/2}(\check{G}*g_y*\bar{\tilde{f}})(0)=(f,\ G(-i\nabla)g_y)\geqslant 0.$$

Поскольку $\check{G}$ умеренного роста, левая часть—полиномиально ограниченная функция (теорема IX.4 (a)). Итак, по теореме Бохнера $\mathcal{F}(\check{G}*f*\bar{\tilde{f}})=(2\pi)^n|\hat{f}|^2G$ — положительно определенная функция. Если теперь заменить $f(x)$ аппроксимативной единицей $j_\varepsilon(x)$, то $|\hat{j}_\varepsilon|^2G\to G$ при $\varepsilon\downarrow 0$ равномерно на компактных множествах, так что функция $G$ положительно определена.

Это доказывает характеристику, содержащуюся в первом из эквивалентных утверждений следующей теоремы. Второе утверждение дает характеристику в терминах самой $F$.

***Теорема XIII.52.*** Пусть $F(x)$ — комплекснозначная функция на $\mathbb{R}^n$, вещественная часть которой ограничена снизу. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(a) $e^{-tF(-i\nabla)}$ — сохраняющая положительность полугруппа;

(b) $e^{-tF(x)}$ для каждого $t>0$ — положительно определенная обобщенная функция в смысле Бохнера;

(c) $\overline{F(x)}=F(-x)$ и

$$\sum_{i,j=1}^{m}F(x_i-x_j)\bar{z}_iz_j\leqslant 0 \tag{75}$$

для всех $x_1,\ \ldots,\ x_m\in\mathbb{R}^n$ и $z\in\mathbb{C}^m$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{m}z_i=0$.

*Доказательство.* Уже доказано, что (a) и (b) эквивалентны. Чтобы доказать эквивалентность (b) и (c), достаточно показать, что если $A=\{a_{ij}\}$ есть $m\times m$-матрица, а $M(t)$ — матрица с элементами $M(t)_{ij}=e^{ta_{ij}}$, то $M(t)$ положительно определена при всех $t\geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $A$ **условно положительно определена**, т. е. $(A\zeta,\ \zeta)\geqslant 0$ для всех $\zeta\in\mathbb{C}^m$, удовлетворяющих $\sum_{i=1}^{m}\zeta_i=0$. Таким образом, предположим, что $M(t)$ положительно определена при $t\geqslant 0$, и пусть $\sum_{i=1}^{m}\zeta_i=0$. Тогда $(\zeta,\ M(t)\zeta)=0$ при $t=0$ и $(\zeta,\ M(t)\zeta)\geqslant 0$ при $t\geqslant 0$. Следовательно,

$$(\zeta,\ A\zeta)=\frac{d}{dt}(\zeta,\ M(t)\zeta)\Big|_{t=0}\geqslant 0,$$

так что $A$ условно положительно определена.

Обратно, предположим, что $A$ условно положительно определена. Пусть $e$ — вектор, все компоненты которого равны $1/\sqrt{m}$, и пусть $P$ — проектор на ортогональное дополнение к $e$. Предположение относительно $A$ означает, что произведение $PAP$ положительно определено. Итак, если определить $\tilde{a}_{ij}=(PAP)_{ij}$ и написать

$$A=PAP+(1-P)A(1-P)+PA(1-P)+(1-P)AP,$$

то легко проверить, что

$$a_{ij}=\tilde{a}_{ij}+\bar{b}_i+b_j$$

для некоторого вектора $b$. Следовательно, $M(t)_{ij}=\tilde{M}(t)_{ij}C(t)_{ij}$, где $\tilde{M}(t)_{ij}=e^{t\tilde{a}_{ij}}$, а $C(t)_{ij}=e^{t\bar{b}_i}e^{tb_j}$. Пользуясь теперь приведенной ниже леммой, по индукции получаем, что $\{e^{D_{ij}}\}$ положительно определена, если положительно определена $\{D_{ij}\}$. Применяя этот результат, видим, что матрица $\tilde{M}(t)_{ij}$ положительно определена. Очевидно, и $C(t)_{ij}$ обладает этим свойством, так что, снова пользуясь леммой, заключаем, что матрица $\{M(t)_{ij}\}$ положительно определена. ∎

Доказательство теоремы завершается следующей леммой.

***Лемма.*** Пусть $\{D_{ij}\}$ и $\{F_{ij}\}$ — положительно определенные матрицы. Тогда матрица $\{D_{ij}F_{ij}\}$ положительно определена.

*Доказательство.* Пусть $\{\mu_k, d_k\}$ и $\{\lambda_l, f_l\}$ — собственные значения и отвечающие им собственные функции матриц $\{D_{ij}\}$ и $\{F_{ij}\}$ соответственно. Если $\{e_i\}$ — стандартный базис в $\mathbb{C}^n$, то

$$D_{ij}F_{ij}=\sum_{l,\,k=1}^{n}\mu_k\lambda_l(e_i,\ d_k)(e_i,\ f_l)(d_k,\ e_j)(f_l,\ e_j).$$

Фиксируем теперь $k$ и $l$, и пусть $s_i=(e_i,\ d_k)(e_i,\ f_l)$. Тогда матрица $\{s_i\bar{s}_j\}$ положительно определена. Поэтому $\{D_{ij}F_{ij}\}$, будучи суммой (с положительными коэффициентами) положительно определенных матриц, положительно определена. ∎

Функции, удовлетворяющие (75), называются **условно отрицательно определенными**. Хотя мы уже охарактеризовали эти интересующие нас функции, очень важно иметь другие характеристики, поскольку, во-первых, неравенство (75) нелегко проверить, а во-вторых, из (75) трудно выделить другие необходимые условия. Две дальнейшие характеристики дает следующая

***Теорема XIII.53.*** Пусть $F(x)$ — комплекснозначная функция на $\mathbb{R}^n$, вещественная часть которой ограничена снизу. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(a) $e^{-tF(-i\nabla)}$ — сохраняющая положительность полугруппа;

(b) для каждого $a \in \mathbb{C}^n$ выражение $-D^*DF$, где $D = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_i$, а $D^* = -\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i \partial_i$, есть положительно определенная обобщенная функция;

(c) (формула Леви — Хинчина) существуют положительная конечная мера $\nu$ на $\mathbb{R}^n$ с $\nu(\{0\}) = 0$, положительно определенная матрица $A = \{a_{ij}\}$, вещественный вектор $\boldsymbol{\beta}$ и вещественное число $\alpha$, такие, что

$$F(\mathbf{x}) = \alpha + i\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x} \cdot A\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^n} \left[ e^{-\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}} - 1 - \frac{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{1+y^2} \right] \frac{1+y^2}{y^2} \, d\nu(\mathbf{y}). \quad (76)$$

*Доказательство.* Покажем сначала, что (75) эквивалентно (b) и (c). Итак, пусть справедливо (75). Тогда простое рассуждение, основанное на аппроксимации, показывает, что

$$F(f * f) = \int F(x-y) f(x) \overline{f(y)} \, dx \, dy \leqslant 0$$

для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей условию $\int f(x)\,dx = 0$. Если $D = \sum a_i \partial_i$, то $\int Df(x)\,dx = 0$ для всех $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, так что

$$0 \leqslant -F(\widetilde{\overline{Df}} * Df) = -F(D^*D(\tilde{\bar{f}} * f)) = -D^*DF(\tilde{\bar{f}} * f).$$

Следовательно, $-D^*DF$ — положительно определенная обобщенная функция.

Покажем теперь, что из (b) вытекает (c). Хотя идея здесь проста, но это самая длинная часть доказательства. Во-первых, возникают некоторые усложнения, связанные с многомерностью рассматриваемого случая, и, во-вторых, имеются технические усложнения, обусловленные тем фактом, что a priori $F$ — лишь обобщенная функция. Поскольку мы хотим рассматривать фурье-образ $F$, введем пространство $\mathscr{Z}$ фурье-образов функций из $C_0^\infty$ с топологией, при которой $g_\alpha \to g$ в $\mathscr{Z}$ тогда и только тогда, когда $\check{g}_\alpha \to \check{g}$ в $C_0^\infty$. Благодаря теореме Пэли — Винера (теорема IX.11) пространство $\mathscr{Z}$ имеет описание во внутренних терминах, однако здесь нас это не интересует. Пусть $G$ — фурье-образ $F$ — определяется как линейный функционал на $\mathscr{Z}$, заданный равенством

$$(G, g) = (F, \hat{g}).$$

Выберем такую функцию $\alpha \in \mathscr{Z}$, что $\alpha(x) = 1 + O(x^3)$ при $x = 0$. Чтобы убедиться в существовании такой $\alpha$, выберем любое $\beta \in \mathscr{Z}$

с условием $\beta(0)=1$. Тогда

$$\beta(x)=1+\sum_i b_i x_i+\sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j+O(x^3).$$

Пусть $p(x)$ — полином $p(x)=1+\sum_i c_i x_i+\sum_{i,j} d_{ij}x_i x_j$, где $c_i=-b_i$, $d_{ij}=-a_{ij}+b_i b_j$. Тогда $\alpha(x)=p(x)\beta(x)$ лежит в $\mathscr{Z}$, поскольку $C_0^\infty$ замкнуто относительно дифференцирований и $\alpha(x)=1+O(x^3)$.

Наша цель — доказать, что существует положительная мера $\sigma$ умеренного роста и вещественные числа $a_0$, $b_i$ $(i=1, \ldots, n)$, $c_{ij}$ $(i, j=1, \ldots, n)$, такие, что

$$(2\pi)^{n/2}F(x)=-\int_{|\lambda|>0}[e^{i\lambda x}-\alpha(\lambda)(1+i\lambda\cdot x)]\,d\sigma(\lambda)+$$
$$+a_0+i\sum_{j=1}^{n} b_j x_j+\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_i x_j \tag{77}$$

с положительно определенной матрицей $\{c_{ij}\}$ и $\int\limits_{0<|\lambda|<1}|\lambda|^2 d\sigma+$ $+\int\limits_{|\lambda|\geqslant 1} d\sigma<\infty$. Приведение формулы (77) к виду (76) мы предоставим читателю (задача 100).

Считая $G$ фурье-образом $F$, находим, что (77) эквивалентно равенству

$$(G, \varphi)=-\int_{|\lambda|>0}[\varphi(\lambda)-\alpha(\lambda)(\varphi(0)+\lambda\cdot\nabla\varphi(0))]\,d\sigma(\lambda)+$$
$$+a_0\varphi(0)+\sum_{j=1}^{n} b_j(\partial_j\varphi)(0)-\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(\partial_i\partial_j\varphi)(0) \tag{78}$$

для всех $\varphi\in\mathscr{Z}$. Пусть мы можем доказать, что

$$(G, \varphi)=-\int_{|\lambda|\geqslant 0}\varphi(\lambda)\,d\sigma(\lambda)-\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(\partial_i\partial_j\varphi)(0) \tag{79}$$

для всех $\varphi$, обращающихся в нуль в точке $\lambda=0$ вместе с производной. Тогда (78) получается применением формулы (79) к $\varphi(\lambda)-\alpha(\lambda)[\varphi(0)+\lambda\cdot\nabla\varphi(0)]$. Далее, заметим, что правая часть (79) определяет непрерывный функционал на $\{\varphi\in\mathscr{Z}\,|\,\varphi(0)=0=\partial_j\varphi(0),\ j=1, \ldots, n\}$, если только

$$\int_{0<|\lambda|\leqslant 1}|\lambda|^2\,d\sigma+\int_{|\lambda|\geqslant 1} d\sigma<\infty$$

(задача 101), и что суммы функций вида $\lambda_i\lambda_j\psi$, где $\psi\in\mathscr{Z}$, совпадают с суммами функций $\varphi\in\mathscr{Z}$, удовлетворяющих условию $\varphi(0)=0=\partial_j\varphi(0)$ (задача 102).

Итак, для доказательства формулы (76) достаточно убедиться, что существуют мера $d\sigma$, удовлетворяющая указанной оценке, и положительно определенная матрица $c_{ij}$, такая, что (79) справедливо для всех $\varphi$ вида $\lambda_i\lambda_j\psi$, где $\psi\in\mathscr{Z}$. Прежде всего мы утверждаем, что существует знаконеопределенная мера $d\nu_{ij}$ на $\mathbb{R}^n$, такая, что

$$(G,\ \lambda_i\lambda_j\psi)=-\int\psi(\lambda)\,d\nu_{ij}(\lambda) \qquad (80)$$

для всех $\psi\in\mathscr{Z}$. Действительно, $-(\lambda_i\pm\lambda_j)^2G$ определяет положительную меру умеренного роста по предположению (b) и теореме Бохнера, и

$$\lambda_i\lambda_j={}^1/_4\,[(\lambda_i+\lambda_j)^2-(\lambda_i-\lambda_j)^2].$$

Поскольку

$$(G,\ \lambda_i\lambda_j(\lambda_k\lambda_l\eta))=(G,\ \lambda_k\lambda_l(\lambda_i\lambda_j\eta)),$$

мы видим, что меры $d\nu_{ij}$ удовлетворяют условию

$$\lambda_k\lambda_l\,d\nu_{ij}=\lambda_i\lambda_j\,d\nu_{kl}. \qquad (81)$$

Поэтому можно определить меру $d\sigma$ на $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, имеющую умеренный рост на $\infty$ и такую, что $\int\limits_{0<|\lambda|<1}|\lambda|^2d|\sigma|<\infty$, действуя следующим образом. Пусть $\Omega_{ij}=\{\lambda\,|\,\lambda_i\lambda_j\neq 0\}$. На $\Omega_{ij}$ положим $d\mu=(\lambda_i\lambda_j)^{-1}d\nu_{ij}$. В силу (81) эта мера корректно определена на $\bigcup\Omega_{ij}=\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. В частности, согласно (81), $\mu\{\lambda\,|\,\lambda_i\lambda_j=0,\ \lambda\neq 0\}=0$, так что, в силу (80),

$$(G,\ \lambda_i\lambda_j\psi)=-\int\limits_{|\lambda|>0}(\lambda_i\lambda_j\psi(\lambda))\,d\mu-\nu_{ij}(\{0\})\,\psi(0).$$

Полагая теперь $\varphi=\lambda_i\lambda_j\psi$, получаем $\psi(0)=(\partial_i\partial_j\varphi)(0)$ и, более того, $(\partial_k\partial_l\varphi)(0)=0$ во всех случаях, кроме $\{k,\ l\}=\{i,\ j\}$. Итак, (79) доказано с $c_{ij}=\nu_{ij}(\{0\})$.

Остается только доказать, что $d\sigma$ положительна, причем $\int\limits_{|\lambda|>1}d\sigma<\infty$, а $\{c_{ij}\}$ положительно определена. Чтобы убедиться в положительности $\sigma$, заметим, что по предположению $\lambda_i^2\,d\sigma$ положительна при любом $i$, а потому положительна и $\lambda^2\,d\sigma$. Более того, $\sum\bar{\zeta}_i\zeta_jc_{ij}=\nu_\zeta(\{0\})\geqslant 0$ для любого $\zeta\in\mathbb{C}^n$, где $\nu_\zeta$ — фурье-образ $-D_\zeta^*D_\zeta F$, а $D_\zeta=\sum\limits_{i=1}^n\zeta_i\partial_i$. Наконец, $\int\limits_{|\lambda|>1}d\sigma<\infty$ в силу рассуждения (задача 103), основанного на формальном соотношении $F(0)=-\int\limits_{|\lambda|>0}(1-\alpha(\lambda))\,d\sigma+a_0$. Итак, доказано, что из (b) следует (c).

Остается показать, что из формулы Леви — Хинчина вытекает формула (75). Прежде всего заметим, что

$$\left| e^{ixy} - 1 - \frac{ixy}{1+y^2} \right| \leqslant C \left[ \frac{y^2}{1+y^2} \right] (1 + x^2). \tag{82}$$

Действительно, когда $|y| \geqslant 1$, левая часть ограничена функцией $2 + {}^1/_2 x$, а когда $|y| \leqslant 1$, функцией $C |xy|^2 + |xy|$ $(y^2/(1+y^2))$. В силу (82), любая $F$ вида (76) есть обобщенная функция умеренного роста, удовлетворяющая оценке

$$|F(x)| \leqslant C (1 + |x|^2), \tag{83}$$

а непосредственное вычисление показывает, что каждая обобщенная функция $-(D^*D) F$ положительно определена. Поскольку $F$ умеренного роста, она имеет фурье-образ $\hat{F}$. Более того, как и при доказательстве импликации (b) $\Rightarrow$ (c), фурье-образ $\partial_i \partial_j F$ есть знаконеопределенная мера $d\nu_{ij}$ с условием, что $d\nu_\zeta = \sum \bar{\zeta}_i \zeta_j \, d\nu_{ij}$ — положительная мера для каждого $\zeta \in \mathbb{C}^n$. Итак, для любых функций $f_i(k)$ $(i = 1, \ldots, n)$ имеем

$$\sum_{i, j} \int \overline{f_i(k)} f_j(k) \, d\nu_{ij}(k) \geqslant 0.$$

Предположим теперь, что $\int f(x) \, dx = 0$. Тогда $\hat{f}(0) = 0$, так что, по простым соображениям, $\hat{f}(k) = \sum k_i f_i(k)$, где $f_i(k) \in \mathscr{S}$. Отсюда следует, что

$$\int F(x - y) \overline{f(x)} f(y) \, dx \, dy = -\sum_{i, j} \int \overline{f_i(k)} f_j(k) \, d\nu_{ij}(k) \leqslant 0. \blacksquare$$

***Пример 1.*** Ответим теперь на вопрос о том, какие самосопряженные дифференциальные операторы в частных производных с постоянными коэффициентами порождают сохраняющие положительность полугруппы. Пусть $F(p)$ — ограниченный снизу полином от $n$ переменных, и предположим, что $\exp(-tF(-i\nabla))$ сохраняет положительность. Тогда, по теореме XIII.52, $F$ условно отрицательно определена, а согласно (83), $F$ должна иметь порядок не более 2. Кроме того, из условия самосопряженности $\overline{F(p)} = F(p)$ и условия $F(p) = F(-p)$ (из (75)) вытекает, что члены первого порядка отсутствуют. Итак, $F(p) = \sum a_{ij} p_i p_j + c$. Наконец, при $\zeta \in \mathbb{C}^n$ и $D_\zeta = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \partial_i$ имеем

$$(D_\zeta^* D_\zeta F)(0) = -\sum a_{ij} \bar{\zeta}_i \zeta_j.$$

Поскольку $D_\zeta^* D_\zeta F$ отрицательно определена в силу части (b) теоремы XIII.53, матрица $\{a_{ij}\}$ должна быть положительно определенной. Итак, самосопряженные дифференциальные операторы в частных производных с постоянными коэффициентами, которые порождают сохраняющие положительность полугруппы, исчерпываются операторами следующего вида:

$$F(-i\nabla) = -\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\partial_i\partial_j + c,$$

где матрица $\{a_{ij}\}$ положительно определена. С другой стороны, каждый из таких операторов заменой переменных может быть сведен к виду $-\Delta + c$, так что все они действительно порождают сохраняющие положительность полугруппы.

Из этого примера ясно, что если мы хотим найти новые условно отрицательные функции (удовлетворяющие условию $\overline{F(p)} = F(p)$), то следует искать нечто более сложное, чем полиномы. С этой целью полезно упростить условие (b) теоремы XIII.53.

***Теорема XIII.54.*** Пусть $F$ — сферически симметричная полиномиально ограниченная непрерывная функция с $F(0) = 0$. Предположим далее, что функция $\Delta F$ положительно определена. Тогда $F$ условно отрицательно определена.

*Доказательство.* Пусть $G = -\hat{F}$. Тогда $k^2 G$ — полиномиально ограниченная положительная мера. Поэтому $G$ продолжается с $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ на множество включающее все функции вида $k^2 f(k)$, где $f$ непрерывна и $k^n f(k) \to 0$ при $|k| \to \infty$. В частности, если $g \in \mathscr{S}$, то к этому виду относится функция $k_i k_j k_l g = k^2[(k_i k_j k_l) k^{-2}] g$, а потому, как и при доказательстве теоремы XIII.53, существует мера $\mu$ на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, такая, что

$$G(k_i k_j k_l g) = \int k_i k_j k_l g(k)\, d\mu$$

для всех $g$ из $\mathscr{S}$. Более того, $\int_{|k|<1} k^2\, d\mu(k) < \infty$. Таким образом, опять-таки, как при доказательстве теоремы XIII.53, имеем

$$G(f) = \int_{|\lambda|>0} \left[\varphi(\lambda) - \alpha(\lambda)\left(\varphi(0) + \lambda\cdot\nabla\varphi(0) + \frac{1}{2}\sum \lambda_i\lambda_j \partial_i\partial_j\varphi(0)\right)\right] d\mu -$$
$$- a_0\varphi(0) - \sum_{j=1}^{n} b_j\partial_j\varphi(0) + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(\partial_i\partial_j\varphi)(0),$$

где функция $\alpha \in C_0^\infty$ тождественно равна 1 вблизи нуля. Поскольку $\int k^2\, d\mu(k) < \infty$, можно выделить из интеграла $\lambda_i\lambda_j(\partial_i\partial_j\varphi)(0)$

и включить его в член с $c_{ij}$. Тогда

$$(2\pi)^{n/2} F(x) = -\int\limits_{|\lambda|>0} [e^{i\lambda x} - \alpha(\lambda)(1+\lambda\cdot x)]\, d\mu(\lambda) + \\ + \alpha_0 + i\beta\cdot x + \sum_{i,j} \gamma_{ij} x_i x_j, \qquad (84)$$

и, чтобы доказать, что $F$ условно отрицательно определена, остается только показать, что матрица $\{\gamma_{ij}\}$ положительно определена. Поскольку $F$ инвариантна относительно поворотов и такой же можно выбрать функцию $\alpha$, $\gamma_{ij}$ должна равняться $\gamma\delta_{ij}$, так что нужно доказать лишь, что $\gamma > 0$. Но фурье-образ $\Delta F$ есть $d\nu = \lambda^2 d\mu + 2\delta(\lambda)\operatorname{Tr}(\gamma_{ij})$, так что $n\gamma = \operatorname{Tr}(\gamma_{ij}) = {}^1/_2\nu(\{0\}) > 0$. ∎

***Пример 2.*** Мы утверждаем, что функции

$F_1(p) = |p|^\alpha$, где $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$ при $n=1$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$ при $n > 1$,

$F_2(p) = \sqrt{p^2+m^2}$, $m > 0$,

условно положительно определены. Действительно, в обоих случаях можно вычислить $\Delta F$ и найти, что

$$\Delta F_1(p) = \alpha(n+\alpha-2)\,|p|^{\alpha-2},$$
$$\Delta F_2(p) = (n-1)(p^2+m^2)^{-1/2} + m^2(p^2+m^2)^{-3/2}.$$

Таким образом, нужно только доказать, что $|p|^{\alpha-2}$, $(p^2+m^2)^{-1/2}$ и $(p^2+m^2)^{-3/2}$ положительно определены. Далее, функция $p^2$ условно положительно определена, так что $e^{-tp^2}$ положительно определена. Поскольку при $\alpha < 2$

$$|p|^{\alpha-2} = c_\alpha \int\limits_0^\infty t^{-\alpha/2} e^{-tp^2}\, dt,$$

то функция $|p|^{\alpha-2}$ положительно определена как интеграл от положительно определенных функций, сходящийся как интеграл от распределений. Аналогично при $\beta > 0$

$$(p^2+m^2)^{-\beta} = d_\beta \int\limits_0^\infty t^{\beta-1} e^{-t(p^2+m^2)}\, dt,$$

так что $(p^2+m^2)^{-\beta}$ положительно определена при $\beta > 0$.

Известный интерес представляет выбор в качестве свободного гамильтониана формы $h_0 = (p^2+m^2)^{1/2} - m$, поскольку это квантовый аналог энергии релятивистской частицы. Эта функция должна описывать бесспиновые частицы (например, пионы) в области, где релятивизм уже существен, но явления рождения частиц (теоретико-полевые эффекты) еще не важны.

Следующая тема лежит в стороне от потребностей спектральной теории, однако мы включили ее в это дополнение из-за ее важности для теории вероятности.

*Определение.* Вероятностная мера $\mu$ на $\mathbb{R}^n$ называется **бесконечно делимой**, если для любого $n$ найдется вероятностная мера $\nu_n$, такая, что $\mu=\nu_n*\nu_n*\ldots*\nu_n$ ($n$ раз). Фурье-образы вероятностных мер называются **характеристическими функциями**. Характеристическая функция $f(x)$ называется **бесконечно делимой**, если для каждого $n$ существует характеристическая функция $f_n(x)$, такая, что $f(x)=(f_n(x))^n$.

Мы хотим описать те функции, которые могут служить бесконечно делимыми характеристическими функциями. Пусть $F$ непрерывна. Сначала заметим, что если $e^{-tF(p)}$ положительно определена для всех $t>0$, то $e^{-F(p)}$ — бесконечно делимая характеристическая функция. Но верно и обратное. Действительно, предположим, что $e^{-F(p)}$ бесконечно делима. Тогда существует положительно определенная функция $g_2$, такая, что $g_2(p)^2=e^{-F(p)}$. Очевидно, $g_2(p)=\pm\exp(-{}^1/_2F(p))$ для всех $p$. Но так как $g_2$ и $F$ непрерывны, а $g_2(0)=1=+\exp(-{}^1/_2F(0))$, то и при всех $p$ имеет место знак плюс. Этим способом получаем, что $\exp(-2^{-n}F)$ положительно определена для всех $n$. Поскольку произведения и пределы положительно определенных функций положительно определены, $\exp(-tF(p))$ положительно определена при всех $t$. Это замечание в соединении с уже доказанными нами теоремами позволяет описать бесконечно делимые характеристические функции.

***Теорема XIII.55*** (теорема Леви — Хинчина). Каждая бесконечно делимая характеристическая функция $G$ имеет вид $G=e^{-F}$, где $F$ — некоторая функция вида (76).

*Доказательство.* Пусть $G_m$ — положительно определенная функция, причем $(G_m)^m=G$. Тогда $G_m(0)=1$, и, в силу непрерывности $G$, $G(x)\neq 0$ при $|x|<\varepsilon$ для некоторого подходящего $\varepsilon$. Таким образом, $G_m(x)\to 1$ при $|x|<\varepsilon$, когда $m\to\infty$. По нижеследующей лемме $G_m(x)\to 1$ для *всех* $x$, так что $G(x)$ никогда не обращается в нуль. По фундаментальному топологическому свойству $\mathbb{R}^n$ любая не обращающаяся в нуль комплекснозначная непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$ обладает однозначно определенным непрерывным логарифмом, если только его значение фиксировано в одной точке. Итак, существует единственная непрерывная функция $F$, такая, что $G=e^{-F}$ и $F(0)=0$. Поскольку $G$ ограничена, вещественная часть $F$ ограничена снизу. Согласно замечанию, предшествующему этой теореме, $\exp(-tF(x))$ положительно определена при всех $t>0$, так что по теореме XIII.52 $\exp(-tF(-i\nabla))$ — сохраняющая положительность полугруппа. Итак, в силу теоремы XIII.53, существует конечная положительная мера, такая, что выполняется формула Леви — Хинчина (76). ∎

*Лемма.* Пусть $G_m$ — последовательность положительно определенных функций, причем $G_m(0)=1$. Предположим, что, когда $m \to \infty$, $G_m(x) \to 1$ для $x$ в некоторой окрестности нуля. Тогда $G_m(x) \to 1$ для всех $x$.

*Доказательство.* По предположению, существуют меры $\mu_m$ на $\mathbb{R}^n$, такие, что

$$G_m(x) = \int e^{ixy}\, d\mu_m(y).$$

По предположению же, каждая $\mu_m$ имеет единичную массу. Более того, элементарное применение теоремы Фубини показывает, что

$$(2a)^{-n} \int_{|x_i| \leqslant a} [1 - G_m(x)]\, dx = \int \left(1 - \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin a y_i}{a y_i}\right) d\mu_m(y) \geqslant$$
$$\geqslant C\mu_m\{y \mid y_i \geqslant a^{-1} \text{ для некоторого } i\},$$

где $C = \min\limits_{y \geqslant 1}(1 - y^{-1}\sin y) > 0$. Итак, по предположениям о $G_m$, для некоторого $a$ имеем $\mu_m\{y \mid y_i \geqslant a^{-1}$ для некоторого $i\} \to 0$ при $m \to \infty$. Будем рассматривать $\mu_m$ как меры на $\dot{\mathbb{R}}^n$, одноточечной компактификации $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mu_\infty$ — произвольная слабая предельная точка последовательности $\mu_m$. Такие предельные точки существуют, ибо пространство $\mathscr{M}_{+,1}(\dot{\mathbb{R}}^n)$ компактно. Поскольку $\mu_m\{y \mid |y| \geqslant a^{-1}\} \to 0$ при $m \to \infty$ для некоторого $a$, можно заключить, что $\mu_\infty$ — мера на $\mathbb{R}^n$, т. е. $\mu_\infty(\{\infty\}) = 0$, и что $\int f(y)\, d\mu_{m(i)} \to \int f(y)\, d\mu_\infty$ для *любой* непрерывной ограниченной функции на $\mathbb{R}^n$, а не только для тех, которые на бесконечности стремятся к константе. В частности, $\int e^{ixy}\, d\mu_\infty(y) = 1$ для малых $|x|$. Пусть $Q$ — семейство точек в этом множестве малых $x$, все координаты которых рациональны. Легко видеть, что $\bigcap\limits_{x \in Q} \{y \mid e^{ixy} = 1\} = \{0\}$, поэтому мы заключаем, что $\mu_\infty = \delta_0$, точечной массе в нуле. Поскольку каждая предельная точка последовательности $\mu_m$ есть $\delta_0$, $\mu_m \to \delta_0$ слабо, и, так же как выше, $\int f(y)\, d\mu_m(y) \to f(0)$ для любой ограниченной непрерывной $f$. В частности, $G_m(x) \to 1$ для всех $x$. ∎

## XIII.13. Отсутствие положительных собственных значений

До сих пор мы избегали обсуждения вопроса о том, могут ли шредингеровы операторы обладать собственными значениями, погруженными в непрерывный спектр. Этот вопрос оказывается очень сложным, а существующие результаты обычно требуют