С помощью несложного обобщения методов из дополнения к этому разделу (см. задачу 113) можно показать, что теорема об однозначном продолжении для таких неравенств существует. ∎

Дополнение к § XIII.13. Теоремы об однозначном продолжении решений уравнений Шредингера

В этом дополнении мы докажем теорему XIII.57. На самом деле мы докажем следующий более сильный результат.

Теорема XIII.63. Пусть $u \in H^2_{\mathrm{loc}}$, т. е. $\varphi u \in D(-\Delta)$ для каждого $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Пусть D — открытое связное множество в $\mathbb{R}^n$, и предположим, что

$$|\Delta u(x)| \leqslant M\,|u(x)|$$

почти всюду на D. Тогда, если u обращается в нуль в окрестности одной точки $x_0 \in D$, то u — тождественный нуль в D.

Доказательство этого результата, которое мы дадим только для $n=3$ (см. задачи 111, 112 для случая произвольного n), основано на следующей замечательной оценке для C^∞-функции f с носителем в $\{x \mid 0 < |x| < R\}$:

$$\int |x|^\alpha |f(x)|^2\, d^3x \leqslant {}^4/_3 R^4 \int |x|^\alpha |\Delta f|^2\, d^3x \tag{100}$$

для *всех* вещественных α. Мы докажем (100), применяя разложение f по парциальным волнам:

$$f(x) = \sum_{l,\,m} f_{lm}(|x|)\, Y_{lm}(\Omega_x),$$

явно описанное ниже. Итак, начнем с доказательства аналога оценки (100) для каждой парциальной волны.

Лемма 1. Пусть f есть C^∞-функция с носителем в (0, 1). Для каждого $l = 0, 1, 2, \ldots$ определим

$$g_l = -f'' + \frac{l(l+1)}{x^2} f.$$

Тогда для *любого* вещественного α

$$\int_0^1 x^\alpha |f(x)|^2\, dx \leqslant {}^4/_3 (2l+1)^{-2} \int_0^1 x^\alpha |g_l(x)|^2\, dx.$$

Доказательство. Фиксируем l, и пусть D обозначает формальный дифференциальный оператор $-d^2/dx^2 + l(l+1)/x^2$. Тогда формально $Dh_+ = Dh_- = 0$ где $h_+(x) = x^{l+1}$ и $h_-(x) = x^{-l}$. Далее, поскольку f обращается в нуль около нуля и единицы, можно свободно интегрировать по частям выражения $\int fDh_{\pm}=0$ и заключить, что

$$\int_0^1 g_l(x)\, h_{\pm}(x)\, dx=0. \tag{101}$$

Тогда, полагая $g=g_l$, получим

$$f(x)=[h_+(x)\, A(x)+h_-(x)\, B(x)]/(2l+1), \tag{102a}$$

$$A(x)=\int_x^1 g(y)\, h_-(y)\, dy, \qquad B(x)=\int_0^x g(y)\, h_+(y)\, dy. \tag{102b}$$

В самом деле, (102) суть обычные формулы вариации постоянных из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, которые можно доказать следующим образом. Пусть $F(x)$ — правая часть (102a). Тогда $DF=g$, ибо $h_+h'_- - h'_+h_- = 2l+1$, а в силу (101) носитель F лежит строго в $(0,\ 1)$. Поскольку $D(F-f)=0$ и $F-f$ равно нулю около нуля, то $F-f=0$ всюду в силу единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Теперь мы утверждаем, что для любого β

$$|A(x)\, x^{\beta}| \leqslant \int_0^1 |x^{\beta} h_-(x)\, g(x)|\, dx, \tag{103a}$$

$$|B(x)\, x^{\beta}| \leqslant \int_0^1 |x^{\beta} h_+(x)\, g(x)|\, dx. \tag{103b}$$

Предположим, что $\beta>0$. Тогда

$$|A(x)\, x^{\beta}| \leqslant x^{\beta}\int_x^1 y^{-\beta}\, |y^{\beta} h_-(y)\, g(y)|\, dy \leqslant \int_x^1 y^{\beta}\, |h_-(y)\, g(y)|\, dy.$$

Если $\beta\leqslant 0$, перепишем A с помощью (101). Тогда

$$|A(x)\, x^{\beta}| \leqslant x^{\beta}\int_0^x y^{-\beta}\, |y^{\beta} h_-(y)\, g(y)|\, dy \leqslant \int_0^x |y^{\beta} h_-(y)\, g(y)|\, dy.$$

Это доказывает (103a). Доказательство (103b) аналогично.

Итак,

$$H(x)\equiv [x^{\alpha-2}\, |f(x)|^2] \leqslant (2l+1)^{-2}\, (|x^{\alpha/2+l} A(x)|+|x^{\alpha/2-l-1} B(x)|)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4}{(2l+1)^2}\left(\int_0^1 |x^{\alpha/}\ \ g(x)|\, dx\right)^2 \leqslant \frac{4}{(2l+1)^2}\int_0^1 x_{\alpha}\, |g(x)|^2\, dx.$$

В частности,

$$\int_0^1 x^\alpha |f(x)|^2\,dx = \int_0^1 x^2 H(x)\,dx \leqslant \frac{4}{3(2l+1)^2}\int_0^1 x^\alpha |g(x)|^2\,dx. \blacksquare$$

Лемма 2. Пусть h принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ и имеет носитель в $\{x \mid 0 < |x| < 1\}$. Тогда для любого вещественного α

$$\int |x|^\alpha |h(x)|^2\,d^3x \leqslant \frac{4}{3}\int |x|^\alpha |\Delta h(x)|^2\,d^3x.$$

Доказательство. Воспользуемся разложением по сферическим гармоникам, описанным в примере 4 дополнения к § X.1. В пространстве $L^2(S^2)$, где S^2 — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$, существует ортонормированный базис $\{Y_{l,m}(\Omega)\}$, $l=0, 1, \ldots; m=-l, -l+1, \ldots, l-1, l$. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Определим

$$f_{l,m}(r) = r\int f(r, \Omega)\,\overline{Y_{l,m}(\Omega)}\,d\Omega.$$

Тогда при $f \in C_0^\infty$

$$rf(r, \Omega) = \sum_{l,m} f_{l,m}(r)\,Y_{l,m}(\Omega),$$

$$-r(\Delta f)(r, \Omega) = \sum_{l,m} (D_l f_{l,m})(r)\,Y_{l,m}(\Omega),$$

где $D_l = -d^2/dr^2 + l(l+1)r^{-2}$. Таким образом, учитывая ортонормальность $Y_{l,m}$ и применяя лемму 1, для h с носителем в $\{x \mid 0 < |x| < 1\}$ получаем

$$\begin{aligned}\int |x|^\alpha |h(x)|^2\,d^3x &= \sum_{l,m}\int r^\alpha |h_{l,m}(r)|^2\,dr \leqslant \\ &\leqslant \sum_{l,m}\frac{4}{3}(2l+1)^{-2}\int r^\alpha |(D_l h_{l,m})(r)|^2\,dr \leqslant \\ &\leqslant \frac{4}{3}\int |x|^\alpha |\Delta h(x)|^2\,d^3x. \blacksquare\end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть $h \in L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$ лежит в области определения $-\Delta$ и обращается в нуль вне некоторого компактного подмножества в $\{x \mid 0 < |x-a| < R\}$ с $a \in \mathbb{R}^3$ и $R > 0$. Тогда

$$\int |x-a|^\alpha |h(x)|^2\,d^3x \leqslant \frac{4}{3}R^4\int |x-a|^\alpha |(\Delta h)(x)|^2\,d^3x \tag{104}$$

при *любом* вещественном α.

Доказательство. Предположим сначала, что $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда (104) вытекает из леммы 2 после простой замены переменных $y=(x-a)/R$. Имея (104) для всех $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ с требуемыми свойствами носителя, можно доказать такую же оценку для всех $h \in D(-\Delta)$, используя аппроксимативную единицу. ▮

Доказательство теоремы XIII.63. Для каждого $x \in D$ положим

$$R_x = \min\{({}^{128}/_3 M^2)^{-1/4},\ {}^1/_2 \operatorname{dist}(x,\ \partial D)\}.$$

Мы утверждаем, что если $u(x)$ обращается в нуль для x, лежащих около y, и удовлетворяет неравенству $|(\Delta u)(x)| \leqslant M|u(x)|$, то $u(x)$ обращается в нуль на подмножестве $\{x \mid |x-y| \leqslant R_y\}$. Предположим, что это так, и докажем, что $u \equiv 0$, если u обращается в нуль около некоторого $x_0 \in D$. Возьмем $y \in D$ и выберем некоторую гладкую кривую γ в D, соединяющую x_0 с y. Предположим, что длина γ равна L. Поскольку γ компактна, $\operatorname{dist}(x, \partial D)$ отделено от нуля на γ, так что R_x ограничено снизу на γ, скажем, величиной R_0. Выберем целое n, такое, что ${}^1/_2 R_0 n \geqslant L > {}^1/_2 R_0 (n-1)$, и точки $x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = y$ на γ, причем так, чтобы длина γ между x_i и x_{i-1} $(i=1, \ldots, n-1)$ была меньше $R_0/2$. В частности, $|x_i - x_{i-1}| \leqslant R_0/2$. Так как, по предположению, u обращается в нуль около x_0, оно обращается в нуль при $|x-x_0| < R_0$, т. е. и около x_1. Повторяя это рассуждение, убеждаемся, что $u(y)=0$, так что $u \equiv 0$ в D.

Докажем теперь сделанное выше утверждение. Фиксируем y, и пусть χ — функция класса C_0^∞, равная 1, если $|x-y| \leqslant R_y$, и 0, если $|x-y| \geqslant {}^3/_2 R_y$. Тогда носитель χu лежит в $\{x \mid 0 < |x-y| < 2R_y\}$ и, в силу леммы 3, для любого $\beta > 0$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|x-y|<R_y} |x-y|^{-\beta} |u(x)|^2\,dx &\leqslant \int |x-y|^{-\beta} |(\chi u)(x)|^2\,dx \leqslant \\
&\leqslant \frac{4}{3}(2R_y)^4 \int\limits_{|x-y|<2R_y} |x-y|^{-\beta} |\Delta(\chi u)(x)|^2\,dx \leqslant \\
&\leqslant \frac{64}{3} M^2 R_y^4 \int\limits_{|x-y|<R_y} |x-y|^{-\beta} |u(x)|^2\,dx + CR_y^{-\beta} \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{|x-y|<R_y} |x-y|^{-\beta} |u(x)|^2\,dx + CR_y^{-\beta},
\end{aligned}$$

где

$$C = \frac{64}{3} R_y^4 \int\limits_{R_y<|x-y|<2R_y} |\Delta(\chi u)(x)|^2\,dx$$

конечна, поскольку $\chi u \in D(-\Delta)$. Таким образом, если $R_1 < R_y$, то

$$\int\limits_{|x-y|<R_1} |u(x)|^2\,dx \leqslant R_1^\beta \int\limits_{|x-y|<R_y} |x-y|^{-\beta} |u(x)|^2\,dx \leqslant 2C\left(\frac{R_1}{R_y}\right)^\beta.$$

Устремляя β к бесконечности, получаем $\int\limits_{|x-y|\leqslant R_1} |u(x)|^2\,dx = 0$. Это доказывает наше утверждение, а с ним и теорему. ∎

Теперь мы готовы сформулировать еще раз и доказать теорему XIII.57.

Теорема XIII.57. Пусть V — такая функция на $\mathbb{R}^n$, что

(i) оператор умножения на V — Δ-ограничен, и его относительная грань меньше 1;

(ii) существует замкнутое множество S меры нуль, такое, что $\mathbb{R}^n \setminus S$ связно и V ограничена на любом компактном подмножестве в $\mathbb{R}^n \setminus S$.

Пусть $H = -\Delta + V$ и $Hu = Eu$ при некотором E и $u \in L^2$. Предположим, что u обращается в нуль на открытом подмножестве в $\mathbb{R}^n$. Тогда u равно нулю тождественно.

Доказательство. Предположим, что u обращается в нуль около $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus S$. Выбирая подходящую окрестность кривой, соединяющей x_0 с некоторым $y \in \mathbb{R}^n \setminus S$, можно найти открытое связное множество $D \subset \mathbb{R}^n \setminus S$, такое, что x_0, $y \in D$ и $\bar{D}$ компактно в $\mathbb{R}^n \setminus S$. Поскольку V ограничено на D, скажем, числом M_0 и $u \in D(-\Delta + V) = D(-\Delta)$, то

$$|-\Delta u| \leqslant (M_0 + |E|)\,|u|$$

на D и u обращается в нуль на D в силу теоремы XIII.63. Теперь ясно, что u равно нулю и на $\mathbb{R}^n \setminus S$. ∎

XIII.14. Критерии компактности и операторы с компактной резольвентой

В большей части этой главы мы изучали непрерывный спектр самосопряженных операторов, особенно операторов Шредингера, с потенциалами, убывающими на бесконечности. Напротив, в этом разделе мы сконцентрируем внимание на критериях чистой дискретности спектра оператора. Прежде всего мы покажем, что спектр полуограниченного самосопряженного оператора A чисто дискретен тогда и только тогда, когда его резольвента — компактный оператор. Для практического применения этого результата нужны критерии компактности некоторых подмножеств из L^2; эти критерии основываются на результатах Реллиха и Рисса. Затем мы применим развитую таким образом технику для обобщения теоремы XIII.16, которая позволяет доказать, что спектр оператора Шредингера с растущим на бесконечности потенциалом чисто дискретен.

Весь этот круг идей тесно связан с различными теоремами о компактных вложениях пространств Соболева, которые нужны