Устремляя β к бесконечности, получаем $\int\limits_{|x-y|\leqslant R_1} |u(x)|^2\,dx=0$. Это доказывает наше утверждение, а с ним и теорему. ∎

Теперь мы готовы сформулировать еще раз и доказать теорему XIII.57.

Теорема XIII.57. Пусть V — такая функция на $\mathbb{R}^n$, что

(i) оператор умножения на V — Δ-ограничен, и его относительная грань меньше 1;

(ii) существует замкнутое множество S меры нуль, такое, что $\mathbb{R}^n\setminus S$ связно и V ограничена на любом компактном подмножестве в $\mathbb{R}^n\setminus S$.

Пусть $H=-\Delta+V$ и $Hu=Eu$ при некотором E и $u\in L^2$. Предположим, что u обращается в нуль на открытом подмножестве в $\mathbb{R}^n$. Тогда u равно нулю тождественно.

Доказательство. Предположим, что u обращается в нуль около $x_0\in\mathbb{R}^n\setminus S$. Выбирая подходящую окрестность кривой, соединяющей x_0 с некоторым $y\in\mathbb{R}^n\setminus S$, можно найти открытое связное множество $D\subset\mathbb{R}^n\setminus S$, такое, что x_0, $y\in D$ и $\bar{D}$ компактно в $\mathbb{R}^n\setminus S$. Поскольку V ограничено на D, скажем, числом M_0 и $u\in D(-\Delta+V)=D(-\Delta)$, то

$$|-\Delta u|\leqslant(M_0+|E|)|u|$$

на D и u обращается в нуль на D в силу теоремы XIII.63. Теперь ясно, что u равно нулю и на $\mathbb{R}^n\setminus S$. ∎

XIII.14. Критерии компактности и операторы с компактной резольвентой

В большей части этой главы мы изучали непрерывный спектр самосопряженных операторов, особенно операторов Шредингера, с потенциалами, убывающими на бесконечности. Напротив, в этом разделе мы сконцентрируем внимание на критериях чистой дискретности спектра оператора. Прежде всего мы покажем, что спектр полуограниченного самосопряженного оператора A чисто дискретен тогда и только тогда, когда его резольвента — компактный оператор. Для практического применения этого результата нужны критерии компактности некоторых подмножеств из L^2; эти критерии основываются на результатах Реллиха и Рисса. Затем мы применим развитую таким образом технику для обобщения теоремы XIII.16, которая позволяет доказать, что спектр оператора Шредингера с растущим на бесконечности потенциалом чисто дискретен.

Весь этот круг идей тесно связан с различными теоремами о компактных вложениях пространств Соболева, которые нужны для разнообразных приложений в теории дифференциальных уравнений с частными производными и, в частности, в теории Лакса — Филлипса (§ XI.11). В средней части этого раздела мы сформулируем ряд таких теорем.

В качестве дальнейшего применения результатов общей теории мы рассмотрим гамильтониан H статистической системы в ящике и покажем, что его спектр чисто дискретен, а $\exp(-\beta H)$ имеет след. Заканчивается этот раздел условиями, гарантирующими дискретность некоторой части спектра самосопряженного оператора.

Теорема XIII.64. Пусть A — ограниченный снизу самосопряженный оператор. Следующие условия эквивалентны:

(i) оператор $(A-\mu)^{-1}$ компактен при некотором $\mu\in\rho(A)$;
(ii) оператор $(A-\mu)^{-1}$ компактен при всех $\mu\in\rho(A)$;
(iii) множество $\{\psi\in D(A)\mid\|\psi\|\leqslant 1, \|A\psi\|\leqslant b\}$ компактно для всех b;
(iv) множество $\{\psi\in Q(A)\mid\|\psi\|\leqslant 1, (\psi, A\psi)\leqslant b\}$ компактно для всех b;
(v) существует ортонормированный базис $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $D(A)$, такой, что $A\varphi_n=\mu_n\varphi_n$ с $\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\ldots$ и $\mu_n\to\infty$;
(vi) $\mu_n(A)\to\infty$, где $\mu_n(\cdot)$ — величина, даваемая принципом минимакса.

Доказательство. Будем доказывать теорему по следующей схеме: (i) $\Leftrightarrow$ (ii); (v) $\Leftrightarrow$ (vi); (v) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (v).

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) В одну сторону это утверждение тривиально. Обратная импликация вытекает из первой резольвентной формулы и того факта, что множество компактных операторов образует идеал.

(v) $\Leftrightarrow$ (vi) следует прямо из принципа минимакса (теорема XIII.1).

(v) $\Rightarrow$ (iv) Пусть

$$F_b=\{\psi\in Q(A)\mid\|\psi\|\leqslant 1\quad (\psi, A\psi)\leqslant b\}.$$

Докажем, что F_b — замкнутое множество и что для любого ε его можно покрыть конечным числом открытых шаров радиуса ε. Отсюда сразу же будет следовать его компактность (задача 114). Пусть $\psi_n\in F_b$ и $\psi_n\to\psi$. Тогда $\|\psi\|\leqslant 1$, и нам остается доказать, что $\psi\in Q(A)$ и $(\psi, A\psi)\leqslant b$. Ясно, что достаточно доказать неравенство $(\psi, AP_{(-\infty,\lambda)}\psi)\leqslant b$ для любого $\lambda<\infty$, где $\{P_\Omega\}$ — семейство спектральных проекторов оператора A. Но, поскольку $AP_{(-\infty,\lambda)}$ ограничен.

$$(\psi, AP_{(-\infty,\lambda)}\psi)=\lim_{n\to\infty}(\psi_n, AP_{(-\infty,\lambda)}\psi_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}(\psi_n, A\psi_n)\leqslant b.$$

Таким образом, F_b замкнуто. Пусть теперь $-a$ есть нижняя грань A, так что $B=A+a\geqslant 0$ и $\psi\in F_b$ влечет за собой $(\psi, B\psi)\leqslant \leqslant b+a$. По заданному ε выберем такое N, что $\mu_n+a\geqslant 2\varepsilon^{-1}(b+a)$. Тогда $(\psi, B\psi)\leqslant b+a$, и из (v) вытекает, что

$$\sum_{n\geqslant N}|(\psi, \varphi_n)|^2\leqslant \varepsilon/2.$$

Таким образом, любой $\psi\in F_b$ лежит на расстоянии, не большем $\sqrt{\varepsilon/2}$, от точек единичного шара в подпространстве, порожденном векторами $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}\}$. Поскольку этот шар можно покрыть конечным числом $\sqrt{\varepsilon/2}$-шаров, множество F_b можно покрыть конечным числом ε-шаров.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Множество

$$D_b=\{\psi\in D(A)\,|\,\|\psi\|\leqslant 1,\ \|A\psi\|\leqslant b\}$$

замкнуто, в чем можно убедиться, повторив рассуждения, приведенные выше. В силу неравенства Шварца, $D_b\subset F_b$, так что D_b компактно, если компактно F_b.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Не теряя общности, можно считать, что A положителен. Пусть $M=\{\psi=(A+1)^{-1}\varphi\,|\ \|\varphi\|\leqslant 1\}$. Пусть $\psi\in M$ и $\varphi=(A+1)\psi$. Тогда

$$\|\psi\|\leqslant\|(A+1)^{-1}\|\|\varphi\|\leqslant\|\varphi\|\leqslant 1$$

и

$$\|A\psi\|\leqslant\|A(A+1)^{-1}\|\|\varphi\|\leqslant\|\varphi\|\leqslant 1,$$

так что $\psi\in D_1$. В итоге $\bar{M}\subset\bar{D}_1$, поэтому компактность D_1 влечет за собой предкомпактность M, т. е. компактность оператора $(A+1)^{-1}$.

(i) $\Rightarrow$ (v) Поскольку (i) $\Rightarrow$ (ii), можно считать, что $(A+a)^{-1}$ компактен, когда a вещественно и $-a$ равно точной нижней грани A. Поскольку $(A+a)^{-1}$ компактен, теорема Гильберта — Шмидта (теорема VI.16) гарантирует существование ортонормированного базиса $\{\varphi_n\}$, для которого $(A+a)^{-1}\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$ и $\lambda_n\to 0$. Поскольку $(A+a)^{-1}$ положителен, $\lambda_n>0$, и можно так перенумеровать λ и φ, чтобы $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\dots$. Взяв $\mu_n=\lambda_n^{-1}-a$, мы докажем (v). ∎

В свете условий (iii) и (iv) теоремы XIII.64 важно иметь критерий компактности подмножеств S в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Чтобы понять основные идеи их получения, рассмотрим сначала случай, когда $\mathscr{H}=L^2(-\pi, \pi)$, а A — самосопряженное расширение $id/dx\restriction C_0^\infty(-\pi, \pi)$ с граничными условиями $\varphi(-\pi)=\varphi(\pi)$. Пусть

$$S=\{\psi\in L^2(-\pi, \pi)\,|\,\|\psi\|\leqslant 1,\ \|A\psi\|\leqslant 1\}.$$

Разлагая каждый $\psi \in S$ в ряд Фурье, можно изометрически отобразить S на

$$\hat{S} = \left\{ \{a_n\} \in l_2(-\infty, \infty) \,\middle|\, \sum_n |a_n|^2 \leqslant 1, \ \sum_n n^2 |a_n|^2 \leqslant 1 \right\}.$$

Второе условие гарантирует равномерную малость хвостов последовательностей из $\hat{S}$ и позволяет легко доказать компактность $\hat{S}$ (задача 115), а потому и компактность S. Эта ситуация напоминает теорему Асколи, где компактность носителя, равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность вместе гарантируют компактность множества функций. В данном случае равностепенная непрерывность заменяется условием гладкости, $\|A\psi\| \leqslant 1$ для всех $\psi \in S$, которое эквивалентно условию убывания коэффициентов Фурье функций ψ. Если попытаться теперь распространить эту идею на $L^2(\mathbb{R})$, то довольно ясно, что одного условия гладкости недостаточно. В самом деле, для любой $f \in C_0^\infty(-\pi, \pi)$ множество сдвигов $f_n(x) = f(x + 2n\pi)$ не имеет сходящихся подпоследовательностей. Дело в том, что такие функции не являются равномерно малыми при больших x. Это наводит на мысль требовать при построении компактных множеств в $L^2(\mathbb{R})$ «равномерной малости» на бесконечности как самих функций, так и их фурье-образов. В сущности, это и есть условия приводимого ниже критерия Реллиха. Мы приведем краткое доказательство этого критерия, основываясь на теореме Вейля и теореме XIII.64. Набросок более длинного доказательства, основанного на изложенных только что соображениях, связанных с рядами Фурье, дан в задаче 116.

Определение. Пусть F — измеримая и неотрицательная почти всюду функция на $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что $F \to \infty$, тогда и только тогда, когда для любого $N > 0$ существует такое R_N, что $F(x) \geqslant N$ для почти всех x с $|x| \geqslant R_N$.

Теорема XIII.65 (критерий Реллиха). Пусть F и G — две функции на $\mathbb{R}^n$ и $F \to \infty$, $G \to \infty$. Тогда

$$S = \left\{ \psi \,\middle|\, \int |\psi(x)|^2\, dx \leqslant 1, \ \int F(x)\, |\psi(x)|^2\, dx \leqslant 1, \right.$$
$$\left. \int G(p)\, |\hat{\psi}(p)|^2\, dp \leqslant 1 \right\}$$

— компактное подмножество в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Воспользуемся идеей, лежащей в основе доказательства теоремы XIII.16. Заменяя F на $\min\{F(x), x^2\}$ и поступая так же с G, можно, не теряя общности, предполагать, что $F(x) \leqslant x^2$ и $G(p) \leqslant p^2$. В результате на $Q(G(p)) \cap Q(F(x))$ можно определить оператор $A = F(x) + G(p)$ как плотно заданную сумму в смысле форм. Доказательство теоремы XIII.64 показывает, что S замкнуто. Далее, поскольку

$$S \subset \{\psi \in L^2 \mid \|\psi\| \leqslant 1,\ (\psi, A\psi) \leqslant 2\},$$

то, в силу эквивалентности (iv) $\Leftrightarrow$ (vi) в теореме XIII.64, достаточно доказать, что $\mu_m(A) \to \infty$ при $m \to \infty$.

Пусть теперь V — ограниченная функция с компактным носителем. Мы утверждаем, что $V(x)(G(p)+1)^{-1}$ компактен. Действительно, $(\varepsilon p^n + G(p)+1)^{-1}$ лежит в L^2, а потому $V(x)(\varepsilon p^n + G(p)+1)^{-1}$ — оператор Гильберта—Шмидта. Более того, поскольку $G \to \infty$, $(\varepsilon p^n + G(p)+1)^{-1} \to (G(p)+1)^{-1}$ в L^∞ при $\varepsilon \downarrow 0$, так что $V(x)(G(p)+1)^{-1}$ — равномерный предел последовательности операторов Гильберта—Шмидта.

В силу теоремы Вейля (теорема XIII.14), $G(p)+V(x)$ имеет дискретный спектр в интервале $(-\infty, 0)$, так что, в частности, $\mu_m(G(p)+V(x)) \geqslant -1$ для достаточно больших m.

Для заданного $\alpha > 0$ определим V_α, полагая

$$V_\alpha(x) = \min\{F(x), \alpha+1\} - \alpha - 1.$$

Носитель V_α компактен, ибо $F \to \infty$. Поскольку

$$\mu_m(A) \geqslant \mu_m(G(p)+V_\alpha(x)) + \alpha + 1,$$

$\mu_m(A) \geqslant \alpha$ для достаточно больших m. Но α произвольно, и потому $\mu_m(A) \to \infty$ при $m \to \infty$. ∎

Теорема XIII.66 (критерий Рисса). Пусть $p < \infty$ и S — подмножество единичного шара $L^p(\mathbb{R}^n)_1$ в L^p. Необходимым и достаточным условием компактности в топологии нормы равномерного замыкания множества S служат следующие свойства:

(1) $f \to 0$ в смысле L^p на бесконечности равномерно в S, т. е. для любого ε существует ограниченное множество $K \subset \mathbb{R}^n$, такое, что для всех $f \in S$

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |f(x)|^p\, dx \leqslant \varepsilon^p, \tag{105}$$

и

(2) $f(\cdot - y) \to f$ равномерно в S при $y \to 0$, т. е. для любого ε существует такое δ, что при $f \in S$ и $|y| < \delta$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p\, dx \leqslant \varepsilon^p. \tag{106}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $\bar{S}$ компактно. Фиксируем $\alpha > 0$. Найдем такие $f_1, \ldots, f_n$, чтобы $(\alpha/3)$-шары вокруг f_i покрывали S. Затем найдем такие K и δ, чтобы для $f = f_1, \ldots, f_n$

и $\varepsilon = \alpha/3$ выполнялись (105) и (106). Это можно сделать, ибо $\lim\limits_{K \uparrow \mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus K} |g|^p\, dx = 0$ и $g(\cdot - y) \to g$ для любого $g \in L^p$. Пользуясь ($\varepsilon/3$)-приемом, получаем, что (105) и (106) выполняются при $\varepsilon = \alpha$.

Обратно, предположим, что S обладает свойствами (1) и (2). Для любого компактного $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и конечных чисел α, β множество

$$T(\Omega, \alpha, \beta) = \{f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp} f \subset \Omega,\ \|f\|_\infty \leqslant \alpha,\ \|\nabla f\|_\infty \leqslant \beta\}$$

предкомпактно в $C(\Omega)$ по теореме Асколи и тем самым предкомпактно в $L^p(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, при заданном ε достаточно найти такие Ω, α и β, чтобы для заданной функции $f \in S$ существовала $g \in T(\Omega, \alpha, \beta)$, для которой $\|f - g\|_p < \varepsilon$. В самом деле, если T можно покрыть конечным числом ε-шаров, то S можно покрыть конечным числом 2ε-шаров.

По заданному ε найдем такие K и δ, что для $f \in S$ и $|y| \leqslant \delta$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus K} |f(x)|^p\, dx \leqslant (\varepsilon/4)^p, \qquad \|f(\cdot - y) - f\|_p \leqslant \varepsilon/4.$$

Пусть носитель бесконечно дифференцируемой функции η лежит в $\{y \mid |y| < \delta\}$ и $\int \eta(x)\, dx = 1$. Пусть χ — характеристическая функция множества $K' = \{y \mid \operatorname{dist}(y, K) < \delta\}$; $\Omega = \{y \mid \operatorname{dist}(y, K) \leqslant 2\delta\}$, $\alpha = \|\eta\|_q$, $\beta = \|\nabla\eta\|_q$, где $q = p(p-1)^{-1}$. Для $f \in S$ положим $g = \eta * (\chi f)$. Мы утверждаем, что

$$\|g - f\|_p \leqslant \varepsilon. \tag{107}$$

Более того, $g \in T(\Omega, \alpha, \beta)$, ибо $\operatorname{supp} g \subset \Omega$ и нужная оценка по норме вытекает из неравенства Юнга.

Таким образом, для доказательства компактности $\bar{S}$ нужно доказать только (107). Но благодаря выбору K и определению K' при $|y| < \delta$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus K'} |f(x - y)|^p\, dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus K} |f(x)|^p\, dx \leqslant (\varepsilon/4)^p,$$

откуда

$$\|(\chi f)(\cdot - y) - \chi f\|_p \leqslant \|f(\cdot - y) - f\|_p + \|(1 - \chi) f\|_p + \\ + \|[1 - \chi(\cdot - y)] f(\cdot - y)\|_p \leqslant 3\varepsilon/4.$$

В итоге

$$\|\eta * \chi f - \chi f\|_p \leqslant \int \eta(y) \|(\chi f)(\cdot - y) - \chi f\|_p\, dy \leqslant 3\varepsilon/4,$$

и потому

$$\|g - f\|_p \leqslant \|g - \chi f\|_p + \|(1 - \chi) f\|_p \leqslant \varepsilon. \blacksquare$$

С помощью двух последних теорем можно полностью исследовать спектр операторов Шредингера с потенциалами, растущими на бесконечности. Следующий результат усиливает теорему XIII.16.

Теорема XIII.67. Пусть $V \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ограничена снизу и растет на бесконечности. Тогда $H = -\Delta + V$, определенный как сумма квадратичных форм, есть оператор с компактной резольвентой. В частности, спектр H чисто дискретный, а множество его собственных функций образует полное семейство.

Доказательство. Ввиду теоремы XIII.64 нужно только показать, что множество

$$F_H \equiv \{\psi \in Q(H) \mid \|\psi\| \leqslant 1, \ (\psi, H\psi) \leqslant b\}$$

компактно. Поскольку, согласно рассуждениям, использованным в теореме XIII.64, это множество замкнуто, нужно только убедиться, что оно содержится в компактном множестве. Но $-\Delta$ и V положительно определены, и потому из $(\psi, H\psi) \leqslant b$ следует, что $(\psi, -\Delta\psi) \leqslant b$ и $(\psi, V\psi) \leqslant b$; значит,

$$F_H \subset \left\{\psi \,\Big|\, \|\psi\| \leqslant 1, \ \int p^2 |\hat{\psi}(p)|^2 dp \leqslant b, \ \int V(x) |\psi(x)|^2 dx \leqslant b\right\},$$

а последнее множество компактно в силу критерия Реллиха. ∎

Для обобщения этого результата на случай функций V, обладающих некоторым числом отрицательных особенностей, докажем сначала следующий простой результат теории возмущений.

Теорема XIII.68. Пусть A — полуограниченный самосопряженный оператор с компактной резольвентой. Пусть b — симметрическое ограниченное в смысле форм возмущение A с относительной гранью, строго меньшей 1. Пусть $C = A + b$ определен как сумма форм. Тогда резольвента C компактна.

Доказательство. Согласно предположению,

$$|b(\psi, \psi)| \leqslant \alpha(\psi, A\psi) + \beta(\psi, \psi)$$

с $\alpha < 1$. Тогда для любого $\psi \in Q(C) = Q(A)$

$$(\psi, C\psi) \geqslant (1-\alpha)(\psi, A\psi) - \beta(\psi, \psi).$$

Из принципа минимакса для форм (теорема XIII.2) вытекает, что

$$\mu_n(C) \geqslant (1-\alpha)\mu_n(A) - \beta.$$

Поскольку $\mu_n(A) \to \infty$, мы заключаем, что $\mu_n(C) \to \infty$, так что, в силу пункта (vi) теоремы XIII.64, резольвента C компактна. ∎

Теорема XIII.69. Пусть $n \geqslant 3$ и $V = V_1 + V_2$, где $V_2 \in L^{n/2}(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $V_1 > 0$, $V_1 \to \infty$ и $V_1 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $H = -\Delta + V_1 + V_2$, определенный как сумма форм, имеет компактную резольвенту.

Доказательство. В силу теоремы Стрихартца для форм (задача 119), V_2 ограничен в смысле форм относительно $-\Delta$ с нулевой относительной гранью. Далее, поскольку V_1 положителен, V_2 является $(-\Delta+V_1)$-ограниченным в смысле форм с нулевой относительной гранью. Нужный результат теперь следует из теорем XIII.67 и XIII.68. ∎

В результате проведенного обсуждения у нас есть полное качественное описание спектра $-\Delta+V$ при $V \to \infty$. Что еще можно узнать в рамках общего подхода? Точные собственные значения $\lambda_n(V) \equiv \mu_n(-\Delta+V)$ и соответствующие собственные функции $\psi_n(x)$, безусловно, зависят от деталей поведения V и изменяются при локальном изменении V, но можно надеяться, что качественное поведение $\lambda_n(V)$ при $n \to \infty$ и $\psi_n(x)$ при $x \to \infty$ зависит только от качественного поведения V при $x \to \infty$. Поведение собственных значений мы будем изучать в § 15. Поведение же $\psi_n(x)$ при $x \to \infty$ мы изучим сейчас, основываясь на методах § 11.

Теорема XIII.70. Пусть H удовлетворяет условиям теоремы XIII.69. Тогда любая собственная функция $\psi(x)$ оператора H принадлежит $D(e^{a|x|})$ при любом $a>0$. Если $V \geqslant 0$, то для любого $a>0$ существует такое C, что

$$|\psi(x)| \leqslant Ce^{-a|x|}.$$

Доказательство. Так же как при доказательстве теоремы XIII.39, для доказательства того, что $\psi \in D(\exp(a|x|))$ при всех $a>0$, достаточно убедиться в том, что ψ есть аналитический вектор для $W(\alpha)=e^{i\alpha x_j}$ при каждом j. Так же как и в той теореме,

$$W(\alpha)HW(\alpha)^{-1} = -\sum_{i \neq j} \partial_i^2 + (i\partial_j+\alpha)^2 + V \tag{108}$$

для вещественных α. Правая часть (108) задает целое аналитическое семейство типа (B) (см. § XII.2) для всех комплексных α. Поскольку резольвента $(H(\alpha)-\lambda)^{-1}$ компактна для вещественных α, она компактна и для всех α. Более того, так же как это было в доказательстве теоремы XIII.39, $H(\alpha)$ обладает локально постоянным спектром. С помощью компактности резольвенты легко убедиться, что спектр $H(\alpha)$ не зависит от α (задача 121), так что в силу леммы О'Коннора все его собственные функции суть целые функции α. Это доказывает первое утверждение.

Предположим теперь, что V положительна. Фиксируем k и для всех $a \in \mathbb{R}$ положим

$$H_0(a) = (i\partial_k - ia)^2 - \sum_{j \neq k} \partial_j^2 = e^{ax_k} H_0 e^{-ax_k}.$$

Тогда $\exp(-tH_0(a))$ обладает ядром вида $(4\pi t)^{-n/2}e^{ax_k}e^{-|x-y|^2/4t}e^{-ay_k}$ и, следовательно, сохраняет положительность. Более того, поскольку это ядро как функция разности $x-y$ лежит в L^2, из неравенства Юнга получаем, что для любого $t>0$

$$\|e^{-tH_0(a)}\psi\|_\infty \leqslant C_{a,t}\|\psi\|_2. \tag{109}$$

Пусть теперь V_n — монотонно возрастающая последовательность ограниченных операторов умножения, такая, что $V_n \uparrow V$. Тогда $H_0(a)+V_n$ сходится к $H_0(a)+V$ в сильном резольвентном смысле (теорема о монотонной сходимости форм), и потому

$$e^{-t(H_0(a)+V)} = \underset{n\to\infty}{\text{s-lim}}\ \underset{m\to\infty}{\text{s-lim}}\ [e^{-tH_0(a)/m}e^{-tV_n/m}]^m.$$

Поскольку $\exp(-tH_0(a)/m)$ сохраняет положительность и $0\leqslant e^{-tV_n/m}\leqslant 1$ то поточечно почти всюду

$$|e^{-t(H_0(a)+V)}f|\leqslant e^{-tH_0(a)}|f|.$$

Но, в силу (109), $\exp(-tH_0(a))|f|\in L^\infty$. Таким образом, $\exp(-t(H_0(a)+V))f\in L^\infty$ для любой $f\in L^2$, и, в частности собственные функции $H_0(a)+V$ лежат в L^∞. Но если ψ — собственная функция H_0+V, то $e^{ax_k}\psi$ — собственная функция $H_0(a)+V$. В итоге $e^{ax_k}\psi\in L^\infty$ для всех a, что доказывает второе утверждение теоремы. ∎

Известно, что собственные функции $-\Delta+x^2$ суть функции Эрмита, и потому полученный результат, который говорит лишь об убывании более быстром, чем экспоненциальное, далек от оптимального. В случае достаточно быстрого роста V на бесконечности можно ожидать более сильных результатов. Прежде всего можно просто еще немного обобщить метод Комба — Томаса:

Теорема XIII.71. Пусть V имеет вид, указанный в теореме XIII.69, и $W(x)=\int_0^{|x|}\sqrt{V_0(s)}\,ds$, где $V_0(r)=\operatorname*{ess\,inf}_{|x|=r} V_1(x)$. Тогда любая собственная функция ψ оператора $-\Delta+V$ лежит в $D(\exp(\tfrac{1}{2}\beta W(x)))$ для любого $\beta<\sqrt{5}-1$.

Доказательство. Пусть $U(\alpha)\doteq\exp(i\alpha W(x))$. Тогда

$$U(\alpha)(-\Delta)U(\alpha)^{-1}=(i\nabla+\alpha\nabla W)^2=$$
$$=-\Delta+\alpha^2(\nabla W)^2+\alpha(\nabla W)\cdot(i\nabla)+\alpha(i\nabla)\cdot(\nabla W).$$

Но $|\nabla W|=V_0^{1/2}\leqslant V_1^{1/2}$; поэтому

$$\alpha^2(\nabla W)^2\leqslant\alpha^2(-\Delta+V_2+C)+\alpha^2(\nabla W)^2\leqslant\alpha^2(-\Delta+V+\text{const})$$

и

$$\pm[\alpha(\nabla W)\cdot(i\nabla)+\alpha(i\nabla)\cdot\nabla W]\leqslant(|\alpha|+\varepsilon)(-\Delta+V+\text{const}),$$

так что $U(\alpha)(-\Delta+V)U(\alpha)^{-1}$ продолжается до аналитического семейства в области $|\alpha|^2+|\alpha|<1$. Теперь нужный результат получается простым повторением доказательства последней теоремы. ∎

Совершенно другими методами можно получить следующую более точную оценку (по поводу доказательства см. ссылки в Замечаниях).

Теорема XIII.72. Пусть V — положительная C^∞-функция на $\mathbb{R}^n$ и $H=-\Delta+V$. Пусть ψ — собственная функция H. Тогда

(a) если $V(x)\geqslant c|x|^{2n}-d$ при некоторых c и d, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое D, что при всех x

$$|\psi(x)|\leqslant D\exp\left(-(n+1)^{-1}(c-\varepsilon)^{1/2}|x|^{n+1}\right);$$

(b) если $V(x)\leqslant c|x|^{2n}+d$ при некоторых c и d и ψ — основное состояние, то для любого $\varepsilon>0$ существует такое $E>0$, что

$$\psi(x)\geqslant E\exp\left(-(n+1)^{-1}(c+\varepsilon)^{1/2}|x|^{n+1}\right).$$

Результаты двух последних теорем можно интерпретировать с точки зрения ВКБ-приближения:

$$\psi\sim\exp\left(-\int\sqrt{V-E}\,dx\right).$$

* * *

Займемся теперь обсуждением теорем о компактных вложениях пространств Соболева. Имеются по крайней мере две естественные возможности.

Определение. Пусть $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$ — открытое множество, $H^m(\Lambda)$ — множество функций $f\in L^2(\Lambda)$ с обобщенными производными $D^\alpha f$, лежащими в $L^2(\Lambda)$ для всех α с $|\alpha|\leqslant m$. Снабженное нормой

$$\|f\|_m=\Bigl(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha f\|_2^2\Bigr)^{1/2},$$

$H^m(\Lambda)$ становится гильбертовым пространством. Пусть $H_0^m(\Lambda)$ по определению есть пополнение $C_0^\infty(\Lambda)$ по норме $\|\cdot\|_m$. Пространства $H^m(\Lambda)$ и $H_0^m(\Lambda)$ называются **локальными пространствами Соболева.**

В общем случае $H_0^m(\Lambda)$ — собственное подпространство в $H^m(\Lambda)$.

Пример 1. Пусть $\Lambda=(0, 1)\subset\mathbb{R}$, $g(x)=e^x$ и $f\in C_0^\infty(\Lambda)$. Естественное скалярное произведение на $H^1(\Lambda)$ элементов g и f обращается в нуль:

$$(g, f)_1=\left(\left(-\frac{d^2}{dx^2}+1\right)g,\ f\right)_{L^2}=0.$$

Таким образом, $H_0^1(\Lambda)\subset\{g\}^\perp$ и $H_0^1(\Lambda)\neq H^1(\Lambda)$.

Читателю, знакомому с теорией самосопряженных расширений (§ X.1), полезно обратить внимание на связь примера 1 с тем фактом, что $-d^2/dx^2$ не является в существенном самосопряженным на $C_0^\infty(0, 1)$. На самом деле, пользуясь тем фактом, что $-\Delta$ не самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\Lambda)$ при *ограниченной* области Λ, можно показать, что $H_0^1(\Lambda)$ всегда отличен от $H^1(\Lambda)$ для *ограниченной* Λ. Отметим, что

$$H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n) = D((-\Delta)^{m/2}).$$

Существует много соотношений включения между введенными пространствами Соболева.

Предложение. Пусть Λ и Λ' — открытые множества и $\Lambda \subset \Lambda'$. Предположим, что $m \geqslant j \geqslant 0$. Тогда

(a) $H_0^m(\Lambda) \subset H^m(\Lambda)$;
(b) $H^m(\Lambda) \subset H^j(\Lambda)$;
(c) $H_0^m(\Lambda) \subset H_0^j(\Lambda)$.
(d) Пусть $f \in H(\Lambda')$. Тогда $f \restriction \Lambda$, сужение f на Λ, лежит в $H^m(\Lambda)$.
(e) Если $f \in H^m(\Lambda)$ и $f = 0$ на $\Lambda \setminus C$, где C — компактное подмножество Λ, то $f \in H_0^m(\Lambda)$.
(f) Если $f \in D((-\Delta)^{m/2})$, где $-\Delta$ означает оператор на $L^2(\mathbb{R}^n)$, то $(f \restriction \Lambda) \in H^m(\Lambda)$.

При всех описанных включениях норма не возрастает.

Доказательство. (a), (b) и (d) немедленно вытекают из определений. (c) получается путем применения неравенств для норм, неявно содержащихся в (b), и пополнения $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. (e) доказывается с помощью элементарных соображений, основанных на использовании «аппроксимации единицы», а (f) — путем оценки каждого члена в $\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}$ через $\|(-\Delta)^{m/2}f\|_{L^2}$ и $\|f\|_{L^2}$ при помощи преобразования Фурье. ∎

Докажем теперь два несложных утверждения о компактности.

Теорема XIII.73. Пусть A — расширение по Фридрихсу оператора $-\Delta$ на $C_0^\infty(\Lambda)$ (лапласиана Дирихле). Предположим, что Λ — ограниченная область. Тогда

(a) $H_0^m(\Lambda) \subset D(A^{m/2})$ и нормы эквивалентны;
(b) если $m > j$, то единичный шар в $H_0^m(\Lambda)$ компактен в $H_0^j(\Lambda)$.

Доказательство. Пусть $f \in C_0^\infty(\Lambda)$. Тогда $\|f\|_m$ и $\|(-\Delta)^{m/2} f\|$ — эквивалентные нормы, поскольку f можно считать элементом L^2, а тогда для производных f справедливы равенства $\mathcal{F}(D^\alpha f) = (ik)^\alpha \hat{f}$ и

$$k^{2m} \leqslant C_1 \sum_{|\alpha| \leqslant m} (k^\alpha)^2 \leqslant C_2 (k^{2m} + 1).$$

Теперь ясно, что $C_0^\infty(\Lambda)\subset D(A^n)$ для всех n и $A^n f=(-\Delta)^n f$, откуда

$$\|(-\Delta)^{m/2}f\|^2=(f,\ (-\Delta)^m f)=(f,\ A^m f)=\|A^{m/2}f\|^2.$$

В результате пополнение C_0^∞ по норме $\|\cdot\|_m$ лежит в $D(A^{m/2})$.

Далее мы утверждаем, что A — оператор с компактной резольвентой. Ясно, что для доказательства компактности в $L^2(\Lambda)$ множества $F_b\equiv\{\psi\in Q(A)\mid \|\psi\|\leqslant 1,\ (\psi,\ A\psi)\leqslant b\}$ достаточно доказать, что оно входит в некоторое компактное подмножество в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Но так же, как и выше, $Q(A)\subset Q(-\Delta)$ с $(\psi,\ A\psi)=(\psi,\ -\Delta\psi)$, где $-\Delta$ есть обычный оператор на $L^2(\mathbb{R}^n)$. Пусть F — любая функция, равная 1 на Λ и такая, что $F\to\infty$. Тогда

$$F_b\subset\{\psi\in L^2(\mathbb{R}^n)\mid \|\psi\|\leqslant 1,\ (\psi,\ -\Delta\psi)\leqslant b,\ (\psi,\ F\psi)\leqslant 1\},$$

так что, в силу теоремы XIII.65, F_b содержится в компактном подмножестве в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Поскольку $(A+1)^{-1}$ компактен как оператор из $L^2(\Lambda)$ в $L^2(\Lambda)$, он компактен как оператор из $D(A^{m/2})$ в $D(A^{m/2})$ для любого m, ибо унитарное преобразование $(A+1)^{-m/2}$ из $L^2(\Lambda)$ в $D(A^{m/2})$ коммутирует с $(A+1)^{-1}$. Поскольку компактен $(A+1)^{-1}$, таков же и $(A+1)^{-1/2}$; таким образом, единичный шар из $D(A^{(m+1)/2})$ компактен в $D(A^{m/2})$ и, так как $H_0^l(\Lambda)$ — подмножество в $D(A^{l/2})$, утверждение о компактности H_0^l доказано. ∎

Предупредим читателя, что, хотя $H_0^1(\Lambda)=D(A^{1/2})$ просто по определению A, $H_0^m(\Lambda)$ не совпадает с $D(A^{m/2})$ при $m>1$.

Следствие. Пусть Ω — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Резольвента лапласиана Дирихле $-\Delta_D^\Omega$ компактна.

Доказательство. В силу теоремы XIII.73, множество

$$\{\psi\in Q(-\Delta_D^\Omega)\mid(\psi,\ -\Delta_D^\Omega\psi)\leqslant 1 \text{ и } \|\psi\|\leqslant 1\}$$

компактно в $L^2(\Omega)$, так что нужный результат вытекает из теоремы XIII.64. ∎

Лемма. Пусть Λ — ограниченное открытое множество, а Λ' открыто и таково, что $\bar\Lambda\subset\Lambda'$. Тогда существует $\eta\in C_0^\infty(\Lambda')$ с $\eta\equiv 1$ на Λ.

Доказательство. Для любого $x\in\bar\Lambda$ найдем такое $r_x>0$, чтобы шар радиуса $2r_x$ с центром в x лежал в Λ'. В силу компактности, $\bar\Lambda$ можно покрыть конечным числом шаров $B_1,\ \ldots,\ B_m$ радиусов r_{x_i}. Найдем обычным способом функции $\eta_i\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с носителями в шарах радиусов $2r_{x_i}$ с центрами в x_i и равные 1 на B_i. Остается положить $\eta=1-\prod_{i=1}^{m}(1-\eta_i)$. ∎

Теорема XIII.74. Пусть Λ — ограниченное открытое множество, а Λ' открыто и таково, что $\overline{\Lambda}\subset\Lambda'$. Пусть $m>j$. Тогда отображение $H^m(\Lambda')$ в $H^j(\Lambda)$, определяемое сужением, компактно.

Доказательство. Возьмем функцию $\eta\in C_0^\infty(\Lambda')$, равную 1 на Λ. Для заданной последовательности $\{f_k\}$ в $H^m(\Lambda')$ с $\|f_k\|_m\leqslant 1$ положим $g_k=\eta f_k$. Легко видеть, что $\|g_k\|_m\leqslant c$ с некоторым фиксированным c. Более того, каждая функция g_k лежит в $H_0^m(\Lambda')$. Значит, можно выбрать подпоследовательность $g_{k(i)}$, сходящуюся в $H_0^j(\Lambda')$. Но тогда последовательность $g_{k(i)}\restriction\Lambda\equiv f_{k(i)}\restriction\Lambda$ сходится в $H^j(\Lambda)$. ∎

Следствие 1. Пусть $-\Delta$ действует на $\mathbb{R}^m$ и $\{u_n\}$ — последовательность функций из $Q(-\Delta)$, удовлетворяющая неравенствам $\|\nabla u_n\|\leqslant c$, $\|u_n\|\leqslant c$ с некоторым c. Тогда для любого заданного $R>0$ существует подпоследовательность в $\{u_n\}$, сходящаяся по норме $\left(\int\limits_{|x|\leqslant R}|v(x)|^2dx\right)^{1/2}$. Аналогично, если задана последовательность $u_n\in D(-\Delta)$, такая, что $\|\nabla u_n\|\leqslant c$, $\|-\Delta u_n\|\leqslant c$, то в ней существует подпоследовательность, сходящаяся по полунорме $\left(\int\limits_{|x|\leqslant R}|\nabla v(x)|^2dx\right)^{1/2}$.

Доказательство. Выберем $\Lambda=\{x\mid |x|\leqslant R\}$ и $\Lambda'=\mathbb{R}^m$. Поскольку $Q(-\Delta)=H^1(\mathbb{R}^m)$ и $\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^m)}\leqslant\|\nabla u\|_{L^2}+\|u\|_{L^2}$, первое утверждение следует из теоремы XIII.74. Второе выводится из первого, если заметить, что $\|\nabla\partial_i u\|\leqslant\|\Delta u\|$, ибо в таком случае можно перейти к фурье-образу и воспользоваться тем, что $\sum\limits_j(k_jk_i)^2\leqslant k^4$. ∎

Приведенное следствие применяется при изучении рассеяния в неоднородных средах методом Лакса — Филлипса (§ XI.11). При изучении рассеяния на препятствии с граничными условиями Дирихле вместо него полезно другое следствие. Набросок его несколько более длинного доказательства содержится в задаче 124.

Следствие 2. Пусть K — компактное подмножество в $\mathbb{R}^m$, и пусть $-\Delta_D$ есть лапласиан Дирихле в $L^2(\mathbb{R}^m\setminus K)$. Пусть u_n — последовательность функций в $Q(-\Delta_D)$, такая, что $\|u_n\|\leqslant c$, $(u_n, (-\Delta_D)u_n)\leqslant c^2$ при некотором c. Тогда для заданного $R>0$ в $\{u_n\}$ имеется подпоследовательность, сходящаяся по норме $\left(\int\limits_{\{x\mid |x|\leqslant R\}\setminus K}|v(x)|^2dx\right)^{1/2}$. Аналогично, для $u_n\in D(-\Delta_D)$ с $\|-\Delta_D u_n\|\leqslant c$ и $(u_n, (-\Delta_D)u_n)\leqslant c^2$ при $m\geqslant 3$ в $\{u_n\}$ имеется подпоследовательность, сходящаяся по полунорме $\left(\int\limits_{\{x\mid |x|\leqslant R\}\setminus K}|\nabla v(x)|^2dx\right)^{1/2}$.

Случай граничных условий Неймана более тонок.

Рис. XIII.7. Область с сегментным свойством.

Пример 2. Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, \ldots$ — бесконечная последовательность непересекающихся открытых шаров, радиусы которых уменьшаются столь быстро, что $\Lambda = \bigcup \Gamma_i$ ограничено. Пусть f_i — функция, пропорциональная (с положительным коэффициентом) характеристической функции шара Γ_i, причем $\|f_i\| = 1$ в $L^2(\Lambda)$. Тогда f_i образуют ортонормированное семейство в каждом из $H^m(\Lambda)$, так что $H^m(\Lambda)$ не может быть компактно вложено в $H^j(\Lambda)$ ни при каком m или j.

Хотя приведенный пример выглядит несколько искусственным, поскольку Λ несвязно, довольно ясно, что все Γ можно соединить очень узкими «коридорами», не нарушая некомпактность вложения. Вообще, результаты о компактности вложения $H^m(\Lambda) \subset H^j(\Lambda)$ опираются на весьма тонкие геометрические свойства Λ. Сейчас мы приступим к формулировке одного из самых сильных результатов такого рода.

(a) *Гладкое острие* (b) *Зазубренное острие*

Рис. XIII.8.

Определение. Пусть Λ — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^m$ и $\partial\Lambda \equiv \overline{\Lambda} \setminus \Lambda$ — его топологическая граница. Говорят, что Λ обладает **сегментным свойством**, если $\partial\Lambda$ допускает конечное открытое покрытие $\{O_i\}$, которому соответствуют ненулевые векторы $\{y_i\}$, такие, что $(x + ty_i) \in \Lambda$, когда $x \in \overline{\Lambda} \cap O_i$, $0 < t < 1$. Проиллюстрируем это определение некоторыми примерами в $\mathbb{R}^2$. Прежде всего ясно, что если $\partial\Lambda$ — гладкая кривая, то Λ обладает сегментным свойством точно так же как и Λ, ограниченное конечным числом гладких кривых, пересекающихся под ненулевыми углами. Дуги, изображенные на рис. XIII.7, могут даже образовать при пересечении заострение типа точки возврата, не нарушая сегментного свойства, если только заострения не слишком «зазубрены»

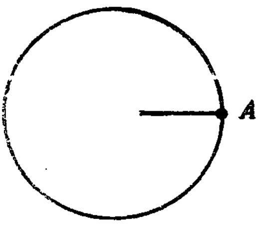

Рис. XIII.9. В точке A нарушается сегментное свойство.

(рис. XIII.8). Каноническим примером «хорошей» области, не обладающей сегментным свойством, служит круг с удаленным отрезком (см. рис. XIII.9).

Ссылки на литературу в связи со следующей теоремой о компактном вложении даны в Замечаниях.

Теорема XIII.75. Пусть Λ — ограниченное открытое множество, обладающее сегментным свойством. Тогда $H^m(\Lambda)$ компактно вкладывается в $H^j(\Lambda)$ для $m > j$.

Действуя подобно тому, как в доказательстве следствия теоремы XIII.73, немедленно получаем

Следствие 1. Пусть Ω — ограниченная открытая область в $\mathbb{R}^m$, обладающая сегментным свойством; тогда резольвента лапласиана Неймана $-\Delta_N^\Omega$ компактна.

Следствие 2. Пусть K — компактное подмножество в $\mathbb{R}^m$, а $\mathbb{R}^m \setminus K$ обладает сегментным свойством в том смысле, что этим свойством обладает $\mathcal{B}_{R_0} \setminus K$, где $\mathcal{B}_{R_0}$ — некоторый открытый шар, содержащий K. Пусть $-\Delta_N$ есть лапласиан Неймана в $L^2(\mathbb{R}^m \setminus K)$ и $u_n \in Q(-\Delta_N)$ — последовательность функций, таких, что $\|u_n\| \leqslant c$ и $(u_n, (-\Delta_N) u_n) \leqslant c^2$ при некотором c. Тогда для каждого $R > 0$ в $\{u_n\}$ имеется подпоследовательность, сходящаяся по норме $\left(\int_{\{x \mid |x| \leqslant R\} \setminus K} |v(x)|^2 dx\right)^{1/2}$. Аналогично, если $u_n \in D(-\Delta_N)$ и $\|-\Delta_N u_n\| \leqslant c$, $(u_n, (-\Delta_N) u_n) \leqslant c^2$, то $\{u_n\}$ имеет подпоследовательность, сходящуюся по полунорме $\left(\int_{\{x \mid |x| \leqslant R\} \setminus K} |\nabla v(x)|^2 dx\right)^{1/2}$.

В задаче 124 читателю предлагается вывести следствие 2 из теоремы XIII.75.

* * *

Другая проблема, где естественно возникают операторы с компактными резольвентами, — это описание квантовостатистических систем в ящике. Пусть Ω — ограниченное открытое подмножество в $\mathbb{R}^3$. Пусть для N-частичной системы $\Omega_N = \Omega \times \ldots \times \Omega \subset \mathbb{R}^{3N}$ и $\mathcal{H} = L^2(\Omega_N, d^{3N}x)$. Если приходится иметь дело с частицами, подчиняющимися статистике Бозе — Эйнштейна или Ферми — Дирака, то в качестве гильбертова пространства состояний системы следует брать пространство $\mathcal{H}_s$ симметричных функций или пространство $\mathcal{H}_a$ антисимметричных. Все обсуждаемые ниже результаты применимы без изменения в любом из этих случаев. Пусть H_0 — расширение по Фридрихсу оператора $-\Delta$ на $C_0^\infty(\Omega_N)$; H_0 имеет смысл оператора полной кинетической энергии. Пусть W — бесконечно малое возмущение $-\Delta$ на $\mathbb{R}^3$ в смысле форм, скажем

$W \in R$, классу Рольника, и пусть

$$V = \sum_{1 < i < j < N} W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

— оператор умножения на $\mathscr{H}$. Тогда легко показать, что V — бесконечно мало возмущение H_0 в смысле форм (задача 122). Первым шагом в изучении статистических систем является следующая

Теорема XIII.76. Резольвента оператора $H = H_0 + V$ с описанными выше H_0 и V компактна. Более того, для любого $\beta > 0$ оператор $e^{-\beta H}$ имеет конечный след.

Доказательство. Поскольку V — ограниченное возмущение в смысле форм с нулевой относительной гранью, легко показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое c, что

$$(1-\varepsilon)(H_0 - c) \leqslant H \leqslant (1+\varepsilon)(H_0 + c),$$

и потому

$$(1-\varepsilon)[\mu_n(H_0) - c] \leqslant \mu_n(H) \leqslant (1+\varepsilon)[\mu_n(H_0) + c]. \qquad (110)$$

Из (110) и теоремы XIII.64 вытекает, что резольвента H компактна тогда и только тогда, когда компактна резольвента H_0. Отметим, что $\exp(-\beta A)$ имеет конечный след тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta\mu_n(A)) < \infty$. Таким образом, используя опять-таки (110), получаем, что след $\exp(-\beta H)$ конечен для всех положительных β тогда и только тогда, когда этим свойством обладает след $\exp(-\beta H_0)$. В итоге мы свели дело к случаю $V = 0$. Будем далее явно указывать зависимость H_0 от Ω_N, обозначая этот оператор через $H_0(\Omega_N)$. Поскольку, согласно определению расширения по Фридрихсу, $C_0^\infty(\Omega_N)$ — существенная область определения формы $H_0(\Omega_N)$ и поскольку $C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\Omega')$, если $\Omega \subset \Omega'$, мы видим, что, в силу принципа минимакса,

$$\mu_n(H_0(\Omega)) \geqslant \mu_n(H_0(\Omega')),$$

если $\Omega \subset \Omega'$. Любую область Ω_N можно вложить в ящик $\Omega' \subset \mathbb{R}^{3N}$, поэтому нужно только доказать, что

$$\sum_n \exp(-\beta\mu_n(H_0(\Omega'))) < \infty. \qquad (111)$$

Если ребра Ω' равны $l_1, \ldots, l_{3N}$, то соответствующие собственные значения равны

$$E_{m_1, \ldots, m_{3N}} = \sum_{i=1}^{3N} m_i^2 \left(\frac{\pi}{l_i}\right)^2,$$

где $m_1, \ldots, m_{3N}$ — произвольные положительные целые числа. Пусть $a = \min\{(\pi/l_i)^2 \mid i = 1, \ldots, 3N\}$. Тогда $E_{m_1, \ldots, m_{3N}} \geqslant \geqslant a \sum_{i=1}^{3N} m_i^2 \geqslant a \sum_{i=1}^{3N} m_i$, так что

$$\sum_n \exp(-\beta\mu_n(H_0(\Omega'))) \leqslant \sum_{m_i \geqslant 1} \exp\left(-\beta a \sum_{i=1}^{3N} m_i\right) = \left[\sum_{m=1}^{\infty} \exp(-\beta a m)\right]^{3N} < \infty$$

в силу сходимости геометрического ряда. Это доказывает (111) и теорему. ∎

Приведенная теорема служит исходной точкой обсуждения квантовой статистической механики. Дальнейшее развитие этой темы можно найти в ссылках, приводимых в Замечаниях.

До сих пор в этом разделе мы говорили о компактности и дискретности всего спектра сразу. В заключение мы сформулируем условия на самосопряженный оператор, гарантирующие дискретность части его спектра.

Теорема XIII.77. Пусть A — самосопряженный оператор. Часть спектра A, лежащая в интервале (a, b), чисто дискретна тогда и только тогда, когда $f(A)$ компактен для любой непрерывной функции f с носителем $\operatorname{supp} f \subset (a, b)$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{supp} f \subset [c, d]$, $a < c \leqslant d < b$. Если часть спектра оператора A в (a, b) чисто дискретна, то в $\sigma(A) \cap [c, d]$ содержится лишь конечное число точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ибо в $[c, d]$ нет ни одной предельной точки $\sigma(A)$. Более того, каждый спектральный проектор $P(\lambda_i)$ конечномерен. Таким образом,

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) P(\lambda_i)$$

обращается в нуль на ортогональном дополнении конечномерного пространства и потому компактен.

Обратно, пусть каждый оператор $f(A)$ с $\operatorname{supp} f \subset (a, b)$ компактен. Пусть $[c, d] \subset (a, b)$ и f — положительная непрерывная функция, такая, что $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f(x) = 1$ при $c \leqslant x \leqslant d$ и $\operatorname{supp} f \subset (a, b)$. Тогда спектральный проектор $P([c, d])$, отвечающий $[c, d]$, обладает свойством $P([c, d]) f(A) = P([c, d])$ и потому компактен. Следовательно, его область значений конечномерна, так что любое $\lambda \in [c, d]$ лежит либо в $\rho(A)$, либо в $\sigma_{\text{disc}}(A)$. ∎

Приведем два важных следствия теоремы XIII.77.

Следствие 1. Пусть A_n — последовательность самосопряженных операторов с чисто дискретным спектром в интервале (a, b).

Пусть A_n сходится к A в равномерном резольвентном смысле. Тогда спектр A в (a, b) чисто дискретен.

Доказательство. В силу теоремы VIII.20, если f непрерывна и $\operatorname{supp} f \subset (a, b)$, то $f(A_n) \to f(A)$ по норме. Поскольку равномерный предел компактных операторов компактен, нужное утверждение вытекает из теоремы XIII.77. ∎

Следствие 2. Пусть A_n — последовательность самосопряженных операторов с $\sigma_{ess}(A_n) = [\Sigma_n, \infty)$. Предположим, что $A_n \to A$ в равномерном резольвентном смысле. Тогди Σ_n сходится при $n \to \infty$ к некоторому Σ (возможно, ∞) и $\sigma_{ess}(A) = [\Sigma, \infty)$.

Доказательство. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\Sigma_n \to \Sigma$. В силу следствия 1, $\sigma_{ess}(A) \subset [\Sigma, \infty)$, а в силу теоремы VIII.23, $(\Sigma, \infty) \subset \sigma_{ess}(A)$. Таким образом, $\sigma_{ess}(A) = [\Sigma, \infty)$. В частности, $\inf \sigma_{ess}(A)$ — единственная возможная предельная точка исходной последовательности Σ_n, так что Σ_n сходится. ∎.

XIII.15. Асимптотическое распределение собственных значений

Мы знаем намного больше о силах, порождающих звуковые колебания, чем о силах, порождающих световые. Задача определения звуковых тонов, излучаемых колеблющейся системой, иногда разрешима в явном виде, а иногда нет, но обратная задача: определение формы колокола по звуку, который он способен издавать,— просто ставит в тупик самых искусных математиков. А это именно та проблема, которую надеется решить спектроскопия в случае света. Сейчас мы должны с восхищением приветствовать каждый даже небольшой шаг в этом направлении.

А. ШУСТЕР, 1882 Г.

В этом разделе описывается качественный метод изучения точечного спектра. Истоки этого метода лежат в классической математической физике, где интересуются асимптотическим поведением при $\lambda \to \infty$ функции $N(\lambda) = \dim P_{(-\infty, \lambda)}(A)$ для самосопряженного оператора A, отвечающего некоторой краевой задаче. Наиболее известный результат такого рода доказал Г. Вейль: для оператора $-\Delta$ с граничными условиями Дирихле в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ функция $N(\lambda)$ асимптотически равна функции $C_m \lambda^{m/2}$, умноженной на объем области Ω, где C_m — зависящая от m константа

$$C_m = [m 2^{m-1} \pi^{m/2} \Gamma(m/2)]^{-1};$$