Пусть $A_n$ сходится к $A$ в равномерном резольвентном смысле. Тогда спектр $A$ в $(a, b)$ чисто дискретен.

*Доказательство.* В силу теоремы VIII.20, если $f$ непрерывна и $\operatorname{supp} f \subset (a, b)$, то $f(A_n) \to f(A)$ по норме. Поскольку равномерный предел компактных операторов компактен, нужное утверждение вытекает из теоремы XIII.77. ∎

***Следствие 2.*** Пусть $A_n$ — последовательность самосопряженных операторов с $\sigma_{\text{ess}}(A_n) = [\Sigma_n, \infty)$. Предположим, что $A_n \to A$ в равномерном резольвентном смысле. Тогди $\Sigma_n$ сходится при $n \to \infty$ к некоторому $\Sigma$ (возможно, $\infty$) и $\sigma_{\text{ess}}(A) = [\Sigma, \infty)$.

*Доказательство.* Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\Sigma_n \to \Sigma$. В силу следствия 1, $\sigma_{\text{ess}}(A) \subset [\Sigma, \infty)$, а в силу теоремы VIII.23, $(\Sigma, \infty) \subset \sigma_{\text{ess}}(A)$. Таким образом, $\sigma_{\text{ess}}(A) = [\Sigma, \infty)$. В частности, $\inf \sigma_{\text{ess}}(A)$ — единственная возможная предельная точка исходной последовательности $\Sigma_n$, так что $\Sigma_n$ сходится. ∎.

## XIII.15. Асимптотическое распределение собственных значений

*Мы знаем намного больше о силах, порождающих звуковые колебания, чем о силах, порождающих световые. Задача определения звуковых тонов, излучаемых колеблющейся системой, иногда разрешима в явном виде, а иногда нет, но обратная задача: определение формы колокола по звуку, который он способен издавать,— просто ставит в тупик самых искусных математиков. А это именно та проблема, которую надеется решить спектроскопия в случае света. Сейчас мы должны с восхищением приветствовать каждый даже небольшой шаг в этом направлении.*

А. ШУСТЕР, 1882 г.

В этом разделе описывается качественный метод изучения точечного спектра. Истоки этого метода лежат в классической математической физике, где интересуются асимптотическим поведением при $\lambda \to \infty$ функции $N(\lambda) = \dim P_{(-\infty, \lambda)}(A)$ для самосопряженного оператора $A$, отвечающего некоторой краевой задаче. Наиболее известный результат такого рода доказал Г. Вейль: для оператора $-\Delta$ с граничными условиями Дирихле в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ функция $N(\lambda)$ асимптотически равна функции $C_m \lambda^{m/2}$, умноженной на объем области $\Omega$, где $C_m$ — зависящая от $m$ константа

$$C_m = [m 2^{m-1} \pi^{m/2} \Gamma(m/2)]^{-1};$$

здесь $\Gamma(\cdot)$ есть гамма-функция Эйлера, так что

$$\Gamma(m/2) = \begin{cases} (k-1)!, & m = 2k, \\ 2^{-2k}(2k)!\sqrt{\pi}/k!, & m = 2k+1, \end{cases}$$

где $k$ — целое число.

Метод, который мы собираемся описать, позволит также ответить на вопросы, типичные для квантовой механики: если резольвента оператора $-\Delta+V$ компактна, как быстро растет $\dim P_{(-\infty,\,E)}(-\Delta+V)$ при $E\to\infty$? Если потенциал $V$ убывает на бесконечности, но так медленно, что $\dim P_{(-\infty,\,0)}(-\Delta+V)=\infty$, как быстро растет $\dim P_{(-\infty,\,E)}(-\Delta+V)$ при $E\uparrow 0$? Если $W$ — короткодействующий потенциал, какова скорость роста $\dim P_{(-\infty,\,0)}(-\Delta+\lambda W)$ при $\lambda\to\infty$? Некоторые элементы этого же метода оказываются полезными при изучении давления в квантовой статистической механике, плотности энергии полей в фоковском пространстве в конструктивной теории поля, модели Томаса — Ферми в атомной физике.

С этими вопросами связаны некие неформальные соображения, решающие для понимания формальной техники, которую мы будем развивать. Обсудим сначала результат Вейля. Константа $C_m$ не так уж неудобна и неестественна, как это кажется на первый взгляд. Если $\tau_m$ — объем единичного шара в $\mathbb{R}^m$, то $C_m=\tau_m/(2\pi)^m$. Таким образом, асимптотическое значение $N(\lambda)$ можно переписать в виде

$$N(\lambda)\sim(\tau_m\lambda^{m/2})(\operatorname{vol}\Omega)/(2\pi)^m,$$

так что в некотором смысле $N(\lambda)$ оказывается связанной с объемом в $\mathbb{R}^{2m}$ (а не в $\mathbb{R}^m$, как могло бы показаться на основании формулы $C_m(\operatorname{vol}\Omega)$). В самом деле, поскольку $\tau_m\lambda^{m/2}=$ $=\operatorname{vol}\{p\in\mathbb{R}^m \mid p^2<\lambda\}$, мы видим, что

$$N(\lambda)\sim\operatorname{vol}\{\langle x, p\rangle \mid x\in\Omega,\ p^2<\lambda\}/(2\pi)^m.$$

Таким образом, $(2\pi)^m N(\lambda)$ асимптотически есть объем фазового пространства классической частицы массы $m=1/2$ и энергии $E_{\text{class}}\leqslant\lambda$, свободно движущейся в области $\Omega$ (например, с упругим отражением от стенок области $\Omega$). В системе единиц, в которой $\hbar=1$, лапласиан $-\Delta_D$ с граничными условиями Дирихле в $\Omega$, в сущности, и есть энергия квантовой системы, отвечающей такой свободной классической частице в $\Omega$. В итоге мы видим, что при $\lambda\to\infty$ число квантовых состояний дается объемом фазового пространства соответствующей классической системы, деленным на $(2\pi)^m$. Это согласуется со «старой квантовой теорией», т. е. условиями квантования Бора — Зоммерфельда, согласно которым каждому квантовому состоянию отвечает объем $h^m$ фазового пространства, поскольку в нашей системе единиц $h \equiv 2\pi\hbar = 2\pi$. Интересно, что работа Вейля и работы Бора и Зоммерфельда выполнялись почти одновременно, хотя связь между ними была понята лишь через несколько лет. Все результаты, которые будут доказаны здесь в связи с квантовыми задачами, упомянутыми выше, допускают интерпретацию на языке фазового объема, деленного на $(2\pi)^m$. Например, для короткодействующего $W$ равенство

$$(2\pi)^{-m} \operatorname{vol} \{\langle x, p\rangle \mid p^2 + \lambda W(x) < 0\} = \\ = \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} \int\limits_{\{x \mid W(x) < 0\}} \lambda^{m/2} |W(x)|^{m/2} d^m x$$

дает асимптотическое выражение, которое будет получено для $\dim P_{(-\infty, 0)}(-\Delta + \lambda W)$.

Идея метода, которым мы будем пользоваться для изучения упомянутых задач, очень проста и связана с описанными выше соображениями, относящимися к фазовым пространствам. Для куба легко вычислить собственные значения лапласиана с граничными условиями Дирихле $(-\Delta_D)$ или Неймана $(-\Delta_N)$ и непосредственно проверить асимптотическую формулу Вейля (предложение 2); в этом случае содержание формулы, в сущности, сводится к утверждению о том, что объем большого шара в $\mathbb{R}^m$ примерно равен числу его точек с целочисленными координатами. Когда $\Omega$ равна объединению кубов (вместе со всеми общими границами), формула Вейля гораздо тоньше, но тот факт, что объемы фазового пространства «локальны в $x$-пространстве», т. е. что, по Вейлю, $N(\lambda; \Omega_1 \cup \Omega_2)$ асимптотически совпадает с $N(\lambda; \Omega_1) + N(\lambda; \Omega_2)$, наводит на мысль попытаться расцепить кубы, входящие в $\Omega$, вдоль их общей границы и воспользоваться знанием асимптотик в случае отдельных кубов. Здесь очень помогает один довольно интересный факт о граничных условиях. Существует два оператора, которые можно сравнивать с $-\Delta_D^\Omega$. Один оператор (обозначим его $-\tilde{\Delta}_D$) отвечает граничным условиям Дирихле на общих границах (будем называть их границами Дирихле), другой $(-\tilde{\Delta}_N)$ отвечает граничным условиям Неймана на общих границах (будем называть их границами Неймана). Оператор $-\tilde{\Delta}_D$ допускает расцепление в том смысле, что $-\tilde{\Delta}_D = \bigoplus\limits_\alpha (-\Delta_D^{\Omega_\alpha})$ (и аналогично для $-\tilde{\Delta}_N$), где $\Omega$ — объединение кубов $\Omega_\alpha$ вместе с их общей границей (теорема XIII.79). Более того, величина $N(\lambda; -\Delta_D^\Omega)$ допускает двустороннюю оценку вида $N(\lambda; -\tilde{\Delta}_D) \leqslant N(\lambda; -\Delta_D^\Omega) \leqslant N(\lambda; -\tilde{\Delta}_N)$. Мы будем называть такой комбинированный метод расцепления и оценки **вилкой Дирихле — Неймана.**

Формальное описание метода начнем с изучения граничных условий Дирихле и Неймана.

***Определение.*** Пусть $\Omega$ — открытая область в $\mathbb{R}^m$ со связными компонентами $\Omega_1, \ldots$ (число которых конечно или бесконечно). **Лапласиан Дирихле** $-\Delta_D^\Omega$ области $\Omega$ есть однозначно определенный самосопряженный оператор в $L^2(\Omega, d^m x)$, квадратичная форма которого есть замыкание формы $q(f, g) = \int \overline{\nabla f} \cdot \nabla g d^m x$, заданной на $C_0^\infty(\Omega)$. **Лапласиан Неймана** $-\Delta_N^\Omega$ области $\Omega$ есть однозначно определенный самосопряженный оператор в $L^2(\Omega, d^m x)$, квадратичная форма которого $q(f, g) = \int \overline{\nabla f} \cdot \nabla g\, d^m x$ задана на области

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid \nabla f \in L^2(\mathbb{R}^m)\},$$

где $\nabla f$ означает градиент в смысле обобщенных функций, т. е.

$$\int (\nabla f)\, \varphi\, d^m x = -\int f\, (\nabla \varphi)\, d^m x$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. При раз и навсегда заданной области $\Omega$ индекс $\Omega$ мы будем опускать.

Существует несколько других описаний операторов $-\Delta_D^\Omega$ и $-\Delta_N^\Omega$. Ясно, что, в силу определения, $-\Delta_D^\Omega$ есть расширение по Фридрихсу, и потому $Q(-\Delta_D^\Omega)$ совпадает с пространством $H_0^1(\Omega)$, введенным в предыдущем разделе. Из проведенного там обсуждения вытекает, что множество

$$\{f \in H^1(\Omega) \mid \operatorname{supp} f \text{ компактен в } \Omega\}$$

содержится в $Q(-\Delta_D^\Omega)$. Далее, при любой $\Omega$ возможно еще и такое описание. Пусть $D$ обозначает *операторное* замыкание градиента на $C_0^\infty(\Omega)$. Тогда $-\Delta_D^\Omega = D^* D$, в то время как $-\Delta_N^\Omega = DD^*$. Для хороших областей, в частности обладающих сегментным свойством, множество

$$\{f \in H^1(\Omega) \mid f \in C^\infty \text{ вплоть до } \partial\Omega\}$$

есть существенная область определения формы оператора $-\Delta_N^\Omega$. Если $\Omega$ имеет хорошую границу, то существенную область определения *оператора* $-\Delta_D$ образуют функции бесконечно дифференцируемые вплоть до границы $\partial\Omega$ и обращающиеся в нуль на ней, а оператора $-\Delta_N$ — бесконечно дифференцируемые вплоть до границы $\partial\Omega$ функции с обращающимися в нуль на $\partial\Omega$ нормальными производными. Именно при таком описании операторов $-\Delta_D$ и $-\Delta_N$ становится ясным происхождение их названий, обусловленное классическими краевыми задачами Дирихле и Неймана теории потенциала. В случае кубов нам потребуется именно это последнее описание.

***Предложение 1.*** Пусть $\Omega$ — куб в $\mathbb{R}^m$. Тогда

(a) $D_D \equiv \{f \mid f$ бесконечно дифференцируема вплоть до границы $\partial\Omega$, причем $f \upharpoonright \partial\Omega = 0\}$ — существенная область определения оператора $-\Delta_D$ и для $f \in D_D$

$$-\Delta_D f = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2};$$

(b) $D_N \equiv \{f \mid f$ бесконечно дифференцируема вплоть до границы $\partial\Omega$, причем $\partial f/\partial n \upharpoonright \partial\Omega = 0\}$ — существенная область определения оператора $-\Delta_N$ и для $f \in D_N$

$$-\Delta_N f = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Здесь $\partial/\partial n$ обозначает нормальную производную на границе.

*Доказательство.* (а) Без потери общности положим $\Omega = (-1, 1)^m$. Пусть $A$ — оператор $-\Delta$ с областью определения $D_D$. Мы хотим показать, что $-\Delta_D = \bar{A}$. Оператор $A$ симметрический, и методом разделения переменных (используя кратные ряды Фурье) можно найти ортонормированный базис, состоящий из собственных функций $\{\varphi_n\}$ оператора $A$. Если $A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$, то $\varphi \in D(\bar{A})$ тогда и только тогда, когда $\sum \lambda_n^2 |(\varphi_n, \varphi)|^2 < \infty$; а отсюда легко вывести, что $\bar{A}$ самосопряжен.

Ясно, что $C_0^\infty(\Omega) \subset D(\bar{A}) \subset Q(\bar{A})$ и в смысле квадратичных форм $\bar{A} \upharpoonright C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega) = -\Delta_D \upharpoonright C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega)$, так что достаточно доказать включение $Q(\bar{A}) \subset Q(-\Delta_D)$. Поскольку $D_D = D(A)$ — существенная область определения квадратичной формы $\bar{A}$, нужно только показать, что $D_D \subset Q(-\Delta_D)$, т. е. для каждого $f \in D_D$ достаточно найти последовательность $f_n \in C_0^\infty(\Omega)$, такую, что $\|f_n - f\| + \|\nabla f_n - \nabla f\| \to 0$. Для заданного $f \in D_D$ положим $g_n(x) = f((1 + n^{-1})x)$, если $|x_i| \leqslant (1 + n^{-1})^{-1}$, и $= 0$ в противном случае. Тогда $g_n(x)$ непрерывна и кусочно непрерывно дифференцируема с ограниченным градиентом. Более того, $g_n \to f$ и $\nabla g_n \to \nabla f$ в $L^2$. Пусть $j_\delta(x)$ — аппроксимативная единица. Тогда $g_n * j_\delta \to g_n$ и $\nabla(g_n * j_\delta) \to \nabla g_n$ при $\delta \to 0$. Поскольку $g_n * j_\delta \in C_0^\infty(\Omega)$ для малых $\delta$, можно найти последовательность $\{f_n\}$, которая нам нужна.

(b) Предположим, что $\Omega = (-1, 1)^m$. Пусть $B$ обозначает оператор $-\Delta$ на области определения $D_N$. Точно так же как в части (а), рассмотрев собственные функции оператора $B$, легко показать, что он в существенном самосопряжен. Более того, поскольку $D(B) \subset H^1(\Omega)$ и $(f, Bf) = \int |\nabla f|^2 d^m x$ для $f \in D(B)$

(в силу граничных условий), справедливо включение $Q(\overline{B}) \subset \subset Q(-\Delta_N)$, так что достаточно доказать включение $Q(-\Delta_N) \subset \subset Q(\overline{B})$, а для этого достаточно убедиться в том, что $H^1(\Omega) \subset \subset Q(\overline{B})$.

Пусть $f \in H^1(\Omega)$. Прежде всего мы утверждаем, что если $g$ и $\nabla g$ непрерывны вплоть до границы и $g(\pm 1, x_2, \ldots, x_m) = 0$, то

$$(\partial_1 f, g) = -(f, \partial_1 g). \qquad (112)$$

Предположим сначала, что $g$ обращается в нуль на всей $\partial\Omega$. Тогда, как и при доказательстве (а), можно найти такие $g_n \in C_0^\infty(\Omega)$, что $g_n \to g$, $\nabla g_n \to \nabla g$, и, значит, (112) выполняется, поскольку оно справедливо при $g = g_n$. Пусть теперь $\eta_n$ — последовательность $C^\infty$-функций на $\Omega$, зависящих только от $x_2, \ldots, x_m$ и имеющих компактный носитель в

$$\{x \mid |x_2| \leqslant 1 - n^{-1}, \ldots, |x_m| \leqslant 1 - n^{-1}\},$$

такая, что $\eta_n(x) \uparrow 1$ при $n \to \infty$. Тогда (112) имеет место для $g\eta_n$, а значит, и для $g$, поскольку $\partial_1(g\eta_n) = \eta_n \partial_1 g$.

Пусть $\{\psi_n\}$ — собственные функции $B$, заданные формулой (115), приведенной ниже. Заменяя $\sin(n_1 \pi x/2)$ на $\cos(n_1 \pi x/2)$, когда $n_1$ нечетно, и $\cos(n_1 \pi x/2)$ на $\sin(n_1 \pi x/2)$, когда $n_1$ четно, можно найти ортонормированное семейство $\{\varphi_n\}_{n_1 \geqslant 1}$, такое, что $\partial_1 \varphi_n = \pm(\pi/2) n_1 \psi_n$. Функции $\varphi_n$ и $\nabla\varphi_n$ непрерывны вплоть до границы и $\varphi_n(\pm 1, x_2, \ldots, x_m) = 0$. Используя (112), находим, что

$$\sum_n |(f, \psi_n)|^2 n_1^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_n |(\partial_1 f, \varphi_n)|^2 \leqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \|\partial_1 f\|_2^2,$$

поскольку $\varphi_n$ ортонормальны. Делая то же самое для всех других переменных, заключаем, что

$$\sum_n (1 + n^2) |(f, \psi_n)|^2 \leqslant \|f\|_2^2 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \|\nabla f\|_2^2,$$

и потому $f \in Q(\overline{B})$. ∎

На первый взгляд кажется удивительным, что оператор $-\Delta_N^\Omega$, который мы определили без всякого упоминания о $\partial\Omega$ или нормальных производных, удовлетворяет граничным условиям Неймана. Наглядно это можно понять несколькими способами. Поскольку $-\Delta_N^\Omega = DD^*$, то для того, чтобы $f$ попало в область определения $-\Delta_N^\Omega$, нужно, чтобы $D^* f$ было в области определения $D$, а эта область состоит из функций, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$.

Другой способ понимания особенно нагляден в одномерном случае, когда $\Omega = (a, b)$. Оператор $C$, определяемый квадратичной формой Неймана, должен быть самосопряженным расширением $-d^2/dx^2$ на $C_0^\infty(a, b)$, удовлетворяющим двум требованиям:

(i) для любой $C^\infty$-функции $f$ на $[a, b]$ должна существовать последовательность $f_n \in D(C)$, такая, что $f_n \to f$ в $H^1$;

(ii) для любой $f \in D(C)$ имеем $(f, Cf) = \|df/dx\|^2$.

Мы не можем подчинить $C$ граничным условиям Дирихле, ибо это привело бы к обращению в нуль $f_n$ в $a$ и $b$, что означало бы быстрый рост $d(f_n - f)/dx$ вблизи концевых точек. Это также привело бы к нарушению периодических граничных условий, связывающих концевые точки отрезка. В то же время условие (i) не нарушает граничных условий вида $df/dx + \alpha f = 0$, а условие (ii) приводит к тому, что $\alpha$ оказывается нулем (задача 127).

Главное достоинство изложенного подхода в том, что он позволяет найти собственные значения и собственные функции операторов $-\Delta_D$ и $-\Delta_N$ в явном виде. Для этого обозначим множество неотрицательных целых чисел через $\mathbb{Z}_+$, а множество положительных целых чисел через $\mathbb{Z}_{++}$, так что $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z}_{++} \cup \{0\}$. Тогда собственные значения и собственные функции оператора $-\Delta_D$ в $(-a, a)^m$ можно занумеровать точками из $\mathbb{Z}_{++}^m$, так что собственные функции будут иметь вид

$$\Phi_{n;\,a}(x) = a^{-m/2} \prod_{i=1}^{m} \varphi_{n_i}(x_i/a), \tag{113}$$

где

$$\varphi_k(x) = \cos(k\pi x/2), \quad k = 1, 3, 5, \ldots,$$
$$\varphi_k(x) = \sin(k\pi x/2), \quad k = 2, 4, 6, \ldots,$$

а собственные значения — вид

$$E_n(a) = \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 \sum_{i=1}^{m} n_i^2. \tag{114}$$

В случае $-\Delta_N$ в $(-a, a)^m$ собственные функции нумеруются точками из $\mathbb{Z}_+^m$:

$$\Psi_{n;\,a}(x) = a^{-m/2} \prod_{i=1}^{m} \psi_{n_i}(x_i/a), \tag{115}$$

где

$$\psi_k(x) = \sin(k\pi x/2), \quad k = 1, 3, 5, \ldots,$$
$$\psi_k(x) = \cos(k\pi x/2), \quad k = 2, 4, 6, \ldots,$$
$$\psi_k(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad k = 0,$$

а собственные значения по-прежнему имеют вид (114). Благодаря такой возможности явного перечисления собственных функций теорему Вейля для кубов можно доказать непосредственно.

***Предложение 2.*** Пусть $N_D(a, \lambda)$ (соответственно $N_N(a, \lambda)$) есть размерность спектрального проектора $P_{[0, \lambda)}$ оператора $-\Delta_D$ (соответственно $-\Delta_N$) на $(-a, a)^m$. Тогда для всех $a$, $\lambda$

$$|N_D(a, \lambda) - \tau_m(2a/2\pi)^m\lambda^{m/2}| \leqslant C(1+(a^2\lambda)^{(m-1)/2}), \tag{116}$$

$$|N_N(a, \lambda) - \tau_m(2a/2\pi)^m\lambda^{m/2}| \leqslant C(1+(a^2\lambda)^{(m-1)/2}), \tag{117}$$

где $\tau_m$ — объем единичного шара в $\mathbb{R}^m$, а $C$ — подходящая константа.

*Доказательство.* Начнем с двух замечаний. Первое просто объясняет, почему этот результат справедлив. В силу (114), $N_D$ (соответственно $N_N$) есть число точек в $Z^m_{++}$ (соответственно в $Z^m_+$), попадающих в шар радиуса $(2a/\pi)\lambda^{1/2}$. Для больших $\lambda$ эта величина приближенно равна объему соответствующего «октанта» в этом шаре, т. е. $2^{-m}\tau_m((2a/\pi)\lambda^{1/2})^m$. Ошибка будет порядка «поверхностных членов», т. е. порядка $(a^2\lambda)^{(m-1)/2}$. Второе замечание состоит в том, что $-\Delta_D$ в $(-1, 1)^m$ благодаря масштабному преобразованию унитарно эквивалентен $a^2(-\Delta_D)$ в $(-a, a)^m$, так что $N_D(a, \lambda) = N_D(1, a^2\lambda)$. Поэтому достаточно доказать оценки для случая $a=1$.

Пусть $S_\lambda$—шар радиуса $(2/\pi)\lambda^{1/2}$. Для каждого $n \in Z^m_{++} \cap S_\lambda$ единичный куб $\{x \mid n_i - 1 \leqslant x_i \leqslant n_i\}$ содержится в верхнем октанте $S_\lambda$, так что

$$N_D(\lambda) \leqslant \tau_m(2a/2\pi)^m\lambda^{m/2}. \tag{118}$$

Поскольку верхний октант $S_\lambda$ можно покрыть единичными кубами $\{x \mid n_i \leqslant x_i < n_i + 1\}$, где $n$ пробегает $Z^m_+ \cap S_\lambda$, получаем, что

$$\tau_m(2a/2\pi)^m\lambda^{m/2} \leqslant N_N(\lambda). \tag{119}$$

Наконец, ясно, что

$$N_N(\lambda) - N_D(\lambda) = \#\{S_\lambda \cap (Z^m_+ \setminus Z^m_{++})\} = \bigcup_{k=0}^{m-1} M_k(\lambda),$$

где

$$M_k(\lambda) = \{n \in Z^m_+ \cap S_\lambda \mid \text{точно } k \text{ из всех } n_i \text{ не равны } 0\}$$

(см. рис. XIII.10 в случае $m=3$). Так же как в полученной оценке $N_D$, величина $\#(M_k(\lambda))$ не превосходит $k$-мерного объема $\binom{m}{k}$ октантов в шаре радиуса $(2/\pi)\lambda^{1/2}$ в $p$-пространстве. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{m-1} \# M_k(\lambda) \leqslant \text{const}\left(\sum_{k=0}^{m-1} \lambda^{k/2}\right) \leqslant C(1+\lambda^{(m-1)/2}).$$

Таким образом,

$$N_N(\lambda) - N_D(\lambda) \leqslant C(1+\lambda^{(m-1)/2}). \tag{120}$$

Теперь ясно, что (118)—(120) влекут за собой (116) и (117). ▮

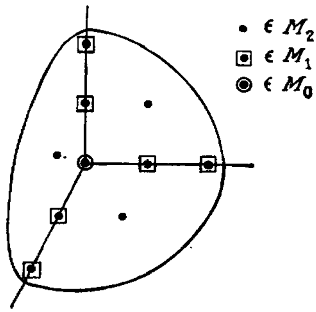


Рис. XIII.10. Множества $M_k$.

Благодаря двум специальным свойствам лапласианов Дирихле и Неймана, которые проявляются при добавлении границ Дирихле или Неймана, они полезны при изучении общих задач на собственные значения.

Рассмотрим непересекающиеся области $\Omega_1$, $\Omega_2$ и область $\Omega = (\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})^{\text{int}}$ типа тех, что изображены на рис. XIII.11. Ниже будет показано, что (1) вклад границ Дирихле и Неймана можно расцепить (предложение 3); (2) добавление границ Дирихле повышает, а границ Неймана уменьшает энергию (предложение 4). Для того чтобы уточнить смысл, в котором мы будем понимать расцепление, сделаем несколько предварительных замечаний о прямых суммах самосопряженных операторов.


Рис. XIII.11. Добавление границы.

Пусть $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$. Пусть $A_1$ — самосопряженный оператор в $\mathscr{H}_1$, $A_2$ — самосопряженный оператор в $\mathscr{H}_2$. Пусть $A$ — оператор с областью определения $D(A) = \{\langle\varphi, \psi\rangle \mid \varphi \in D(A_1),\ \psi \in D(A_2)\}$, заданный правилом действия $A\langle\varphi, \psi\rangle = \langle A_1\varphi, A_2\psi\rangle$. В таком случае мы будем писать $A = A_1 \oplus A_2$. Такой оператор обладает рядом свойств, доказательство которых (на основе спектральной теоремы и/или основного критерия самосопряженности) мы оставляем читателю (задача 133):

(1) $A_1 \oplus A_2$ самосопряжен.

(2) Если $D_1$ — существенная область определения оператора $A_1$, а $D_2$ — оператора $A_2$, то

$$D_1 \oplus D_2 \equiv \{\langle\varphi, \psi\rangle \mid \varphi \in D_1,\ \psi \in D_2\}$$

— существенная область определения $A_1 \oplus A_2$.

(3) $Q(A_1 \oplus A_2) = Q(A_1) \oplus Q(A_2)$, и если $\langle\varphi, \psi\rangle \in Q(A_1) \oplus Q(A_2)$,

то

$$(\langle\varphi,\ \psi\rangle,\ (A_1 \oplus A_2)\langle\varphi,\ \psi\rangle) = (\varphi,\ A_1\varphi) + (\psi,\ A_2\psi).$$

(4) Для любого борелева подмножества $\Omega \subset \mathbb{R}$

$$P_{\Omega}(A_1 \oplus A_2) = P_{\Omega}(A_1) \oplus P_{\Omega}(A_2).$$

(5) Если $N(\lambda,\ A) = \dim P_{(-\infty,\ \lambda)}(A)$, то

$$N(\lambda,\ A_1 \oplus A_2) = N(\lambda,\ A_1) + N(\lambda,\ A_2).$$

***Предложение 3.*** Пусть $\Omega_1$ и $\Omega_2$ — непересекающиеся открытые множества, такие, что $L^2(\Omega_1 \cup \Omega_2) = L^2(\Omega_1) \oplus L^2(\Omega_2)$. При таком разложении

$$-\Delta_D^{\Omega_1 \cup \Omega_2} = -\Delta_D^{\Omega_1} \oplus -\Delta_D^{\Omega_2}, \qquad -\Delta_N^{\Omega_1 \cup \Omega_2} = -\Delta_N^{\Omega_1} \oplus -\Delta_N^{\Omega_2}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим случай Дирихле; случай Неймана аналогичен. Пусть задана $f \in C_0^\infty(\Omega_1 \cup \Omega_2)$. Положим $f_i = f \upharpoonright \Omega_i$. Тогда $f_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$ и

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \overline{\nabla f} \cdot \nabla g\, d^m x = \int_{\Omega_1} \overline{\nabla f_1} \cdot \nabla g_1\, d^m x + \int_{\Omega_2} \overline{\nabla f_2} \cdot \nabla g_2\, d^m x.$$

Поскольку это соотношение продолжается на функции из области определения замыканий квадратичных форм, эти квадратичные формы равны, что дает искомый результат. ∎

Примером применения этого предложения служит такое

***Следствие.*** Пусть $N_D(\Omega, \lambda)$ (соответственно $N_N(\Omega, \lambda)$) — размерность спектрального проектора $P_{[0,\ \lambda)}$ оператора $-\Delta_D^\Omega$ (соответственно $-\Delta_N^\Omega$). Тогда если $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ не пересекаются, то

$$N_D\left(\bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i,\ \lambda\right) = \sum_{i=1}^{k} N_D(\Omega_i,\ \lambda), \qquad N_N\left(\bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i,\ \lambda\right) = \sum_{i=1}^{k} N_N(\Omega_i,\ \lambda).$$

Для того чтобы сформулировать свойства монотонности, мы несколько расширим смысл соотношения $A \leqslant B$, введенного в § 2.

***Определение.*** Пусть $A$ и $B$ — два самосопряженных неотрицательных оператора, из которых $A$ определен на плотном множестве в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а $B$ определен на плотном множестве в гильбертовом подпространстве $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}$. Будем писать $0 \leqslant A \leqslant B$ тогда и только тогда, когда

(i) $Q(A) \supset Q(B)$;
(ii) $0 \leqslant (\psi,\ A\psi) \leqslant (\psi,\ B\psi)$ для любого $\psi \in Q(B)$.

Суть этого определения в том, что благодаря принципу минимакса (в форме теоремы XIII.2) мы сразу же получаем следующий результат.

***Лемма.*** Если $0 \leqslant A \leqslant B$, то

(a) $\dim P_{[0,\lambda]}(A) \geqslant \dim P_{[0,\lambda]}(B)$ при всех $\lambda > 0$;

(b) $\mu_n(A) \leqslant \mu_n(B)$ для всех $n$, где $\mu_n$ задается принципом минимакса.

*Доказательство.* Поскольку $Q(A)$ содержит больше пробных функций, чем $Q(B)$, то

$$\min_{\substack{\varphi \in Q(A) \\ \varphi \perp \psi_1, \ldots, \psi_n}} (\varphi, A\varphi) \leqslant \min_{\substack{\varphi \in Q(B) \\ \varphi \perp \psi_1, \ldots, \psi_n}} (\varphi, A\varphi) \leqslant \min_{\substack{\varphi \in Q(B) \\ \varphi \perp \psi_1, \ldots, \psi_n}} (\varphi, B\varphi),$$

и справедливость (b) ясна; (a) вытекает из (b) и принципа минимакса. ∎

***Предложение 4.*** (a) Если $\Omega \subset \Omega'$, то $0 \leqslant -\Delta_D^{\Omega'} \leqslant -\Delta_D^{\Omega}$.

(b) Для любой области $\Omega$ имеем $0 \leqslant -\Delta_N^{\Omega} \leqslant -\Delta_D^{\Omega}$.

(c) Пусть $\Omega_1$, $\Omega_2$ — непересекающиеся открытые подмножества открытого множества $\Omega$, такие, что $(\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})^{\text{int}} = \Omega$ и мера $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ равна нулю (см. рис. XIII.11). Тогда

$$0 \leqslant -\Delta_D^{\Omega} \leqslant -\Delta_D^{\Omega_1 \cup \Omega_2}, \quad 0 \leqslant -\Delta_N^{\Omega_1 \cup \Omega_2} \leqslant -\Delta_N^{\Omega}.$$

*Доказательство.* (a) Это утверждение нужно понимать в том смысле, что любую $f \in L^2(\Omega)$ можно рассматривать как элемент $L^2(\Omega')$, продолжая ее на $\Omega' \setminus \Omega$ нулем. Тогда $C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\Omega')$ и $-\Delta_D^{\Omega'} \restriction C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega) = -\Delta_D^{\Omega}$ в смысле квадратичных форм, так что (a) доказано.

(b) немедленно вытекает из включения $C_0^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.

(c) $C_0^\infty(\Omega_1 \cup \Omega_2) \subset C_0^\infty(\Omega)$, поскольку $\Omega \supset \Omega_1 \cup \Omega_2$ (в самом деле, первая часть (c) есть частный случай (a)). С другой стороны, если $f \in H^1(\Omega)$, то ее сужение на $\Omega_1 \cup \Omega_2$ лежит в $H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2)$. Более того, поскольку мера $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ равна нулю,

$$\int_{\Omega} |\nabla f|^2 d^m x = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} |\nabla f|^2 d^m x. \ ∎$$

Основной смысл неравенств пункта (c) в том, что, добавляя дополнительную границу Дирихле $\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$, мы налагаем дополнительное условие на функции (они должны обращаться в нуль на добавочной границе), и потому собственные значения растут. Но в случае Неймана дополнительное условие на функции возникает после того, как мы *убираем* дополнительную границу, ибо функции должны стать гладкими после того, как ликвидировано граничное условие.

В качестве первого приложения мы докажем результат Вейля об асимптотике плотности собственных значений оператора $-\Delta_D^{\Omega}$ для достаточно хороших областей $\Omega$.

*Определение.* Назовем **стандартным $2^{-n}$-кубом в $\mathbb{R}^m$** куб вида

$$\left[\frac{a_1}{2^n},\ \frac{a_1+1}{2^n}\right)\times\ldots\times\left[\frac{a_m}{2^n},\ \frac{a_m+1}{2^n}\right),$$

где $a_1, \ldots, a_m$ — целые числа. При заданном множестве $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ обозначим через $W_n^-(\Omega)$ объем стандартных $2^{-n}$-кубов, содержащихся в $\Omega$, а через $W_n^+(\Omega)$ объем стандартных $2^{-n}$-кубов, пересекающих $\Omega$. В итоге, если $\Omega$ измеримо по Лебегу, то

$$W_n^-(\Omega)\leqslant W_{n+1}^-(\Omega)\leqslant\mu(\Omega)\leqslant W_{n+1}^+(\Omega)\leqslant W_n^+(\Omega). \qquad (121)$$

Предел $\lim W_n^-(\Omega)=W_\infty^-(\Omega)$ (соответственно $\lim W_n^+(\Omega)=W_\infty^+(\Omega)$) назовем **внутренним** (соответственно **внешним**) **жордановым объемом** множества $\Omega$. Если $W_\infty^+(\Omega)=W_\infty^-(\Omega)$, то будем говорить, что множество $\Omega$ **имеет жорданов объем**, и называть $W(\Omega)=W_\infty^\pm(\Omega)$ его **жордановым объемом.**

Отметим, что, в силу (121), если $\Omega$ измеримо по Лебегу и имеет жорданов объем, то $W(\Omega)=\mu(\Omega)$. Можно также доказать, что любое имеющее жорданов объем множество измеримо по Лебегу (задача 128).

*Теорема XIII.78.* Пусть $\Omega$ — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^m$. Пусть $N_{\mathrm{D}}(\Omega, \lambda)$ — размерность спектрального проектора $P_{[0,\lambda)}$ оператора $-\Delta_{\mathrm{D}}^{\Omega}$. Тогда если $\Omega$ имеет жорданов объем, то

$$\lim_{\lambda\to\infty} N_{\mathrm{D}}(\Omega, \lambda)/\lambda^{m/2}=\frac{\tau_m}{(2\pi)^m}W(\Omega).$$

*Доказательство.* Мы докажем, что для любого $n$

$$\varlimsup_{\lambda\to\infty} N_{\mathrm{D}}(\Omega, \lambda)/\lambda^{m/2}\leqslant(2\pi)^{-m}\tau_m W_n^+(\Omega), \qquad (122a)$$

$$\varliminf_{\lambda\to\infty} N_{\mathrm{D}}(\Omega, \lambda)/\lambda^{m/2}\geqslant(2\pi)^{-m}\tau_m W_n^-(\Omega), \qquad (122b)$$

откуда вытекает нужный результат.

Пусть $\Omega_n^\pm$ — объединение кубов, из объемов которых складывается $W_n^\pm(\Omega)$, а $\left\{C_{n,\alpha}^\pm\right\}$ — внутренности самих этих кубов, так что $\overline{\Omega}_n^\pm=\bigcup_\alpha \overline{C}_{n,\alpha}^\pm$. В силу пунктов (a) и (c) предложения 4,

$$-\Delta_{\mathrm{D}}^{\Omega}\leqslant-\Delta_{\mathrm{D}}^{\Omega_n^-}\leqslant-\Delta_{\mathrm{D}}^{\cup C_{n,\alpha}^-}=\bigoplus_\alpha-\Delta_{\mathrm{D}}^{C_{n,\alpha}^-},$$

где последнее равенство основано на предложении 3. Таким образом, в силу предложения 4,

$$N_{\mathrm{D}}(\Omega, \lambda)\geqslant\sum_\alpha N_{\mathrm{D}}(C_{n,\alpha}^-, \lambda)=(\#\alpha)\,N_{\mathrm{D}}(2^{-n-1}, \lambda)=$$
$$=W_n^-(\Omega)\,2^{nm}N_{\mathrm{D}}(2^{-n-1}, \lambda),$$

а в силу предложения 2,

$$\lim_{\lambda\to\infty} N_{\mathrm{D}}(2^{-n-1}, \lambda)\,\lambda^{-m/2} = \tau_m (2\pi)^{-m} 2^{-nm},$$

так что справедливо (122b). Точно так же, в силу пунктов (а) — (с) предложения 4,

$$-\Delta_{\mathrm{D}}^{\Omega} \geqslant -\Delta_{\mathrm{D}}^{\Omega_n^+} \geqslant -\Delta_{\mathrm{N}}^{\Omega_n^+} \geqslant -\Delta_{\mathrm{N}}^{\cup C_{n,\alpha}^+} = \bigoplus_{\alpha} -\Delta_{\mathrm{N}}^{C_{n,\alpha}^+},$$

и (122а) получается повторением только что сделанных оценок. ∎

Теперь структура метода вилки Дирихле — Неймана ясна. Используя монотонность оценок при добавлении границ Дирихле или Неймана и возможность расцепления вкладов от разных кубов, мы сводим задачу к оценке вклада одного куба, которую решаем с помощью предложения 2. Фазовый объем входит в оценку потому, что он входит в формулы (116) и (117). В итоге, например, справедлива

***Теорема XIII.79.*** Пусть $V$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}^m$ с компактным носителем. Пусть $N(\lambda)$ — размерность спектрального проектора $P_{(-\infty,\,0)}$ оператора $-\Delta+\lambda V$. Тогда

$$\lim_{\lambda\to\infty} N(\lambda)/\lambda^{m/2} = \tau_m (2\pi)^{-m} \int_{\{x \mid V(x) < 0\}} (-V(x))^{m/2}\, d^m x.$$

*Доказательство.* Пусть $\{C_{n,\alpha}\}_\alpha$ для каждого $n$ — набор всех стандартных $2^{-n}$-кубов. Определим $V_n^+$ (соответственно $V_n^-$) как кусочно постоянную на каждом $C_{n,\alpha}$ функцию со значением, равным $\max\{V(x) \mid x \in C_{n,\alpha}\}$ (соответственно $\min\{V(x) \mid x \in C_{n,\alpha}\}$). Докажем, что при каждом $n$

$$\varlimsup_{\lambda\to\infty} N(\lambda)/\lambda^{m/2} \leqslant \tau_m (2\pi)^{-m} \int_{\{x \mid V_n^-(x) \leqslant 0\}} (-V_n^-(x))^{m/2}\, d^m x, \quad (123a)$$

$$\varliminf_{\lambda\to\infty} N(\lambda)/\lambda^{m/2} \geqslant \tau_m (2\pi)^{-m} \int_{\{x \mid V_n^+(x) \leqslant 0\}} (-V_n^+(x))^{m/2}\, d^m x. \quad (123b)$$

Поскольку ввиду непрерывности $V$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{x \mid V_n^{\pm}(x) \leqslant 0\}} (-V_n^{\pm}(x))^{m/2}\, d^m x = \int_{\{x \mid V(x) \leqslant 0\}} (-V(x))^{m/2}\, d^m x,$$

неравенства (123) доказывают теорему.

Предположим, что $\operatorname{supp} V$ лежит в кубе $(-k, k)^m$ с целым $k$. Пусть $-\Delta_+^n$ (соответственно $-\Delta_-^n$) — лапласиан на всем $\mathbb{R}^m$, но с граничными условиями Дирихле (соответственно Неймана) на границах всех $2^{-n}$-кубов в $(-k, k)^m$ (рис. XIII.12). Поскольку $V_n^- \leqslant V \leqslant V_n^+$ и $-\Delta_-^n \leqslant -\Delta \leqslant -\Delta_+^n$, то, в силу предложения 4, имеем

$$-\Delta_-^n + V_n^- \leqslant -\Delta + V \leqslant -\Delta_+^n + V_n^+,$$

так что для доказательства (123) нужно доказать только равенство

$$\lim_{\lambda \to \infty} N_n^{\pm}(\lambda)/\lambda^{m/2} = \tau_m (2\pi)^{-m} \int\limits_{\{x \mid V_n^{\pm}(x) \leqslant 0\}} (-V_n^{\pm}(x))^{m/2} d^m x \qquad (124)$$

(смысл обозначения $N_n^{\pm}(\lambda)$ очевиден). Но благодаря возможности расцепить границы Неймана и Дирихле, $-\Delta_{\pm}^n + \lambda V_n^{\pm}$ есть прямая сумма операторов вида $-\Delta_{\mathrm{D}}^{\Omega} + \lambda c$ или $-\Delta_{\mathrm{N}}^{\Omega} + \lambda c$ с некоторыми

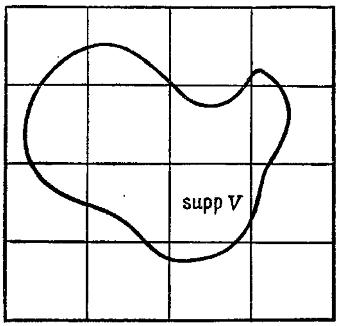


Рис. XIII.12.

постоянными $c$ и кубами $\Omega$ и положительного оператора, задаваемого лапласианом на $\mathbb{R}^m \diagdown (-k, k)^m$. Поскольку для любого положительного оператора $A$

$$\dim(\operatorname{Ran} P_{(-\infty, 0)}(A + \lambda c)) = \dim(\operatorname{Ran} P_{[0, -\lambda c)}(A)),$$

(124) вытекает из предложения 2. ∎

Методом, использованным при доказательстве теорем о пределах, нельзя охватить потенциалы, которые не являются хотя бы локально ограниченными. Однако сами утверждения этих теорем можно распространить на негладкие потенциалы $V$, приближая их потенциалами из класса $C_0^\infty$. Основной пункт доказательств при использовании таких приближений состоит в применении оценок величины $N(V)$ с правильной зависимостью от константы взаимодействия, подобных оценке Цвикеля — Либа — Розенблюма (теорема XIII.12).

***Теорема XIII.80.*** Для любого $V \in L^{m/2}(\mathbb{R}^m)$, $m \geqslant 3$,

$$\lim_{\lambda \to \infty} N(\lambda V)/\lambda^{m/2} = \tau_m (2\pi)^{-m/2} \int_{\{x \mid V(x) < 0\}} (-V(x))^{m/2} d^m x.$$

*Доказательство.* Пусть $A$ — произвольный самосопряженный оператор и $\tilde{N}(A) = \dim(E_{(-\infty, 0)}(A))$, где $\{E_\Omega(A)\}$ — спектральное семейство оператора $A$. Прежде всего мы утверждаем, что

$$\tilde{N}(A+B) \leqslant \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B) \tag{125}$$

для любых самосопряженных ограниченных снизу операторов $A$ и $B$, для которых $Q(A) \cap Q(B)$ плотно и $A+B$ есть сумма в смысле форм. Неравенство (125) вытекает из принципа минимакса: если $\tilde{N}(A)$, $\tilde{N}(B) < \infty$, то пусть $\psi_1, \ldots, \psi_{\tilde{N}(A)}$ — базис подпространства $E_{(-\infty, 0)}(A)$, а $\psi_{\tilde{N}(A)+1}, \ldots, \psi_{\tilde{N}(A)+\tilde{N}(B)}$ — базис в $E_{(-\infty, 0)}(B)$. Если $\varphi \in Q(A) \cap Q(B)$ лежит в $[\psi_1, \ldots, \psi_{\tilde{N}(A)+\tilde{N}(B)}]^\perp$, то $(\varphi, A\varphi) \geqslant \geqslant 0$ и $(\varphi, B\varphi) \geqslant 0$, так что, согласно принципу минимакса, $\mu_{\tilde{N}(A)+\tilde{N}(B)+1}(A+B) \geqslant 0$. Это доказывает (125).

Фиксируем малое $\varepsilon > 0$. Выберем $V_k \in C_0^\infty$ так, чтобы $V_k \to V$ в $L^{m/2}(\mathbb{R}^m)$. Тогда

$$-\Delta + \lambda V = [-(1-\varepsilon)\Delta + \lambda V_k] + [\varepsilon(-\Delta) + \lambda(V - V_k)],$$

так что, в силу (125) и равенства $\tilde{N}(-\alpha\Delta + V) = N(\alpha^{-1}V)$,

$$\begin{aligned} N(\lambda V) &\leqslant N((1-\varepsilon)^{-1}\lambda V_k) + N(\varepsilon^{-1}\lambda(V - V_k)) \leqslant \\ &\leqslant N((1-\varepsilon)^{-1}\lambda V_k) + c\varepsilon^{-m/2}\lambda^{m/2}\|V - V_k\|_{m/2}^{m/2}, \end{aligned}$$

где надо воспользоваться формулой (10). В силу теоремы о пределе, уже доказанной для $V_k \in C_0^\infty$,

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{\lambda \to \infty}} N(\lambda V)/\lambda^{m/2} \leqslant (1-\varepsilon)^{-m/2} (2\pi)^{-m/2} \tau_m \int_{\{x \mid V_k(x) < 0\}} (-V_k(x))^{m/2} d^m x + \\ + c\varepsilon^{-m/2}\|V - V_k\|_{m/2}^{m/2}. \end{aligned}$$

Взяв $k \to \infty$, а затем устремив $\varepsilon$ к нулю, найдем, что

$$\overline{\lim_{\lambda \to \infty}} N(\lambda V)/\lambda^{m/2} \leqslant (2\pi)^{-m/2} \tau_m \int_{\{x \mid V(x) < 0\}} (-V(x))^{m/2} d^m x. \tag{126}$$

Далее,

$$-\Delta + \lambda V_k = [-(1-\varepsilon)\Delta + \lambda V] + [\varepsilon(-\Delta) + \lambda(V_k - V)],$$

так что с помощью теоремы о пределе и (10), действуя, как и выше, получим

$$(2\pi)^{-m/2}\tau_m \int\limits_{\{x \mid V_k(x) \leqslant 0\}} (-V_k(x))^{m/2}\, d^m x \leqslant$$
$$\leqslant (1-\varepsilon)^{-m/2}\Big[\varliminf_{\lambda \to \infty} N(\lambda V)/\lambda^{m/2}\Big] + c\varepsilon^{-m/2}\, \|V - V_k\|_{m/2}^{m/2}.$$

Опять взяв $k \to \infty$, а затем $\varepsilon \to 0$, получим

$$(2\pi)^{-m/2}\tau_m \int\limits_{\{x \mid V(x) \leqslant 0\}} (-V(x))^{m/2}\, d^m x \leqslant \varliminf_{\lambda \to \infty} N(\lambda V)/\lambda^{m/2}. \tag{127}$$

Теперь (126) и (127) доказывают теорему. ∎

При выводе нашего следующего результата, являющегося ответом на вопрос, поднятый в § 14, мы наложим на $V$ более сильные требования, чем это совершенно необходимо.

***Теорема XIII.81.*** Пусть $V$ — измеримая функция на $\mathbb{R}^m$ ($m \geqslant 2$), удовлетворяющая неравенствам

$$c_1(|x|^\beta - 1) \leqslant V(x) \leqslant c_2(|x|^\beta + 1), \tag{128}$$
$$|V(x) - V(y)| \leqslant c_3[\max\{|x|, |y|\}]^{\beta-1}|x-y| \tag{129}$$

при некоторых $\beta > 1$ и постоянных $c_1$, $c_2$, $c_3 > 0$. Пусть $N(E) = \dim \operatorname{Ran} P_{(-\infty, E)}$ для $-\Delta + V$, и пусть

$$g(E) = \tau_m (2\pi)^{-m} \int\limits_{\{x \mid V(x) \leqslant E\}} (E - V(x))^{m/2}\, d^m x. \tag{130}$$

Тогда

$$\lim_{E \to \infty} N(E)/g(E) = 1.$$

*Доказательство.* Пусть $\{\Omega_\alpha\}$ — семейство всех единичных кубов, вершины которых лежат в узлах целочисленной решетки. Пусть $V^+$ (соответственно $V^-$) — кусочно постоянная функция со значениями $\sup_{\Omega_\alpha} V(x)$ $\big($соответственно $\inf_{\Omega_\alpha} V(x)\big)$ внутри кубов $\Omega_\alpha$. Пусть $-\Delta^+$ (соответственно $-\Delta^-$) — лапласиан с граничными условиями Дирихле (соответственно Неймана) на гранях кубов $\Omega_\alpha$. Пусть $N_\pm(E) = \dim \operatorname{Ran} P_{(-\infty, E)}$ для $-\Delta^\pm + V^\pm$ и $g_\pm(E)$ задано формулой (130), где $V$ заменено на $V^\pm$. Тогда использование вилки Дирихле — Неймана приводит к оценке

$$N_-(E) \geqslant N(E) \geqslant N_+(E). \tag{131}$$

С помощью (128) легко убедиться в том, что

$$c_3(E^\gamma - 1) \leqslant g_+(E) \leqslant g(E) \leqslant g_-(E) \leqslant c_4(E^\gamma + 1), \tag{132}$$

где $\gamma = m/2 + m\beta^{-1}$. Более того, в силу (129) и оценки

$$|(E-a)^{m/2}-(E-b)^{m/2}| \leqslant \frac{m}{2} \max[(E-a)^{m/2-1}, (E-b)^{m/2-1}]\,|b-a|,$$

имеем

$$|g_-(E) - g_+(E)| \leqslant c_5 (E^{\gamma-\beta^{-1}}+1). \tag{133}$$

В силу (131)—(133), доказательство теоремы будет завершено, если мы сможем доказать, что

$$\lim_{E\to\infty} N_\pm(E)/g_\pm(E) = 1. \tag{134}$$

Благодаря свойству расцепляемости как условий Дирихле, так и условий Неймана имеем

$$N_\pm(E) = \sum_{\{\alpha \mid V_\pm \restriction \Omega_\alpha < E\}} \eta_\pm (E - V_\pm \restriction \Omega_\alpha),$$

где $\eta_+(\lambda)$ (соответственно $\eta_-(\lambda)$) есть $\dim \operatorname{Ran} P_{[0,\lambda)}$ для $-\Delta$ в единичном кубе с граничными условиями Дирихле (соответственно Неймана). В силу предложения 2,

$$\left| \eta_\pm(\lambda) - \frac{\tau_m}{(2\pi)^m} \lambda^{m/2} \right| \leqslant c_6 (1+\lambda^{(m-1)/2}).$$

Поскольку

$$\sum_{\{\alpha \mid V_\pm \restriction \Omega_\alpha < E\}} \tau_m (2\pi)^{-m} (E - V_\pm \restriction \Omega_\alpha)^{m/2} = g_\pm(E),$$

остается только проверить, что остаточный член

$$\varepsilon_\pm(E) \equiv \sum_{\{\alpha \mid V_\pm \restriction \Omega_\alpha < E\}} [1+(E-V_\pm \restriction \Omega_\alpha)^{(m-1)/2}]$$

мал по сравнению с $g_\pm(E)$. Но

$$\varepsilon_\pm(E) \leqslant (1+E^{(m-1)/2}) \operatorname{vol}\{x \mid V_\pm(x) \leqslant E\},$$

а в силу (128) этот объем ограничен величиной $\mathrm{const}(1+E^{1/\beta})^m$, так что

$$\varepsilon_\pm(E) \leqslant c_6 (1+E^{\gamma-1/2}),$$

и потому, в силу (132), $\varepsilon_\pm(E)/g_\pm(E) \to 0$. Это доказывает (134), а с ним и теорему. ∎

После небольших видоизменений теорему и ее доказательство можно распространить на случай $m = 1$.

Похожими методами можно получить следующий результат (задача 131), оценивающий скорость роста $\dim \operatorname{Ran} P_{(-\infty, E]}$ для тех операторов Шредингера, для которых мы в § 3 доказали, что $\dim \operatorname{Ran} P_{(-\infty, 0]} = \infty$.

***Теорема XIII.82.*** Пусть $V$ — измеримая функция на $\mathbb{R}^m$, удовлетворяющая неравенствам

$$-c_1(|x|+1)^{-\beta} \leqslant V(x) \leqslant -c_2(|x|+1)^{-\beta},$$
$$|V(x)-V(y)| \leqslant c_3[\min\{|x|, |y|\}+1]^{-\beta-1}|x-y|$$

для некоторых $\beta < 2$ и $c_1, c_2, c_3 > 0$. Пусть $N(E) = \dim \operatorname{Ran} P_{(-\infty, -E)}$ для $-\Delta+V$ и

$$g(E) = \tau_m (2\pi)^{-m} \int\limits_{\{x \mid V(x) < -E\}} (-E-V(x))^{m/2}\, d^m x.$$

Тогда

$$\lim_{E \uparrow 0} N(E)/g(E) = 1.$$

Отметим также (задача 132), что асимптотическое поведение $N(E)$ не меняется при замене $-\Delta+V$ на $-\Delta+V+W$, где $W$ таков, что $-\Delta+\lambda W$ имеет только конечное число связанных состояний с отрицательными собственными значениями при всех $\lambda$. Например, это так, если $W$ лежит в $C_0^\infty$ (задача 20) или в $L^{m/2}$ с $m \geqslant 3$.

Применяя методы, совершенно отличные от обсуждаемых в настоящем разделе, иногда можно получить более детальные сведения об асимптотиках собственных значений. Вот типичный результат:

***Теорема XIII.82$^1/_2$.*** Пусть $H_0$ — оператор $-d^2/dx^2$ в $L^2(0, 1)$ с граничными условиями $u(0)=u(1)=0$. Пусть $E_n(V)$ есть $n$-е собственное значение $H_0+V$. Тогда для $V \in L^\infty(0, 1)$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ E_n(V) - (n\pi)^2 - \int_0^1 V(x)\,dx \right\} = 0.$$

*Доказательство.* Пусть $V \in L^\infty$ и $\psi_n(a)$ — собственный вектор $H(a) \equiv H_0 + aV$, отвечающий собственному значению $E_n(a) = E_n(aV)$. Из результатов § XII.2 вытекает, что, поскольку $H(a)$ обладает только простыми собственными значениями $E_n(a)$, они являются вещественно аналитическими функциями. В частности, в силу явных формул § XII.1,

$$\frac{dE_n(a)}{da} = (\psi_n(a), V\psi_n(a)),$$

$$\frac{d^2E_n(a)}{da^2} = -(V\psi_n(a), R_n(a)V\psi_n(a)),$$

где $R_n(a)$ — оператор вида $(I-P_n(a))(H(a)-E_n(a))^{-1}$, $P_n$ — проектор на $\psi_n$. Из первой формулы получаем $|E_n(1)-E_n(0)| \leqslant \|V\|_\infty$, и в частности, поскольку $E_n(0)=(n\pi)^2$, имеем

$$|E_n(a) - E_{n-1}(a)| \geqslant (2n-1)\pi^2 - 2\|V\|_\infty a.$$

Отсюда для некоторого $N_0$ и всех $a \in (0, 1)$

$$R_n(a) = \max(|E_n(a) - E_{n-1}(a)|^{-1}, \ |E_n(a)| - E_{n+1}(a)|^{-1}) \leqslant cn^{-1}$$

при всех $n \geqslant N_0$. Таким образом, для таких $a$ и $n$ имеет место оценка $d^2E_n(a)/da^2 \leqslant c\|V\|_\infty^2 n^{-1}$, так что по формуле остаточного члена в разложении Тейлора

$$\left| E_n(1) - (n\pi)^2 - \frac{dE_n}{da}(0) \right| \leqslant \frac{c}{2} \|V\|_\infty^2 n^{-1}.$$

Поскольку $\psi_n(0) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$, мы заключаем, что $dE_n/da = = \tilde{V}(0) - {}^1/_2\tilde{V}(2n) - {}^1/_2\tilde{V}(-2n)$ при $a=0$, где $\tilde{V}(m) = \int\limits_0^1 e^{-im\pi x}V(x)\,dx$.

Но тогда по лемме Римана—Лебега $\tilde{V}(m) \to 0$ при $m \to \infty$, так что $dE_n/da \to \tilde{V}(0)$ при $n \to \infty$. ∎

Заметим, что ошибка $E_n(V) - (n\pi)^2 - \int\limits_0^1 V(x)\,dx$ есть сумма двух членов, один из которых равен $O(n^{-1})$, а другой $\operatorname{Re}\tilde{V}(2n)$. Для гладких $V$ этот член также равен $O(n^{-1})$, но в общем случае $\sup\limits_{n \geqslant m} \tilde{V}(2n)$ может убывать как угодно медленно. Полученный результат существенно зависит от одномерности задачи, ибо только в одномерном случае расстояние между собственными значениями $H_0$ растет при $n \to \infty$.

## XIII.16. Операторы Шредингера с периодическими потенциалами

В этом разделе изучаются операторы Шредингера $-\Delta + V$ с периодической функцией $V$, т. е. предполагается, что для некоторого базиса $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^n$ потенциал $V$ удовлетворяет соотношению

$$V(\mathbf{x} + \mathbf{a}_i) = V(\mathbf{x}). \tag{135}$$

Как объясняется дальше, такие операторы играют важную роль в физике твердого тела.

Мы уже знаем, что спектральные свойства операторов Шредингера сильно зависят от поведения $V$ на бесконечности, и нам известны три различных класса шредингеровых операторов. Во-первых, это операторы, у которых $V(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Их спектральные свойства было проще всего установить: существенный спектр таких операторов пуст (теорема XIII.16). Другой простейший класс состоял из «одночастичных операторов Шредингера», у которых $V(x) \to 0$ при $x \to \infty$, по крайней мере в