сталле действует потенциал $V+W$, где V периодичен, а W, представляющий различие между примесью и атомом, который она замещает, имеет короткий радиус действия. Можно ожидать, что электроны в таком кристалле рассеиваются на примеси в соответствии с обычной теорией рассеяния.

Теорема XIII.102. Пусть V — периодический потенциал на $\mathbb{R}^3$, квадратично интегрируемый по элементарной ячейке. Пусть W — потенциал из $L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^3)$. Тогда

$$\Omega^\pm = \operatorname*{s-lim}_{t \to \mp\infty} \exp[it(H_0+V+W)] \exp[-it(H_0+V)]$$

существуют и обладают одинаковой областью значений, так что S-матрица унитарна.

Доказательство. Поскольку спектр H_0+V состоит лишь из абсолютно непрерывной части (теорема XIII.100), достаточно доказать, что $(-\Delta+V+W+c)^{-1}-(-\Delta+V+c)^{-1}$ при некотором c лежит в классе операторов со следом, ибо тогда можно использовать теорию Като — Бирмана (теорема XI.9). Выберем c так, чтобы $-\Delta+V+W \geqslant -c+1$, $-\Delta+V \geqslant -c+1$. Поскольку V и W ограничены относительно $-\Delta$ с нулевой относительной гранью, то

$$\begin{aligned}
&(-\Delta+V+W+c)^{-1}-(-\Delta+V+c)^{-1}= \\
&= -(-\Delta+V+W+c)^{-1} W (-\Delta+V+c)^{-1}= \\
&= -[(-\Delta+V+W+c)^{-1}(-\Delta+1)][(-\Delta+1)^{-1} W (-\Delta+1)^{-1}]\times \\
&\qquad \times[(-\Delta+1)(-\Delta+V+c)^{-1}].
\end{aligned}$$

Первый и третий множители суть ограниченные операторы благодаря относительной ограниченности; средний множитель лежит в классе операторов со следом (см. теорему XI.20), поскольку $W \in L^1 \cap L^2$. Следовательно, разность резольвент также имеет конечный след. ∎

XIII.17. Введение в спектральную теорию несамосопряженных операторов

До сих пор мы изучали спектральные свойства главным образом самосопряженных операторов. В этом последнем разделе мы хотим кое-что сказать о спектральном анализе компактных операторов, которые не обязательно самосопряжены. В § VI.5 мы уже видели, что если A — компактный оператор, то $\sigma(A)$ состоит из нуля и множества отличных от нуля чисел $\{\lambda_i\}_{i=1}^{N(A)}$, где $N(A)$ конечно или счетно. Единственной точкой накопления спектра может служить лишь 0. Более того, каждое число λ_i есть собственное значение, и, в силу утверждений § XII.1 и

XII.2, каждый спектральный проектор

$$P_i = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda-\lambda_i|=\varepsilon} (A-\lambda)^{-1}\, d\lambda$$

конечномерен и $\operatorname{Ran} P_i = \{\psi \mid (A-\lambda_i)^n \psi = 0$ для некоторого $n\}$. Назовем вектор ψ **обобщенным собственным вектором**, если $(A-\lambda)^n \psi = 0$ для некоторого $n \geqslant 1$. Возникает ряд естественных вопросов.

(1) Порождают ли собственные и обобщенные собственные векторы оператора A (векторы из области значений некоторых P_i или решения уравнений $(A-\lambda_i)^n \psi = 0$ для некоторых n) все пространство $\mathscr{H}$, т. е. образуют ли они тотальное подмножество?

(2) Предположим, что A лежит в классе $\mathscr{I}_1$ операторов со следом, введенном в § VI.6. Пусть $\lambda_i(A)$ — все ненулевые собственные значения A. Будем повторять каждое $\lambda_i(A)$ столько раз, какова его **алгебраическая кратность**, по определению равная $\dim P_i$. Правда ли, что

$$\operatorname{Tr}(A) = \sum_{j=1}^{N(A)} \lambda_j(A)? \tag{177}$$

(3) В силу мероморфной версии теоремы Фредгольма (теорема XIII.13), $(1+\mu A)^{-1}$ — мероморфная функция μ на всем $\mathbb{C}$. Можно ли найти в явном виде целые по μ функции, просто выражающиеся через A и такие, что $(1+\mu A)^{-1} = F(\mu)/G(\mu)$?

Мы обсудим решение задачи 3 в случае $A \in \mathscr{I}_1$ и воспользуемся им при обсуждении задач 1 и 2. Завершает этот раздел обсуждение «явных» решений двух интегральных уравнений, которые уже появлялись раньше, в томе 1 и в этом томе. Задача 2 не столь проста, как кажется. Во-первых, a priori не ясно, сходится ли сумма в (177). Кроме того, если у A есть только нулевое собственное значение, далеко не очевидно, что $\operatorname{Tr}(A)$, определенный как сумма диагональных матричных элементов, равен нулю. Наконец, в связи с задачей 1 рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $\mathscr{H}$. Пусть $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел, монотонно сходящаяся к нулю. Пусть $A = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\varphi_n, \cdot)\, \varphi_{n+1}$. Это компактный оператор, поскольку

$$\left\| A - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n (\varphi_n, \cdot)\, \varphi_{n+1} \right\| = \sup_{n \geqslant N+1} |\alpha_n| \to 0.$$

Более того, норма $\|A^n\|^{1/n}=\left(\prod_{m=1}^{n}|\alpha_m|\right)^{1/n}$ стремится к нулю при $n\to\infty$. Отсюда по формуле для спектрального радиуса и по теореме VI.6 вытекает, что $\sigma(A)=\{0\}$. Предположим что все $\alpha_n\neq 0$. Поскольку ясно, что тогда $\operatorname{Ker}(A^n)=\{0\}$, то A не имеет собственных значений, а линейная оболочка собственных векторов равна $\{0\}$.

Пример 2. Предположим, что $\{\psi_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — базис в $\mathcal{H}$ и $\{\alpha_n\}$ — двусторонняя последовательность ненулевых чисел, стремящаяся к нулю на $\pm\infty$. Пусть

$$A=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n(\psi_n,\ \cdot)\,\psi_{n+1}.$$

Тогда

$$B=A^{-1}\equiv\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n^{-1}(\psi_{n+1},\ \cdot)\,\psi_n$$

есть оператор, плотно определенный на

$$D(B)=\{\eta\mid\sum\alpha_n^{-2}|(\psi_{n+1},\ \eta)|^2<\infty\}.$$

Отметим, что поскольку $\sigma(A)=\{0\}$, то $(B-\lambda)^{-1}=A(1-\lambda A)^{-1}$. Таким образом, B — замкнутый оператор, резольвентное множество которого совпадает со всей плоскостью $\mathbb{C}$! (См. также пример 5 в § VIII.1.)

Итак, вопрос 1 не всегда имеет утвердительный ответ. Позже мы покажем, что если A — строго m-аккретивный оператор из $\mathcal{I}_1$, то его обобщенные собственные векторы порождают все $\mathcal{H}$.

Впредь $\{\lambda_n(A)\}_{n=1}^{N(A)}$ будет списком всех ненулевых собственных значений компактного оператора A. Каждое собственное значение будет входить в этот список столько раз, какова его алгебраическая кратность. Мы упорядочим $\{\lambda_n(A)\}$ условием

$$|\lambda_{n+1}(A)|\leqslant|\lambda_n(A)|\ \text{ и }\ \arg\lambda_{n+1}(A)\geqslant\arg\lambda_n(A),$$

если $|\lambda_{n+1}(A)|=|\lambda_n(A)|$, где $\arg\lambda_i\in[0,\ 2\pi)$. Для начала докажем, что $\sum_{n=1}^{N(A)}\lambda_n(A)$ абсолютно сходится, если $A\in\mathcal{I}_1$.

Лемма 1. Пусть A — компактный оператор. Тогда существует ортонормированное семейство $\{e_n\}_{n=1}^{N(A)}$, такое, что

$$Ae_n=\lambda_n(A)\,e_n+\sum_{m=1}^{n-1}\nu_{nm}e_m \tag{178}$$

с подходящими ν_{nm}. В частности,

$$(e_n,\ Ae_n)=\lambda_n(A). \tag{179}$$

Доказательство. Пусть P_i — спектральные проекторы, отвечающие ненулевым собственным значениям. Записав $A \upharpoonright \operatorname{Ran} P_i$ для каждого i в жордановой нормальной форме, можно найти множество линейно независимых векторов $\{f_i\}_{i=1}^{N(A)}$, таких, что

$$Af_n = \lambda_n(A) f_n + \beta_n f_{n-1}, \tag{180}$$

где $\beta_n = 1$ либо 0. Применяя к $\{f_n\}_{n=1}^{N(A)}$ процедуру Грама — Шмидта, можно найти ортонормированное семейство $\{e_n\}_{n=1}^{N(A)}$, такое, что

$$e_n = \sum_{m=1}^{n} \gamma_{nm} f_m \tag{181}$$

с $\gamma_{nn} \neq 0$. Тогда (178) следует из (180) и (181). ∎

Ортонормированное семейство $\{e_n\}_{n=1}^{N(A)}$ называют **базисом Шура** (хотя оно не обязательно базис).

Пусть теперь $\{\mu_n(A)\}$ — сингулярные числа A, т. е. собственные значения $|A|$.

Теорема XIII.103 (теорема Шура — Лалеско — Вейля). Для любого $1 \leqslant p < \infty$

$$\sum_{n=1}^{N(A)} |\lambda_n(A)|^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)^p, \tag{182}$$

где A — компактный оператор, $\{\lambda_n(A)\}$ — его собственные значения, а $\{\mu_n(A)\}$ — его сингулярные числа. В частности, если $A \in \mathfrak{I}_1$, то

$$\sum_{n=1}^{N(A)} |\lambda_n(A)| < \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим каноническое разложение A:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)(f_n, \cdot) g_n,$$

где $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ — ортонормированные базисы (теорема VI.17). Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{N(A)}$ — базис Шура для A. Тогда, в силу (179),

$$\lambda_m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{mn}\mu_n(A),$$

где $\alpha_{mn} = (f_n\ \ e_m)(e_m\ \ g_n)$. Теперь мы утверждаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{mn}| \leqslant 1, \tag{183}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\alpha_{mn}| \leqslant 1. \tag{184}$$

Для доказательства (184) заметим, что, в силу неравенства Шварца,

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\alpha_{mn}| \leqslant \left(\sum_{m=1}^{\infty} |(f_n, e_m)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |(g_n, e_m)|^2\right)^{1/2} \leqslant \|f_n\| \|g_n\| = 1,$$

где на последнем шаге использовано неравенство Бесселя и ортонормированность $\{e_n\}$. Неравенство (183) получается похожим образом из ортонормированности $\{g_n\}$ и $\{f_n\}$. Пусть теперь q — сопряженный к p индекс. Тогда

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{M} |\lambda_m(A)|^p &\leqslant \sum_{m=1}^{M} |\lambda_m(A)|^{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{mn}| |\mu_n(A)| = \\ &= \sum_{n, m} |\alpha_{nm}|^{1/p} |\alpha_{nm}|^{1/q} |\lambda_m|^{p-1} |\mu_n| \leqslant \\ &\leqslant \left(\sum_{n, m} |\alpha_{nm}| |\mu_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n, m} |\alpha_{nm}| |\lambda_m|^p\right)^{1/q} = \\ &\leqslant \left(\sum_{n} |\mu_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{M} |\lambda_m|^p\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

На предпоследнем шаге использовано неравенство Гёльдера и равенство $q(p-1)=p$, а на последнем — неравенства (183) и (184). Отсюда легко получается (182). ∎

Прежде чем обратиться к основной теме этого раздела, отметим одно следствие (182).

Следствие (обобщенное неравенство Голдена — Томпсона). Пусть $-A$ и $-B$ — положительные самосопряженные операторы, причем $A+B$ в существенном самосопряжен на $D(A) \cap D(B)$. Предположим, что $e^{A/2}e^{B}e^{A/2} \in \mathfrak{I}_p$. Тогда $e^{A+B} \in \mathfrak{I}_p$ и

$$\|e^{A+B}\|_p \leqslant \|e^{A/2}e^{B}e^{A/2}\|_p.$$

Доказательство. Докажем сначала, что если C и D — ограниченные положительные операторы и $CD \in \mathfrak{I}_r$, то $C^{1/2}DC^{1/2} \in \mathfrak{I}_r$ и

$$\|C^{1/2}DC^{1/2}\|_r \leqslant \|CD\|_r.$$

Сначала заметим, что для любых ограниченных E, F имеем $\sigma(EF) \setminus \{0\} = \sigma(FE) \setminus \{0\}$ (задача 166а), и если $\lambda \neq 0$ есть собственное значение EF, то это же λ есть собственное значение FE с той же кратностью (задача 166b). Поскольку $CD = C^{1/2}(C^{1/2}D) \in \mathfrak{I}_r$, его спектр вне нуля чисто дискретен, поэтому спектр самосопряженного оператора $C^{1/2}DC^{1/2}$ вне нуля чисто дискретен, а он сам компактен. В силу сказанного выше, $\lambda_n(C^{1/2}DC^{1/2}) = \lambda_n(CD)$, а поскольку $C^{1/2}DC^{1/2}$ самосопряжен и положителен, $\lambda_n(C^{1/2}DC^{1/2}) =$

$=\mu_n(C^{1/2}DC^{1/2})$. Таким образом, в силу (182),

$$\|C^{1/2}DC^{1/2}\|_r^r=\sum_n|\lambda_n(CD)|^r\leqslant\sum_n|\mu_n(CD)|^r=\|CD\|_r^r.$$

Теперь мы утверждаем, что $Q_n=(e^{A/2^{n+1}}e^{B/2^n}e^{A/2^{n+1}})^{2^n}\in\mathfrak{I}_p$ и

$$\|Q_n\|_p\leqslant\|e^{A/2}e^Be^{A/2}\|_p.$$

Докажем это по индукции. Случай $n=0$ тривиален. Пусть $C_n=\exp(A/2^n)$, $D_n=\exp(B/2^n)$ и $r_n=2^np$. Тогда если $Q_{n-1}\in\mathfrak{I}_p$, то $C_nD_n\in\mathfrak{I}_{r_n}$ и

$$\|Q_n\|_p=\|C_n^{1/2}D_nC_n^{1/2}\|_{r_n}^{2^n}\leqslant\|C_nD_n\|_{r_n}^{2^n}=\|Q_{n-1}\|_p,$$

что дает нужную оценку $\|Q_n\|_p$.

По формуле Троттера Q_n сильно сходится к e^{A+B}, так что (задача 167) $e^{A+B}\in\mathfrak{I}_p$ и

$$\|e^{A+B}\|_p\leqslant\overline{\lim}\,\|Q_n\|_p\leqslant\|e^{A/2}e^Be^{A/2}\|_p. \blacksquare$$

Наша первая цель—доказательство (177). В процессе этого доказательства мы разовьем теорию бесконечных определителей, полезную и в ряде других приложений. Такая теория будет основываться на понятиях теории внешних алгебр, т. е. теории антисимметрических тензорных произведений. В § II.4 и VIII.10 мы уже дали основные определения нужных объектов, используя «фермионные пространства Фока»; сейчас мы повторим эти определения в несколько других обозначениях. Для заданного гильбертова пространства $\mathscr{H}$ пусть $\otimes^n\mathscr{H}$—линейное пространство полилинейных функционалов на $\mathscr{H}$. Подробнее, по заданным $\varphi_1, \ldots, \varphi_n\in\mathscr{H}$ определим $\varphi_1\otimes\ldots\otimes\varphi_n\in\otimes^n\mathscr{H}$ равенством

$$(\varphi_1\otimes\ldots\otimes\varphi_n)(\langle\eta_1, \ldots, \eta_n\rangle)=(\varphi_1, \eta_1)\ldots(\varphi_n, \eta_n).$$

Легко показать (см. предложение 1 в § II.4), что конечная линейная оболочка набора $\{\varphi_1\otimes\ldots\otimes\varphi_n\}$ допускает корректное введение внутреннего произведения

$$(\varphi_1\otimes\ldots\otimes\varphi_n, \eta_1\otimes\ldots\otimes\eta_n)=(\varphi_1, \eta_1)\ldots(\varphi_n, \eta_n),$$

и $\otimes^n\mathscr{H}$—пополнение этой линейной оболочки по такому внутреннему произведению. Любому заданному оператору $A\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$ отвечает естественно определенный оператор $\Gamma_n(A)$ в $\mathscr{L}(\otimes^n\mathscr{H})$:

$$\Gamma_n(A)(\varphi_1\otimes\ldots\otimes\varphi_n)=A\varphi_1\otimes\ldots\otimes A\varphi_n.$$

При этом Γ_n—функтор, т. е. $\Gamma_n(AB)=\Gamma_n(A)\Gamma_n(B)$.

Пусть $\mathscr{P}_n$ обозначает группу всех перестановок n объектов. Пусть $\varepsilon(\cdot)$—функция на $\mathscr{P}_n$, равная $+1$ (соответственно -1) на четных (соответственно нечетных) перестановках. Определим

$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \in \otimes^n \mathscr{H}$ равенством

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n = (n!)^{-1/2} \sum_{\pi \in \mathscr{P}_n} \varepsilon(\pi) [\varphi_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\pi(n)}], \tag{185}$$

и пусть $\wedge^n(\mathscr{H})$ — подпространство в $\otimes^n \mathscr{H}$, порождаемое всеми $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$. Нормировочный множитель $(n!)^{-1/2}$ выбран так, чтобы для ортонормированных $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ норма $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ была равна 1. Более обще, из (185) следует (задача 149), что

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n, \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_n) = \det((\varphi_i, \eta_j)), \tag{186}$$

где $\det(a_{ij}) = \sum_{\pi \in \mathscr{P}_n} \varepsilon(\pi) a_{1\pi(1)} \ldots a_{n\pi(n)}$.

Для заданного $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ оператор $\Gamma_n(A)$ оставляет $\wedge^n(\mathscr{H})$ инвариантным. и мы обозначим его сужение на $\wedge^n(\mathscr{H})$ через $\wedge^n(A)$. Поскольку Γ_n — функтор, $\wedge^n$ тоже функтор:

$$\wedge^n(AB) = \wedge^n(A) \wedge^n(B). \tag{187}$$

При $n=0$ определим $\wedge^n(\mathscr{H})$ как $\mathbf{C}$, а $\wedge^n(A)$ — как $1: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$.

Связь между определителями конечномерных операторов и $\wedge^n(\cdot)$ устанавливает

Лемма 2. (a) Пусть $\mathscr{H}$ есть n-мерное гильбертово пространство. Тогда $\wedge^n(\mathscr{H})$ одномерно.

(b) Если размерность $\mathscr{H}$ равна n, то $\wedge^n(A)$ есть умножение на число $\det(A)$, т. е. обычный определитель A.

(c) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Доказательство. (a) Установим более общий факт: $\dim \wedge^k(\mathscr{H}) = \binom{n}{k}$, где $\binom{n}{k}$ — число способов выбрать k объектов из n. В самом деле, пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в $\mathscr{H}$. Мы утверждаем, что

$$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n\}$$

— ортонормированный базис в $\wedge^k(\mathscr{H})$; отсюда будет следовать нужное равенство. Но это так, ибо рассматриваемые векторы ортонормированы, а потому линейно независимы и порождают $\wedge^k(\mathscr{H})$, ибо отображение $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_k \rangle \mapsto \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k$ полилинейно и кососимметрично относительно перестановок.

(b) Поскольку $\wedge^n(\mathscr{H})$ одномерно, $\wedge^n(A)$ должен быть умножением на какое-то число α. Если $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис, то, в силу (186),

$$\alpha = (e_1 \wedge \ldots \wedge e_n, \wedge^n(A) e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) =$$
$$= (e_1 \wedge \ldots \wedge e_n, Ae_1 \wedge \ldots \wedge Ae_n) = \det((e_i, Ae_j)).$$

(c) следует из (b) и (187). ∎

Это довольно легкое доказательство равенства $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ демонстрирует мощь методов теории внешних алгебр при изучении определителей.

Чтобы пояснить определение, которым мы пользуемся для $\det(1+A)$, когда $A \in \mathcal{I}_1$, предположим что A — оператор в конечномерном пространстве $\mathcal{H}$ с $\dim \mathcal{H} = n$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения A, а $e_1, \ldots, e_n$ — базис Шура для A. Легко видеть, что

$$\det(1+A) = (e_1 \wedge \ldots \wedge e_n, (1+A)e_1 \wedge \ldots \wedge (1+A)e_n) = \prod_{j=1}^{n} (1+\lambda_j)$$

и

$$\operatorname{Tr}(\wedge^k(A)) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} (e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}, Ae_{i_1} \wedge \ldots \wedge Ae_{i_k}) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k},$$

так что в случае $\dim \mathcal{H} = n < \infty$

$$\det(1+A) = \sum_{j=0}^{n} \operatorname{Tr}(\wedge^j(A)). \qquad (188)$$

В случае $\dim \mathcal{H} = \infty$ мы *определим* $\det(1+A)$ формулой (188). Для доказательства сходимости суммы нам понадобится

Лемма 3. Пусть A — оператор со следом и $\mu_n(A)$ — его сингулярные числа. Тогда для любого k оператор $\wedge^k(A)$ имеет след и

(a) $\| \wedge^k(A) \|_1 = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \mu_{i_1}(A) \ldots \mu_{i_k}(A)$;

(b) $\| \wedge^k(A) \|_1 \leqslant \| A \|_1^k / k!$.

Доказательство. Пусть $A = U|A|$ — полярное разложение A (теорема VI.10). Легко видеть, что $\wedge^k(A) = \wedge^k(U) \wedge^k(|A|)$ — полярное разложение $\wedge^k(A)$ и, в частности,

$$|\wedge^k(A)| = \wedge^k(|A|).$$

Пусть $e_1, \ldots$ — ортонормированный базис из собственных векторов $|A|$. Тогда $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$ — ортонормированный базис из собственных векторов $\wedge^k(|A|)$. Таким образом,

$$\operatorname{Tr}(|\wedge^k(A)|) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \mu_{i_1}(A) \ldots \mu_{i_k}(A) \leqslant \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \ldots, i_k} \mu_{i_1}(A) \ldots \mu_{i_k}(A) = [\operatorname{Tr}(|A|)]^k / k!.$$

Следовательно, $\wedge^k(A)$ имеет след, и утверждения (a), (b) справедливы. ∎

Определение. Пусть $A \in \mathcal{J}_1$. Тогда по определению

$$\det(1+A) = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Tr}(\wedge^k(A)). \tag{188}$$

Лемма 4. Сумма (188) сходится для любого $A \in \mathcal{J}_1$. Более того,

(a) $|\det(1+A)| \leqslant \prod_{j=1}^{\infty} (1+\mu_j(A))$;

(b) $|\det(1+A)| \leqslant \exp(\|A\|_1)$;

(c) для любых $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{J}_1$

$$\langle z_1, \ldots, z_n \rangle \longmapsto \det\left(1 + \sum_{j=1}^{n} z_j A_j\right)$$

есть целая аналитическая функция;

(d) для любых $A, B \in \mathcal{J}_1$

$$|\det(1+A) - \det(1+B)| \leqslant \|A-B\|_1 \exp(\|A\|_1 + \|B\|_1 + 1). \tag{189}$$

Доказательство. Поскольку $|\operatorname{Tr}(\wedge^k(A))| \leqslant \|\wedge^k(A)\|_1/k!$, сходимость в (188) и неравенства (a), (b) следуют из леммы 3. Поскольку у нас есть оценки членов суммы (188), равномерные на компактных множествах в $\mathbb{C}^n$, достаточно доказать, что аналитично отображение

$$\langle z_1, \ldots, z_n \rangle \longmapsto \operatorname{Tr}(\wedge^k(z_1 A_1 + \ldots + z_k A_k)).$$

Ясно, что $\wedge^k(z_1 A_1 + \ldots + z_k A_k)$ аналитична как $\mathcal{J}_1$-значная функция, поэтому ее след аналитичен, ибо $\operatorname{Tr}(\cdot)$ — ограниченный линейный функционал на $\mathcal{J}_1$. Это доказывает (c). Неравенство (d) вытекает из (b), (c) и следующей теоремы. ∎

Теорема XIII.104. Пусть X — комплексное банахово пространство. Пусть $F: X \to \mathbb{C}$ — функция со следующими свойствами:

(i) $\mu \longmapsto F(x+\mu y)$ — целая функция μ при любых $x, y \in X$;

(ii) для некоторой монотонно возрастающей функции G на $[0, \infty)$ при всех $x \in X$

$$|F(x)| \leqslant G(\|x\|).$$

Тогда

$$|F(x) - F(y)| \leqslant \|x-y\| G(\|x\| + \|y\| + 1). \tag{190}$$

Доказательство. Фиксируем x и y в X, и пусть $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ задана равенством

$$f(\mu) = F(^1/_2(x+y) + \mu(y-x)),$$

так что, в силу (i), f — целая функция. Отметим, что

$$|F(x) - F(y)| = |f(-^1/_2) - f(^1/_2)| \leqslant \sup_{-1/2 \leqslant t \leqslant 1/2} |f'(t)|. \tag{191}$$

По формуле Коши

$$f'(t)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\mu-t|=\|x-y\|^{-1}}\frac{f(\mu)}{(\mu-t)^2}d\mu,$$

и потому

$$\sup_{|t|\leqslant 1/2}|f'(t)|\leqslant\|x-y\|\sup_{|\mu|\leqslant 1/2+\|x-y\|^{-1}}|f(\mu)|. \qquad (192)$$

При $|\mu|\leqslant{}^1/_2+\|x-y\|^{-1}$ справедливо неравенство

$$\|{}^1/_2(x+y)+\mu(y-x)\|\leqslant\|x\|+\|y\|+1,$$

так что для таких μ, в силу (ii),

$$|f(\mu)|\leqslant G(\|x\|+\|y\|+1). \qquad (193)$$

Из неравенств (191)—(193) следует (190). ∎

Предположим, что $A\in\mathfrak{I}_1$. Идея доказательства равенства $\mathrm{Tr}(A)=\sum\lambda_n(A)$ такова. Допустим, что мы сумели доказать сходимость разложения $\prod\limits_{j=1}^{N(A)}(1+z\lambda_j(A))$ для $\det(1+zA)$. Член, линейный по z, в этом произведении с очевидностью равен $\sum\limits_{j=1}^{N(A)}\lambda_j(A)$, тогда как линейный по z член в $\det(1+zA)$ по определению есть $\mathrm{Tr}(A)$. Поэтому нам следует изучить функцию $\det(1+zA)$. Сначала сведем вместе свойства $\det(1+A)$.

Теорема XIII.105. Пусть A и B взяты из $\mathfrak{I}_1$. Тогда:

(a) $$\det(1+A)\det(1+B)=\det(1+A+B+AB); \qquad (194)$$

(b) $(1+A)$ обратим тогда и только тогда, когда $\det(1+A)\neq 0$;

(c) если $-\mu^{-1}$ есть собственное значение A, то $\det(1+zA)$ имеет нуль n-го порядка в точке $z=\mu$, где n — алгебраическая кратность $-\mu^{-1}$;

(d) для каждого ε существует зависящая от A константа C_ε, такая, что

$$|\det(1+zA)|\leqslant C_\varepsilon\exp(\varepsilon|z|).$$

Доказательство. (a) Поскольку множество операторов конечного ранга плотно в $\mathfrak{I}_1$ (следствие теоремы VI.21), а $\det(1+\cdot)$, в силу (189),— непрерывная функция, достаточно установить (194) в случае, когда A и B — операторы конечного ранга. Пусть V—линейная оболочка подпространств $(\mathrm{Ker}\,A)^\perp$, $(\mathrm{Ker}\,B)^\perp$, $\mathrm{Ran}\,A$, $\mathrm{Ran}\,B$. Тогда V — конечномерное подпространство, инвариантное относительно действия A, B, A^*, B^*, причем A и B равны нулю на $V^\perp$. Таким образом, A и B оставляют инвариантными V и $V^\perp$. Пусть $\tilde{A}=$

$= A \upharpoonright V$, $\tilde{B} = B \upharpoonright V$. Тогда $\operatorname{Tr}(\wedge^k(A)) = \operatorname{Tr}(\wedge^k(\tilde{A}))$ и т. д. Следовательно,

$$\det(1+A) = \det_V(1+\tilde{A}),$$

и аналогично для B и $A+B+AB$, где $\det_V$ есть определитель на V. Теперь (194) вытекает из пункта (с) леммы 2.

(b) Если оператор $1+A$ обратим, то $(1+A)^{-1} = 1+B$, где $B = -A(1+A)^{-1} \in \mathcal{I}_1$. Тогда, в силу (194),

$$\det(1+A)\det(1+B) = \det(1) = 1,$$

так что $\det(1+A) \neq 0$. Если $1+A$ необратим, то -1 есть собственное значение A, и потому $\det(1+A) = 0$ в силу пункта (с), который мы сейчас докажем.

(c) Пусть P — спектральный проектор, отвечающий $-\mu^{-1}$. Пусть $B = AP$ и $C = A(1-P)$. Тогда

$$1+zA = (1+zB)(1+zC),$$

так что $\det(1+zA) = \det(1+zB)\det(1+zC)$. Поскольку $1+zC$ обратим для любых z около $-\mu^{-1}$, достаточно показать, что $\det(1+zB)$ обладает нулем n-го порядка в точке $-\mu^{-1}$. Расширяя базис Шура оператора B до базиса всего $\mathcal{H}$, можно построить ортонормированный базис, такой, что

$$Be_i = \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} e_j,$$

где $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = -\mu^{-1}$ и $\lambda_{n+1} = \ldots = 0$. Здесь мы воспользовались тем, что $\operatorname{Ran} B \subset P = \{$линейная оболочка базиса Шура$\}$. Теперь легко вывести, что $\operatorname{Tr}(\wedge^k(B)) = \binom{n}{k}(-\mu^{-1})^k$ при $k \leqslant n$ и $\operatorname{Tr}(\wedge^k(B)) = 0$ при $k > n$. В итоге $\det(1+zB) = (1-z\mu^{-1})^n$ имеет при $z = \mu$ нуль n-го порядка.

(d) Пусть $\mu_n(A)$ — сингулярные числа A. Выберем N таким, чтобы

$$\sum_{n>N} \mu_n(A) < \varepsilon/2.$$

Тогда, в силу пункта (а) леммы 4,

$$|\det(1+zA)| \leqslant \prod_{j=1}^{\infty}(1+|z|\mu_j(A)) \leqslant \prod_{j=1}^{N}(1+|z|\mu_j(A)) \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}|z|\right),$$

ибо $1+x \leqslant e^x$ при $x \geqslant 0$. Теперь, поскольку $\prod_{j=1}^{N}(1+|z|\mu_j(A))$ — полином, можно найти такую константу C_ε, чтобы

$$\prod_{j=1}^{N}(1+|z|\mu_j(A)) \leqslant C_\varepsilon \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}|z|\right). \blacksquare$$

Теорема XIII.106. Для любого $A \in \mathfrak{I}_1$

$$\det(1+A) = \prod_{j=1}^{N(A)} (1+\lambda_j(A)),$$

где $\{\lambda_j(A)\}_{j=1}^{N(A)}$ — собственные значения A, выписанные с учетом алгебраической кратности.

Доказательство. Пусть $f(z) = \det(1+zA)$ и

$$g(z) = \prod_{j=1}^{N(A)} (1+z\lambda_j(A)).$$

Если $N(A)=\infty$, то это произведение сходится к аналитической функции в силу общих результатов теории бесконечных произведений (см. задачу 150), ибо по теореме XIII.103

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j(A)| < \infty.$$

Покажем, что $f(z)=g(z)$. В силу пунктов (b) и (c) теоремы XIII.105, f и g имеют одни и те же нули одной и той же кратности. Поэтому f/g — целая аналитическая функция, не имеющая нулей, так что

$$f = ge^h,$$

где произвол в выборе h устраняется требованием, чтобы она была целой функцией с $h(0)=0$. Этого можно требовать, ибо $f(0) = g(0) = 1$. Покажем, что $h(z)=0$ для $|z|<1$, так что h есть тождественный нуль. При $R \geqslant 2$ и $|z|<R$ введем

$$h_R(z) = \ln[f_R(z)], \quad k_R(z) = -\sum_{\{j \mid |\lambda_j|^{-1} > R\}} \ln(1+z\lambda_j(A)),$$

$$f_R(z) = f(z) \Big/ \prod_{\{j \mid |\lambda_j|^{-1} < R\}} (1+z\lambda_j(A)).$$

Произвол в определении h_R и k_R устраняется условием $h_R(0) = k_R(0) = 0$. Отметим, что f_R — целая функция. Поскольку $h = h_R + k_R$, достаточно показать, что $|h_R(z)| \to 0$ и $|k_R(z)| \to 0$ при $R \to \infty$ для каждого z с $|z| \leqslant 1$.

Поскольку $\ln(1+x)$ равен нулю при $x=0$ и аналитичен в окрестности $\{x \mid |x| \leqslant 1/2\}$, для всех x с $|x| \leqslant 1/2$

$$|\ln(1+x)| \leqslant C|x|$$

с подходящей константой C. Таким образом, для $R \geqslant 2$

$$|k_R(z)| \leqslant |z| \sum_{\{j \mid |\lambda_j|^{-1} > R\}} |\lambda_j(A)| \to 0$$

при $R \to \infty$, ибо сумма в правой части сходится.

Рассмотрим теперь целую функцию $f_R(z)$. Если $|z|=2R$ и $|\lambda_j|^{-1}\leqslant R$, то $|1+z\lambda_j|\geqslant 1$. Тогда, в силу пункта (d) теоремы XIII.105, $|f_R(z)|\leqslant C_\varepsilon \exp(2\varepsilon R)$, если $|z|=2R$. В силу принципа максимума модуля это остается справедливым и при $|z|=R$, так что

$$\operatorname{Re}(h_R(z))\leqslant \ln C_\varepsilon+2\varepsilon R$$

при $|z|=R$. Ниже мы докажем лемму, согласно которой для любой аналитической в окрестности $|z|\leqslant R$ функции f справедливо неравенство (195). Поэтому с учетом условия $h_R(0)=0$

$$\max_{|z|\leqslant 1}|h_R(z)|\leqslant 2(R-1)^{-1}[\ln C_\varepsilon+2\varepsilon R].$$

В итоге для любого z с $|z|\leqslant 1$

$$\varlimsup_{R\to\infty}|h_R(z)|\leqslant 4\varepsilon,$$

и так как ε произвольно, то $|h_R(z)|\to 0$ при $R\to\infty$. ∎

Следствие (теорема Лидского). Для любого $A\in\mathcal{J}_1$ имеет место формула (177):

$$\operatorname{Tr}(A)=\sum_{j=1}^{N(A)}\lambda_j(A),$$

где $\lambda_j(A)$ — собственные значения A.

Доказательство. Рассмотрим разложение $\det(1+\mu A)$ в ряд Тейлора около $\mu=0$. В силу (188), первый член разложения, определяющий det, есть $\operatorname{Tr}(A)$, а первый член в произведении $\prod_{j=1}^{N(A)}(1+\mu\lambda_j(A))$ есть $\sum_{j=1}^{N(A)}\lambda_j(A)$. ∎

Можно попытаться извлечь что-то из каждого члена разложения $\det(1+\mu A)$ в ряд Тейлора. Действительно, k-й член разложения дает в точности равенство (177) для $\wedge^k(A)$, т. е.

$$\operatorname{Tr}(\wedge^k(A))=\sum_{j=1}^{N(\wedge^k(A))}\lambda_j(\wedge^k(A))=\sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_k\leqslant N(A)}\lambda_{j_1}(A)\ldots\lambda_{j_k}(A).$$

Ввиду этого равенства теорему XIII.106 можно вывести из (177).

При доказательстве теоремы 106 был использован следующий факт из комплексного анализа.

Лемма 5 (теорема Бореля — Каратеодори). Пусть f аналитична в окрестности $|z|\leqslant R$. Тогда для любого $r<R$

$$\max_{|z|\leqslant r}|f(z)|=\frac{2r}{R-r}\max_{|z|=R}[\operatorname{Re}(f(z))]+\frac{R+r}{R-r}|f(0)|. \qquad (195)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что без ограничения общности можно считать $f(0)=0$, ибо если (195) выполнено для $h(z)=f(z)-f(0)$, то оно выполнено и для f. Таким образом, положим $f(0)=0$, и пусть $A=\max\limits_{|x|=R}[\operatorname{Re} f(z)]$. Опять-таки без потери общности предположим, что f отлична от тождественного нуля, так что $A>0$. В силу принципа максимума модуля, примененного к $\exp(f)$, $\operatorname{Re} f(z)\leqslant A$ для всех z с $|z|\leqslant R$, так что функция

$$g(z)\equiv\frac{f(z)}{z(2A-f(z))}$$

аналитична при $|z|<R$. Представив f в виде $u+iv$, мы видим, что в случае $|z|=R$

$$|g(z)|^2=\frac{1}{R^2}\frac{u^2+v^2}{(2A-u)^2+v^2}\leqslant\frac{1}{R^2},$$

поскольку $|u|\leqslant|2A-u|$. Таким образом, в силу принципа максимума модуля, $|g(z)|\leqslant 1/R$ для всех z с $|z|\leqslant R$. Поскольку

$$f(z)=\frac{2Azg(z)}{1+zg(z)},$$

получаем, что для $|z|=r$

$$|f(z)|\leqslant\frac{2Ar/R}{1-r/R}=\frac{2Ar}{R-r}.$$

Привлекая еще раз принцип максимума модуля, заключаем, что (195) справедливо. ∎

Применим теперь развитую теорию к изучению третьего вопроса, сформулированного в начале раздела, т. е. попытаемся найти в явном виде такие функции $f(\mu)$ и $g(\mu)$, что $(1+\mu A)^{-1}=$ $=f(\mu)/g(\mu)$.

Теорема XIII.107. Пусть $A\in\mathcal{I}_1$. Функцию

$$F_A(\mu)=[\det(1+\mu A)][1+\mu A]^{-1},$$

определенную на $\{\mu\mid-\mu^{-1}\notin\sigma(A)\}$, можно продолжить на всю плоскость $\mathbb{C}$ так, что F будет целой функцией. Более того,

$$\|F_A(\mu)\|\leqslant\exp(|\mu|\,\|A\|_1)\tag{196}$$

и

$$\|F_A(1)-F_B(1)\|\leqslant\|A-B\|_1\exp(\|A\|_1+\|B\|_1+1).\tag{197}$$

Доказательство. По теореме VI.5 функция $G(\mu)=(1+\mu A)^{-1}$ аналитична на $\{\mu\mid-\mu^{-1}\notin\sigma(A)\}$. Если показать, что $G(\mu)$ в точке $\mu=\mu_0$, такой, что $-\mu_0^{-1}\in\sigma(A)$, имеет полюс порядка k, причем k не превосходит алгебраической кратности $-\mu_0^{-1}$, то $\det(1+\mu A)\,G(\mu)$

будет регулярной функцией в точке $\mu=\mu_0$, поскольку $\det(1+\mu A)$ имеет нуль, порядок которого равен этой же кратности. Если есть такая точка μ_0, обозначим через P спектральный проектор, отвечающий $-\mu_0^{-1}$. Пусть $B=AP$ и $C=A-B$. Тогда

$$(1+\mu A)^{-1}=(1+\mu B)^{-1}P+(1+\mu C)^{-1}(1-P).$$

Второй член в правой части не сингулярен в точке μ_0, поскольку $-\mu_0^{-1}\notin\sigma(C)$. Используя теорию конечномерных определителей и матриц и учитывая конечность ранга оператора B, можно обратить оператор $1+\mu B$ и представить $(1+\mu B)^{-1}$ в виде отношения со знаменателем $\det(1+\mu B)$, равным некоторому полиному степени d, где $d=\dim P$. В итоге получаем, что $(1+\mu B)^{-1}$ обладает полюсом порядка не выше d.

Остается доказать (196) и (197). Имея в виду предельный переход (задача 151), можно ограничиться доказательством (196) в конечномерном случае, когда $(1+\mu A)$ в придачу еще и обратим. Поскольку $1+\mu A=U|1+\mu A|$ с унитарным оператором U, то

$$\|(1+\mu A)^{-1}\det(1+\mu A)\|=\||1+\mu A|^{-1}\det(|1+\mu A|)\|.$$

Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ — собственные значения $|1+\mu A|$, причем $\lambda_1\geqslant\ldots\geqslant\lambda_k$. Тогда

$$\||1+\mu A|^{-1}\det(|1+\mu A|)\|=\lambda_k^{-1}\prod_{i=1}^{k}\lambda_i=\prod_{i=1}^{k-1}\lambda_i.$$

Пусть $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ — собственные значения $|A|$. Можно доказать (задача 158), что $\lambda_i\leqslant 1+|\mu|\alpha_i$, и, значит,

$$\|(1+\mu A)^{-1}\det(1+\mu A)\|\leqslant\prod_{i=1}^{k-1}(1+|\mu|\alpha_i)\leqslant$$
$$\leqslant\prod_{i=1}^{k-1}\exp(|\mu|\alpha_i)\leqslant\exp(|\mu|\operatorname{Tr}|A|),$$

откуда следует (196). Применяя теперь теорему XIII.104 с учетом (196) к функции $(\varphi, F_A(1)\psi)$, получаем (197) (задача 170). ∎

Неравенства (196) и (b) леммы 4 позволяют оценить ошибки, допускаемые при обрывании рядов для $\det(1+\mu A)$ и $(1+\mu A)^{-1}\times\times\det(1+\mu A)$ (задача 152). По этой причине интересно найти коэффициенты этих рядов. У нас уже есть разложение $\det(1+\mu A)$ в терминах $\wedge^k(A)$; подобное разложение возможно и для функции

$$D_\mu(A)\equiv A(1+\mu A)^{-1}\det(1+\mu A)$$

в терминах частичных следов операторов $\wedge^k(A)$ (задача 153). Это разложение, по существу, есть абстрактный вариант разложения, которое использовал Фредгольм в своей знаменитой статье об интегральных уравнениях. Заметим, что $D_\mu(A)$ определена таким образом, что

$$(1+\mu A)^{-1} = 1 - \mu\,[D_\mu(A)/\det(1+\mu A)].$$

Однако вычислить выражения $\wedge^k(A)$ через A не так уж просто, поэтому желательно иметь выражение коэффициентов ряда Тейлора для $\det(1+\mu A)$ и $D_\mu(A)$ через величины типа A, A^2, ... и их следы.

Лемма 6. Пусть A — фиксированный элемент из $\mathcal{I}_1$. Тогда для малых $|\mu|$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu^k \operatorname{Tr}((-A)^k)/k$ сходится и

$$\det(1+\mu A) = \exp\left[-\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \operatorname{Tr}[(-A)^k]/k\right].$$

Доказательство. Поскольку

$$|\operatorname{Tr}[(-A)^k]| \leqslant \|A^k\|_1 \leqslant \|A\|_1 \|A\|^{k-1},$$

ряд сходится, если $|\mu|\,\|A\|_{\mathrm{op}} < 1$. Более того, в силу теоремы Лидского (теорема XIII.106 и ее следствие) и выражения det в виде произведения, для $|\mu| \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N(A)} |\lambda_j(A)| < 1$ имеем

$$\begin{aligned}\ln[\det(1+\mu A)] &= \sum_{j=1}^{N(A)} \ln(1+\mu\lambda_j(A)) = \sum_{j=1}^{N(A)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \mu^k \lambda_j(A)^k/k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \mu^k \left[\sum_{j=1}^{N(A)} \lambda_j(A)^k\right] \Big/ k = \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \operatorname{Tr}((-A)^k)/k.\end{aligned}$$

Выше мы учли сходимость разложения $\ln(1+x)$ на множестве $\{x \mid |x| < 1\}$. Возможность перемены порядка суммирования легко обосновать, показав, что, в силу неравенств $\sum |\lambda_j(A)| < \infty$ и $|\mu| \max |\lambda_j(A)| < 1$, двойная сумма абсолютно сходится. ∎

Лемма 7. Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая при малых $|z|$ и представимая в виде

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n \frac{z^n}{n}.$$

Пусть

$$g(z) \equiv \exp(f(z)) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{z^m}{m!}.$$

Тогда $B_0=1$, а B_m задаются определителями $m\times m$-матриц:

$$B_m=\begin{vmatrix} b_1 & m-1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & b_1 & m-2 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m-1} & b_{m-2} & b_{m-3} & \dots & 1 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & b_1 \end{vmatrix}. \tag{198}$$

Доказательство. Поскольку $g'(z)=f'(z)g(z)$, рассматриваемые степенные ряды связаны соотношениями

$$B_n=\sum_{k=1}^{n} b_k B_{n-k}(-1)^{k+1}\left(\frac{(n-1)!}{(n-k)!}\right). \tag{199}$$

При $m=1$ равенство (198) выполняется очевидным образом. Но тогда, если оно справедливо для $B_1, \dots, B_{m-1}$, то (199) есть в точности разложение определителя (198) по первому столбцу, и утверждение леммы получается по индукции. ∎

Теорема XIII.108 (формула Племеля — Смитиса). Введем $\alpha_m(A)$ и $\beta_m(A)$ формулами

$$\det(1+\mu A)=\sum_{m=0}^{\infty}\mu^m\frac{\alpha_m(A)}{m!},\qquad D_\mu(A)=\sum_{m=0}^{\infty}\mu^m\frac{\beta_m(A)}{m!}.$$

Тогда $\alpha_m(A)$ задается $m\times m$-определителем

$$\alpha_m(A)=\begin{vmatrix} \operatorname{Tr}(A) & m-1 & 0 & \dots & 0 \\ \operatorname{Tr}(A^2) & \operatorname{Tr}(A) & m-2 & \dots & 0 \\ \operatorname{Tr}(A^3) & \operatorname{Tr}(A^2) & \operatorname{Tr}(A) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 \\ \operatorname{Tr}(A^m) & \operatorname{Tr}(A^{m-1}) & \operatorname{Tr}(A^{m-2}) & \dots & \operatorname{Tr}(A) \end{vmatrix}, \tag{200}$$

а $\mathfrak{p}_m(A)$ задается $(m+1)\times(m+1)$-определителем

$$\beta_m(A)=\begin{vmatrix} A & m & 0 & \dots & 0 \\ A^2 & \operatorname{Tr}(A) & m-1 & \dots & 0 \\ A^3 & \operatorname{Tr}(A^2) & \operatorname{Tr}(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A^m & \operatorname{Tr}(A^{m-1}) & \operatorname{Tr}(A^{m-2})\dots & & 1 \\ A^{m+1} & \operatorname{Tr}(A^m) & \operatorname{Tr}(A^{m-1})\dots & & \operatorname{Tr}(A) \end{vmatrix}. \qquad (201)$$

Формулу (201) следует понимать в том смысле, что $(\varphi, \beta_m(A)\psi)$ задается числовым определителем, который получается заменой A^j в правой части (201) на $(\varphi, A^j\psi)$.

Доказательство. Формула (200) следует прямо из лемм 6 и 7. Для малых μ по формуле геометрической прогрессии, примененной к $A(1+\mu A)^{-1}$, имеем

$$D_\mu(A)=(A-\mu A^2+\mu^2 A^3-\dots)\det(1+\mu A).$$

Таким образом,

$$\beta_m(A)=m!\left[A\frac{\alpha_m(A)}{m!}-A^2\frac{\alpha_{m-1}(A)}{(m-1)!}+\dots\right].$$

Разлагая правую часть (201) по первому столбцу и используя (200), можно убедиться в справедливости (201). ∎

В качестве последнего абстрактного результата приведем теорему, в которой развитая выше техника применена к проблеме полноты системы обобщенных собственных векторов для одного специального класса операторов в $\mathcal{I}_1$.

Теорема XIII.109. Пусть A — строго m-аккретивный оператор со следом, т. е. для любого $\varphi\in\mathcal{H}$ существует такое $\varepsilon>0$, что

$$\arg[(\varphi, A\varphi)]\leqslant\pi/2-\varepsilon.$$

Тогда обобщенные собственные векторы оператора A порождают все $\mathcal{H}$.

Доказательство. Сначала мы докажем, что обобщенные собственные векторы, отвечающие ненулевым собственным значениям, порождают $\overline{\operatorname{Ran} A}$, а затем, что $\overline{\operatorname{Ran} A}+\operatorname{Ker} A=\mathcal{H}$. Пусть $\mathcal{M}$ — линейная оболочка обобщенных собственных векторов, отвечающих ненулевым собственным значениям. Поскольку A оставляет $\mathcal{M}$ инвариантным, A^* оставляет инвариантным $\mathcal{M}^\perp$. Пусть B — сужение A^* на $\mathcal{M}^\perp$. Докажем, что $B=0$; тогда из $\varphi\in\mathcal{M}^\perp$ следует $A^*\varphi=0$, откуда будет вытекать, что $\varphi\in(\operatorname{Ran} A)^\perp$, т. е. $\mathcal{M}^\perp\subset(\operatorname{Ran} A)^\perp$ и, значит, $\overline{\operatorname{Ran} A}\subset\mathcal{M}$.

Прежде всего мы утверждаем, что $\sigma(B)=\{0\}$. Действительно, предположим, что $\lambda\in\sigma(B)$ и $\lambda\neq 0$. Тогда λ есть собственное значение B, поскольку B как сужение компактного оператора A^* компактен. По этой причине существует ненулевой вектор $\varphi\in\mathcal{M}^\perp$, такой, что $A^*\varphi=\lambda\varphi$. Тогда $\varphi\in(\operatorname{Ran}(A-\bar\lambda))^\perp$ и $\bar\lambda\in\sigma(A)$. Пусть P — спектральный проектор, отвечающий $\bar\lambda$. Тогда $\operatorname{Ran} P\subset\mathcal{M}$ и $\varphi\in(\operatorname{Ran} P)^\perp$. Но $\bar\lambda\notin\sigma(A\restriction(1-P)\mathcal{H})$, и потому $\operatorname{Ran}(1-P)\subset\operatorname{Ran}(A-\bar\lambda)$, так что $\varphi\in(\operatorname{Ran}(1-P))^\perp$. Поскольку $\operatorname{Ran} P+\operatorname{Ran}(1-P)=\mathcal{H}$, отсюда следует, что $\varphi=0$. Итак, спектр B состоит лишь из нуля.

Пусть $\varphi\in\mathcal{M}^\perp$. Введем векторнозначную аналитическую функцию

$$F(\mu)=(1-\mu B)^{-1}\varphi=-\mu^{-1}(B-\mu^{-1})^{-1}\varphi.$$

Поскольку $\sigma(B)=\{0\}$, F — целая функция. Более того, поскольку у B нет ненулевых собственных значений, $\det(1-\mu B)=1$, в силу теоремы XIII.106, и потому, в силу (196),

$$\|F(\mu)\|\leqslant\exp(|\mu|\,\|B\|_1)\,\|\varphi\|. \tag{202}$$

Но B еще и m-аккретивен, и потому, в силу теоремы VIII.17,

$$\|(B-\lambda)^{-1}\|\leqslant[\operatorname{dist}(\lambda,\{z\,|\,|\arg z|\leqslant\pi/2-\varepsilon\})]^{-1}.$$

В итоге для $|\arg\lambda|\geqslant\pi/2-\varepsilon/2$ имеем $\|(B-\lambda)^{-1}\varphi\|\leqslant|\lambda|^{-1}\operatorname{cosec}(\varepsilon/2)\,\|\varphi\|$. Отсюда при $|\arg\mu|\geqslant\pi/2-\varepsilon/2$

$$\|F(\mu)\|\leqslant\alpha, \tag{203}$$

где $\alpha=\|\varphi\|\operatorname{cosec}(\varepsilon/2)$. Мы утверждаем, что (203) справедливо для всех μ. Действительно, пусть $\beta=\frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{3}\right]^{-1}$. Для любого $C>0$ функция $F_C(\mu)=F(\mu)\exp(-C\mu^\beta)$ аналитична на множестве $D=\{\mu\,|\,|\arg\mu|\leqslant\pi/2-\varepsilon/2\}$ и, согласно (202), неравенствам $\beta>1$ и $\beta(\pi/2-\varepsilon/2)<\pi/2$, равномерно стремится к нулю при $|\mu|\to\infty$. Таким образом, по принципу максимума модуля $|F_C(\mu)|$ принимает свое наибольшее значение при $\arg\mu=\pm(\pi/2-\varepsilon/2)$, где она ограничена величиной α. Итак, для любого $C>0$ и $\mu\in D$ имеем $|F_C(\mu)|\leqslant\alpha$, откуда, полагая $C\downarrow 0$, получаем (203). Но если (203) выполняется, то по теореме Лиувилля $F(\mu)$ постоянна и, в частности, $F'(0)=B\varphi$ есть нуль. Таким образом, $B=0$ и, следовательно, как говорилось выше, $\overline{\operatorname{Ran} A}\subset\mathcal{M}$.

Пусть теперь φ произволен и $\psi_n=n^{-1}(A+n^{-1})^{-1}\varphi$. Поскольку A секториален, $\|\psi_n\|\leqslant\|\varphi\|$. Пусть ψ — слабая предельная точка последовательности $\{\psi_n\}$ при $n\to\infty$. Мы утверждаем, что $A\psi=0$

и $\varphi-\psi_n \in \operatorname{Ran} A$. Отсюда будет следовать, что $\varphi \in \operatorname{Ker} A+\overline{\operatorname{Ran} A}^w$, где $\overline{}^w$ — слабое замыкание. Но по теореме Хана — Банаха $\overline{\operatorname{Ran} A}^w=\overline{\operatorname{Ran} A}$, поскольку $\operatorname{Ran} A$ — подпространство. Итак, теорема будет доказана, если показать, что $A\psi=0$ и $\varphi-\psi_n \in \operatorname{Ran} A$.

Фиксируем произвольный вектор η. Тогда

$$(\eta, A\psi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\eta, A\left(A+\frac{1}{n}\right)^{-1}\varphi\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}(\eta,\varphi)-\frac{1}{n^2}\left(\eta,\left(A+\frac{1}{n}\right)^{-1}\varphi\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\eta,\varphi-\psi_n)=0,$$

поскольку $\|\psi_n\|\leqslant 1$. Это доказывает равенство $A\psi=0$. Более того,

$$\varphi-\psi_n=\left[1-\frac{1}{n}\left(A+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right]\varphi=A\left(A+\frac{1}{n}\right)^{-1}\varphi,$$

так что $\varphi-\psi_n \in \operatorname{Ran} A$. ∎

Иногда при помощи методов этого раздела удается узнать кое-что и о неограниченных несамосопряженных операторах.

Следствие. Пусть A — генератор голоморфной сжимающей полугруппы. Предположим, что $(A+1)^{-1}$ имеет след. Тогда обобщенные собственные векторы A порождают все $\mathscr{H}$.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы достаточно показать, что $(A+1)^{-1}$ есть строго m-аккретивный оператор, поскольку обобщенные собственные векторы A те же, что и у $(A+1)^{-1}$ (задача 159). Пусть $\eta\in\mathscr{H}$ и $\varphi=(A+1)^{-1}\eta$. Тогда

$$(\eta, (A+1)^{-1}\eta)=((A+1)\varphi, \varphi)=\overline{(\varphi, A\varphi)}+(\varphi, \varphi).$$

Таким образом, $|\arg(\eta, (A+1)^{-1}\eta)|\leqslant\pi/2-\varepsilon$, если $|\arg(\varphi, A\varphi)|\leqslant\pi/2-\varepsilon$. Поскольку A строго m-аккретивен, таков же и $(A+1)^{-1}$. ∎

Явная формула для $(1+\mu A)^{-1}$ при $A\in\mathscr{I}_1$ как в форме Племеля — Смитиса, которую мы обсуждали выше, так и в форме Фредгольма, которую мы не обсуждали, имеет ограниченную ценность по той причине, что многие компактные операторы, представляющие практический интерес, не имеют следа, хотя и принадлежат какому-то классу $\mathscr{I}_p$ с $p>1$. Отсюда понятно, почему важно распространить формулу Племеля — Смитиса на операторы из $\mathscr{I}_p$. Мы предлагаем читателю сделать это в задаче 155. Окончательные формулы столь же просты, как и формулы для операторов со следом, и тоже допускают оценку ошибок. В приводимых ниже примерах мы будем иногда пользоваться результатами обобщенной теории.

Пример 3. В § XI.6 мы нашли амплитуду рассеяния для потенциала $V \in R \cap L^1$ в виде решения φ интегрального уравнения

$$\varphi(x, k) = |V(x)|^{1/2} e^{ikx} - \int K(x, y)\, \varphi(y, k)\, dy,$$

где

$$K(x, y) = (4\pi\,|x-y|)^{-1}\,|V(x)|^{1/2} e^{i\,|k|\,|x-y|}V(y)/\,|V(y)|^{1/2}.$$

Заметим, что, поскольку $V \in R$, оператор, задаваемый ядром K, есть оператор Гильберта—Шмидта и что K *не* самосопряжен. Модифицированная теория Фредгольма дает явные выражения для $\varphi(x, k)$ и $T(k, k')$. В отличие от ряда Борна (который, вообще говоря, сходится только при больших $|k|$) эти выражения справедливы для всех $k \notin \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — исключительное множество.

Пример 4. В примере, приведенном в конце § VI.5, было показано, как можно решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в $D \subset \mathbb{R}^3$ с помощью решения интегрального уравнения на ∂D. Там мы обсуждали это уравнение с точки зрения пространства $C(\partial D)$, но это же уравнение можно рассматривать в $L^2(\partial D, dS)$. В этом случае его ядро *не* принадлежит ни $\mathcal{I}_1$, ни даже $\mathcal{I}_2$, но простые соображения показывают, что оно лежит в $\mathcal{I}_4$, а более тонкие рассуждения — что оно лежит в $\mathcal{I}_3$ (или даже в любом $\mathcal{I}_{2+\varepsilon}$ с $\varepsilon > 0$) (задача 160). Таким образом, можно выписать «явные» решения задачи Дирихле.

Пример 5. Согласно теореме XIII.11, оператор Шредингера $-d^2/dx^2 + \lambda V$ имеет неотрицательные собственные значения для всех достаточно малых положительных λ при условии, что потенциал V класса C_0^∞ неположителен и не равен тождественно нулю. Теория определителей, развитая в этом разделе, дает естественные средства для ответа на два дальнейших вопроса в связи с такими операторами. Что можно сказать о спектре таких операторов, если нарушено свойство неположительности V почти всюду? Является ли зависимость собственного значения, определенного при малых λ, аналитической в нуле? В этом примере мы все-таки будем считать, что $V \in C_0^\infty$.

Метод доказательства теоремы XIII.11 показывает, что $E < 0$ есть собственное значение $p^2 + \lambda V$ тогда и только тогда, когда 1 есть собственное значение $-\lambda |V|^{1/2}(p^2 - E)^{-1} V^{1/2}$, где $V^{1/2} = |V|^{1/2} \operatorname{sgn} V$. Пусть $E = -\alpha^2$ для $\alpha > 0$. Тогда $(p^2 - E)^{-1}$ — интегральный оператор с ядром $(2\alpha)^{-1} \exp(-\alpha\,|x-y|)$. Введем операторы K_α, L_α, M_α с ядрами

$$K_\alpha(x, y) = (2\alpha)^{-1}\,|V(x)|^{1/2} \exp(-\alpha\,|x-y|)\, V^{1/2}(y),$$

$$L_\alpha(x, y) = (2\alpha)^{-1}\,|V(x)|^{1/2} V^{1/2}(y), \qquad M_\alpha(x, y) = K_\alpha(x, y) - L_\alpha(x, y).$$

Простые соображения (задача 161) показывают, что M_α имеет след при всех α, а не только при $\alpha>0$, и аналитичен по α. В силу высказанных выше соображений, $E<0$ служит собственным значением $p^2+\lambda V$ тогда и только тогда, когда

$$\det(1+\lambda K_\alpha)=0 \tag{204}$$

при $\alpha=+\sqrt{|E|}$. Далее, собственное значение $p^2+\lambda V$, если оно существует, стремится к нулю при $\lambda\to 0$, поскольку V — ограниченное в смысле форм возмущение p^2. Поскольку M_α непрерывен в точке $\alpha=0$, то, если $\alpha(\lambda)$ — решение (204), оператор $(1+\lambda M_{\alpha(\lambda)})$ обратим для малых λ. Таким образом,

$$\det(1+\lambda K_\alpha)=\det(1+\lambda M_\alpha)\det(1+\lambda L_\alpha(1+\lambda M_\alpha)^{-1}),$$

поэтому (204) равносильно равенству

$$\det(1+\lambda L_\alpha(1+\lambda M_\alpha)^{-1})=0 \tag{205}$$

для малых λ. Но это оператор ранга 1, а для любого оператора B ранга 1 справедливо равенство (задача 162)

$$\det(1+B)=1+\operatorname{Tr}(B).$$

В итоге (205) равносильно условию

$$F(\alpha,\lambda)\equiv\alpha+{}^1/_2\lambda(V^{1/2},\ (1+\lambda M_\alpha)^{-1}|V|^{1/2})=0. \tag{206}$$

Теперь можно ответить на оба заданных выше вопроса. Функция F аналитична по совокупности переменных вблизи $\langle\alpha,\lambda\rangle=\langle 0,0\rangle$, $(\partial F/\partial\alpha)_{\lambda=0}=1$, $F(0,0)=0$. Следовательно, по теореме о неявной функции уравнение $F(\alpha,\lambda)=0$ имеет единственное решение $\alpha(\lambda)$ для λ вблизи нуля, причем $\alpha(\lambda)$ близко к нулю и аналитично по λ. Отсюда заключаем, что $p^2+\lambda V$ имеет собственное значение для малых положительных λ тогда и только тогда, когда $\alpha(\lambda)>0$ при малых положительных λ. В таком случае $E(\lambda)=-\alpha(\lambda)^2$ аналитично по λ около $\lambda=0$. Когда $\alpha(\lambda)>0$? Вычисляя два первых члена разложения в ряд Тейлора $\alpha(\lambda)$, видим, что

$$\alpha(\lambda)=-\frac{\lambda}{2}\int V(x)\,dx-\frac{\lambda^2}{4}\int V(x)\,|x-y|\,V(y)\,dx\,dy+O(\lambda^3).$$

Заметим, что если член порядка $O(\lambda)$ в этом разложении равен нулю, то член порядка $O(\lambda^2)$ автоматически положителен, потому что $-|x-y|$ условно (строго) положительно определена (задача 163). Итак, справедлива следующая

Теорема XIII.110. Пусть V — ненулевая функция класса $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Тогда $-d^2/dx^2+\lambda V$ обладает отрицательным собственным значением для *всех* положительных λ в том и только том случае, когда $\int V(x)\,dx\leqslant 0$, и это собственное значение аналитически зависит от λ около $\lambda=0$.

Дальнейшее обсуждение этого примера, включающее случай, когда V нарушает как требование гладкости, так и компактности носителя, и случай двумерных потенциалов, для которых собственное значение *никогда* не является аналитическим около $\lambda = 0$, проводится в Замечаниях и цитированной там литературе.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ XIII.1. Минимаксная характеристика собственных значений впервые была сформулирована в качестве технической леммы Фишером в работе: E. Fischer, Über Quadratische Formen mit reellen Koeffizienten.— *Monatsh. Math. Phys.* **16** (1905), 234—249. Г. Вейль в работе: H. Weyl, Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen.— *Math. Ann.* **71** (1911), 441—469, воспользовался результатами, по духу очень близкими к принципу минимакса. Однако только Р. Курант в двадцатые годы впервые осознал далеко идущие последствия принципа минимакса, а также его мощь как инструмента исследования. Первая из серии его работ следующая: R. Courant, Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik.— *Math. Z.* 7 (1920), 1—57.

Расширение принципа минимакса с операторов, имеющих компактные резольвенты (что было основным приложением, сделанным Вейлем и Курантом), на произвольные операторы путем выделения существенного спектра давно широко известно. Его приложения (хотя и без точной формулировки) восходят (в опубликованном виде) по крайней мере к работе Като в *Trans. Amer. Math. Soc.*, указанной в замечаниях к § 3.

§ XIII.2. Многие дальнейшие приложения вариационных методов можно найти в книге: С. Гулд, Вариационные методы в задачах о собственных значениях. Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна.— М.: Мир, 1970. Большое количество их также рассеяно по монографии Р. Куранта и Д. Гильберта, Методы математической физики. Т. 1, 2.— М.—Л.: Гостехтеориздат, 1951.

Центральная роль метода Релея—Ритца в развитии вариационных методов описана в обзорном докладе Р. Куранта: R. Courant, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations.— *Bull. Amer. Math. Soc.* **49** (1943), 1—23:

«Со времен Гаусса и У. Томсона центральным пунктом анализа стала эквивалентность между краевыми задачами для уравнений в частных производных и задачами вариационного исчисления. Сначала превалировал теоретический интерес к доказательствам существования, и только намного позднее два физика: лорд Релей и Вальтер Ритц—предугадали возможные практические приложения. Они независимо выдвинули идею применить эту эквивалентность для численного нахождения решений, заменяя вариационные задачи более простыми задачами на отыскание экстремума, в которых следовало определить уже лишь конечное число параметров. Релей в своей классической работе «Теория звука», а также в других публикациях первым воспользовался такой процедурой. Но только впечатляющий успех Вальтера Ритца, а также сопутствовавшие ему трагические обстоятельства стали причиной общего к ней интереса. В двух публикациях 1908 и 1909 гг. Ритц, сознававший свою надвигающуюся смерть от чахотки, дал блестящее изложение этой теории и одновременно применил свой метод к вычислению линий узлов колебаний пластин—задаче классической физики, не имевшей до этого удовлетворительного решения».

«Теория звука» лорда Релея имеется в русском переводе: Дж. В. Стресс (лорд Релей), Теория звука.— М.: Гостехиздат, 1955. Две упомянутые работы