97 (1976), 279—288. В ней утверждение, что $-d^2/dx^2+\lambda V$ обладает связанным состоянием при всех малых λ тогда и только тогда, когда $\int V(x)\,dx \leqslant 0$, доказано для всех V, таких, что $\int (|x|^2+1)\,|V(x)|\,dx < \infty$. Аналитическая часть теоремы XIII.110 не требует, чтобы носитель V был компактным; достаточно, что $\int e^{a|x|}\,|V(x)|\,dx < \infty$ для некоторого $a > 0$. В двумерном пространстве наличие у $-\Delta+\lambda V$ связанного состояния при всех малых λ эквивалентно условию $\int V(x)\,dx \leqslant 0$ только до тех пор, пока

$$\int |V(x)|^{1+\varepsilon}\,dx < \infty \quad \text{при некотором } \varepsilon > 0$$

и

$$\int |V(x)|(1+|x|^2)^{\varepsilon}\,dx < \infty \quad \text{при некотором } \varepsilon > 0.$$

Но в двумерном случае собственное значение $E(\lambda)$ *не аналитично* по λ в нуле. На самом деле $|E(\lambda)| \leqslant \exp(-1/a\lambda)$ с подходящим $a > 0$. Все эти результаты основаны на применении модифицированных определителей $\det_2$ для $\mathcal{I}_2$ (см. задачу 155). Дальнейшее обсуждение этих вопросов см. в работах: R. Blankenbecker, M. L. Goldberger, B. Simon, The bound states of weakly coupled long-range one-dimensional quantum Hamiltonians.—*Ann. Phys.* **108** (1977), 69—78; K. Klaus.—*Ann. Phys.* (to appear).

Наконец, заметим, что функция Йоста, обсуждавшаяся в § XI.8, есть определитель Фредгольма. Уравнение Липмана—Швингера для s-волны имеет вид

$$\varphi(\cdot, k) = \psi_0(\cdot, k) - (A_k\psi)(\cdot, k), \tag{207}$$

где A_k — интегральный оператор с ядром

$$k^{-1}\exp[ik(\max\{x, y\})]\sin[k(\min\{x, y\})]\,V(y).$$

Можно показать, что $\eta(k) = \det(1+A_{-k})$, а факторизация $S(k) = \eta(k)/\eta(-k)$ связана с мероморфным решением (207).

ЗАДАЧИ

†*1*. Докажите, что $\mu_n(A) \leqslant \mu_n(B)$ для любого n, если $A \leqslant B$ (в смысле определения § XIII.2).

2. Докажите с помощью принципа минимакса, что

$$|\mu_k(A) - \mu_k(B)| \leqslant \|A-B\|$$

для ограниченных самосопряженных операторов с μ_k, заданными теоремой XIII.1.

†*3*. Докажите теорему XIII.4.

†*4*. (а) Пусть $p = id/dx$ действует в $L^2(\mathbb{R})$. Докажите, что

$$p^2+x^2+\beta x^4 \leqslant C_1(p^2+x^2)^2 \leqslant C_2(p^2+x^2+\beta x^4)^2$$

для любого фиксированного $\beta > 0$.

(b) Выведите отсюда, что если $H=p^2+x^2+\beta x^4$, то

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{(n)}\varphi_i,\ H\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^{(n)}\varphi_i\right)\right)=\mu_n(H),$$

где $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ — собственные функции оператора p^2+x^2, $\sum a_i^{(n)}\varphi_i$ — разложение n-й собственной функции H по φ_i.

5. Пусть $H=p^2+x^2+\beta x^{2m}$. Докажите применимость теоремы XIII.4, используя в качестве пробных функций собственные функции оператора p^2+x^2.

6. Найдите верхнюю границу энергии основного состояния гамильтониана $p^2+x^2+0{,}2x^4$, используя φ_1 и φ_3. С помощью неравенства Темпля найдите нижнюю границу. Сравните их с «точным» результатом и вычислениями по теории возмущений § XII.3.

7. Используя пробную функцию вида $\psi(\mathbf{r})=c\exp(-\alpha r^2)$ и изменяя α, вычислите оценку сверху для основного состояния оператора $-\Delta-r^{-1}$ и сравните ее с точным ответом.

8. Напишите программу для вычисления на ЭВМ нижнего собственного значения оператора $p^2+x^2+x^4$ с точностью до шестого знака.

9. Пусть $\lambda_n(c)$ есть n-е собственное значение оператора $-d^2/dx^2+x^2+cx^4$ при $c\geqslant 0$. Найдите постоянную $c_0>0$, такую, чтобы $\lambda_2(c)-\lambda_1(c)\geqslant c_0$ для всех c. [*Указание.* Сравните $\lambda_n(c)$ с собственными значениями операторов $-d^2/dx^2+x^2$ и $-d^2/dx^2+cx^4$ и воспользуйтесь принципом минимакса.]

10. Найдите и докажите аналог теоремы XIII.4 для возбужденных состояний.

11. (Теорема Релея.) Пусть $\mu_1,\ \ldots,\ \mu_n$ — собственные значения эрмитовой $n\times n$-матрицы и $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{n-1}$ — собственные значения ее сужения на $(n-1)$-мерное подпространство. Докажите, что $\mu_1\leqslant\lambda_1\leqslant\mu_2\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\mu_{n-1}\leqslant\leqslant\lambda_{n-1}\leqslant\mu_n$.

12. Предположим, что V — регулярное возмущение H_0 и что H_0 имеет дискретное невырожденное основное состояние. Пусть $E(\lambda)$ — энергия основного состояния оператора $H_0+\lambda V$, а $\psi(\lambda)$ — нормированный собственный вектор основного состояния. Пусть задан вектор $\varphi(\lambda)$, такой, что $\|\varphi(\lambda)\|^{-1}\varphi(\lambda)-\psi(\lambda)=O(\lambda^{n+1})$ в смысле H_0-граф-нормы и $\|\varphi(\lambda)\|=1+O(\lambda)$ (например, $\varphi(\lambda)$ может быть суммой n первых членов ненормированного ряда Релея — Шредингера).

(a) Докажите, что $(H(\lambda)-E(\lambda))\varphi(\lambda)=O(\lambda^{n+1})$.

(b) Докажите, что

$$(\varphi(\lambda),\ H(\lambda)^2\varphi(\lambda))\,\|\varphi(\lambda)\|^2-(\varphi(\lambda),\ H(\lambda)\varphi(\lambda))^2=O(\lambda^{2n+2}).$$

(c) Докажите, что $E(\lambda)-\|\varphi(\lambda)\|^{-2}(\varphi(\lambda),\ H(\lambda)\varphi(\lambda))=O(\lambda^{2n+2})$, используя неравенства Темпля.

Литература: E. Harrel, II. Princeton Univ. Thesis.— Princeton, N. J., 1976.

13. (a) Предположим, что P — проектор, $V>0$ — положительный, а H_0 — самосопряженный операторы. Докажите, что в смысле квадратичных форм $H_0+V\geqslant H_0+V^{1/2}PV^{1/2}$.

(b) Пусть A — самосопряженный оператор, $\operatorname{Ker} A=0$, и Q — конечномерный проектор, для которого $\operatorname{Ran} Q\subset D(V^{-1/2}A)$. Пусть $(QAV^{-1}AQ)^{-1}$ —

оператор, обратный к $QAV^{-1}AQ$ на $\operatorname{Ran} Q$. Докажите, что

$$P = V^{-1/2} AQ (QAV^{-1}AQ)^{-1} QAV^{-1/2}$$

— проектор, и выведите отсюда, что

$$H_0 + V \geqslant H_0 + AQ (QAV^{-1}AQ)^{-1} QA.$$

(c) Докажите, что для собственного вектора ψ_0 оператора H_0

$$H_0 + (\psi_0, V^{-1}\psi_0)^{-1} (\psi_0, \cdot)\, \psi_0 \leqslant H_0 + V.$$

[*Указание:* используйте $A = 1$, $Q = (\psi_0, \cdot)\, \psi_0$.]
Литература к (c): W. Thirring, Vorlesungen über Mathematische Physik, T.7: Quantenmechanik.— Universität Wien Lecture Notes, Section 2.9.

14. (a) Предположим, что $\sigma(H) \cap (a, b) = \varnothing$ для некоторого самосопряженного оператора H. Пусть φ лежит в $D(H)$ и $\|\varphi\| = 1$. Докажите, что

$$\left(\varphi, \left(H - \frac{a+b}{2}\right)^2 \varphi\right) \geqslant \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

(b) Выразите (a) через $\gamma = (\varphi, H\varphi)$ и $\eta = (\varphi, H^2\varphi) - (\varphi, H\varphi)^2$, так чтобы получить неравенство $\eta \geqslant (\gamma - a)(b - \gamma)$.

(c) Выведите отсюда, что для $\varphi \in D(H)$, таких, что $\eta < (\gamma - a)(b - \gamma)$, $\sigma(H) \cap (a, b) \neq \varnothing$.

15. (Обобщенное неравенство Темпля.) Предположим, что $\sigma(H) \cap (a, b)$ состоит из единственной точки λ. Пусть φ — такой пробный вектор, что $\varphi \in D(H)$ и

$$\eta < (\gamma - a)(b - \gamma), \tag{208}$$

где $\gamma = (\varphi, H\varphi)$, $\eta = (\varphi, H^2\varphi) - \gamma^2$.

(a) Докажите, что $\gamma \in (a, b)$.

(b) Пусть $a' = \gamma - (b - \gamma)^{-1} \eta$ и $b' = \gamma + (\gamma - a)^{-1}\eta$.
Докажите, что $a < a' < b' < b$.

(c) Пусть $a < a'' < a'$. Докажите, что $\eta < (\gamma - a'')(b - \gamma)$, и выведите отсюда, что $\sigma(H) \cap (a'', b) \neq \varnothing$ (воспользуйтесь задачей 14).

(d) Докажите обобщенное неравенство Темпля, т. е. выведите из (208) неравенство

$$\gamma - (b - \gamma)^{-1} \eta < \lambda < \gamma + (\gamma - a)^{-1} \eta.$$

Примечание. По поводу ссылок, касающихся этой задачи, см. замечания к § XIII.2.

†*16.* (a) Докажите, что

$$H_l = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + V(r)$$

в существенном самосопряжен на $\{u \mid u \in C_0^\infty(0, \infty)\}$, если $l \neq 0$ и $V \in C_0^\infty(0, \infty)$.

(b) Докажите, что $H_0 = -d^2/dr^2 + V(r)$ в существенном самосопряжен на $\{u \mid u \in C_0^\infty[0, \infty),\ u(0) = 0\}$.

†*17.* Пусть функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ имеет в своем носителе изолированные нули. Пусть $H_0 = -d^2/dx^2$ действует на естественной области определения. Докажите, что $|\varphi| \in Q(H_0)$.

18. (Оценка Калоджеро.) Пусть $V \in C_0^\infty[0, \infty)$ отрицателен. Пусть u — решение краевой задачи $u'' = Vu$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$. Определим $\nu(r)$ равенством $\operatorname{tg} \nu(r) = |V(r)|^{1/2} u(r)/u'(r)$.

(a) Докажите, что ν удовлетворяет задаче

$$\nu'(r) = |V(r)|^{1/2} - {}^1/_2\,(V'(r)/|V(r)|)\cos^2\nu\,\mathrm{tg}\,\nu,$$
$$\nu(0) = 0.$$

(b) Выведите отсюда, что для монотонных V справедлива оценка

$$N(V) \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^\infty |V(r)|^{1/2}\,dr.$$

19. (Оценка Баргмана.) Пусть u — решение уравнения $u'' = [l(l+1)r^{-2} + V(r)]\,u$, $u(0)=0$.

(a) Определим $a_l(r)$ соотношением

$$u'(r)\,[r^{l+1} + a_l(r)\,r^{-l}] = u(r)\,[(l+1)\,r^l - l a_l(r)\,r^{-l-1}].$$

Докажите, что

$$a_l'(r) = -(2l+1)^{-1}\,V(r)\,r^{-2l}\,[r^{2l+1} + a_l(r)]^2.$$

(b) Пусть $b_l(r) = a_l(r)/r^{2l+1}$. Докажите, что $b_l(0)=0$ и что в области, где $b>0$,

$$b_l'(r) \leqslant (2l+1)^{-1}\,r\,|V(r)|\,[b_l(r)+1]^2.$$

(c) Получите оценку Баргмана (теорема XIII.9(a)) для произвольных l.

20. (a) Используя вилку Неймана (§ 15), докажите, что для ограниченных V, имеющих компактный носитель, $-\Delta + \lambda V$ имеет не более одного отрицательного собственного значения при малых λ.

(b) Используя вилку Неймана, докажите, что для ограниченных V на $\mathbb{R}^n$, имеющих компактный носитель, $-\Delta + V$ имеет лишь конечное число отрицательных собственных значений.

21. Найдите потенциал V в $L^2(\mathbb{R})$, имеющий компактный носитель, отрицательный на некотором открытом множестве и такой, что $-d^2/dx^2 + V$ не имеет отрицательных собственных значений.

**22.* Пусть V — функция на $\mathbb{R}$, такая, что $\int_{-\infty}^{\infty} r\,|V(r)|\,dr < \infty$. Докажите, что $-d^2/dx^2 + V$ имеет не более $1 + \int_{-\infty}^{\infty} r\,|V(r)|\,dr$ связанных состояний.

[*Указание.* Воспользуйтесь оценкой Баргмана и граничными условиями Дирихле.]

23. (a) Фиксируем l. Пусть V — центрально-симметричный потенциал с $n_l(V) = n$. Покажите, что $V = V_1 + \ldots + V_n$, где носители V_i не пересекаются и $n_l(V_i) \geqslant 1$. [*Указание:* учтите нули $u_l(r;\ E=0)$.]

(b) Предположим, что известно, что $n_l(V) = 0$, если

$$\int_0^\infty f(x)\,g(V(x))\,dx < 1$$

для фиксированных вещественных положительных f, g. Докажите, что для произвольных вещественных положительных f, g

$$n_l(V) \leqslant \int_0^\infty f(x)\,g(V(x))\,dx.$$

Литература: статья Глазера, Мартина, Грёссе и Тирринга, упомянутая в замечаниях к § 3.

24. (a) Пусть $n \geqslant 3$ и $V \leqslant 0$ почти всюду. Докажите, что $N(V)=0$ тогда и только тогда, когда норма $|V|^{1/2}(-\Delta)^{-1}|V|^{1/2}$ меньше 1.

(b) Пусть $n \geqslant 3$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Покажите, что существует постоянная $C_{\alpha, n}$, такая, что $N(V)=0$, если $\| r^{\alpha} | V|^{1/2} \|_{n/(1-\alpha)} \leqslant C_{\alpha, n}$. [*Указание:* всмотритесь в доказательство теоремы Стрихартца и теоремы X.21.]

(c) Пусть $n_0(V)$ — число связанных состояний при нулевом моменте количества движения в $\mathbb{R}^3$. Докажите, что при $1/2 \leqslant \alpha < \infty$ существует постоянная $\tilde{C}_{\alpha, 1}$, такая, что $n_0(V)=0$, если

$$\int r^{\alpha/(1-\alpha)} | V(r)|^{1/(2-2\alpha)} dr \leqslant \tilde{C}_{\alpha, 1}.$$

(d) Получите оценку ГМГТ с точностью до постоянной.

Литература к (a)—(c): статья Глазера и др. и обзорная статья Саймона, упомянутые в замечаниях к § 3.

†*25.* (a) Пусть A — положительный самосопряженный оператор, а B — ограниченное в смысле форм возмущение A с нулевой относительной гранью. Предположим, что $[0, \infty) \subset \sigma(A+\lambda B)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Докажите, воспользовавшись принципом минимакса, что $\mu_n(A+\lambda B)$ — монотонно убывающая непрерывная функция $\lambda \in (0, \infty)$.

(b) Предположим, что $\sigma_{\text{ess}}(A+\lambda B)=[0, \infty)$ для всех $\lambda \in (0, \infty)$. Докажите утверждение (a) с помощью теории возмущений гл. XII.

†*26.* Восполните детали доказательства теоремы XIII.10.

27. Получите оценку Жиларди—Римини:

$$N(V) \leqslant \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \int \frac{V(x)\, V(y)}{|x-y|^2}\, d^3x\, d^3y.$$

28. (a) Пусть $V \in R$ и $\{P_\Omega^\lambda\}$ — спектральные проекторы оператора $-\Delta+\lambda V$. Пусть $\lambda > 1$. Докажите, что

$$\dim(\operatorname{Ran} P^{\lambda}_{(-\infty, 0)}) \geqslant \dim(\operatorname{Ran} P^{1}_{(-\infty, 0)}).$$

(b) Выведите неравенство

$$\dim(\operatorname{Ran} P^{1}_{(-\infty, 0)}) \leqslant (4\pi)^{-2} \int |x-y|^{-2}\, |V(x)|\, |V(y)|\, d^3x\, d^3y.$$

†**29.* Докажите, что для $V, W \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ функция

$$\int d\mu_{x, y;\, t}\, V(\omega(s)) \exp\left(-\int_0^t W(\omega(s))\, ds\right),$$

где $d\mu_{x,y;\,t}$ — условная мера Винера, непрерывна по x, y, t для всех $t > 0$ и x, $y \in \mathbb{R}^n$. [*Указание.* Полезно провести все интегрирования по одному и тому же множеству путей, отображая пути ω, выходящие из 0 и возвращающиеся в 0 через время 1, в пути $\bar{\omega}$, идущие из x в y за время t, полагая

$$\bar{\omega}(s) = \omega(st^{-1}) + x + (y-x)\, st^{-1}.]$$

†*30.* (a) Предположим, что A — оператор со следом на $L^2(\mathbb{R}^n)$, ядро которого $K(x, y)$ поточечно положительно и непрерывно. Докажите, что

$\mathrm{Tr}(\dot{A}) = \int K(x, x)\,dx$. [*Указание*. Пусть $\{P_n\}$ — последовательность проекторов на конечномерные пространства кусочно постоянных функций на $\mathbb{R}^n$, такая, что $P_n \longrightarrow I$ сильно. Представьте $\mathrm{Tr}(A)$ как $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Tr}(P_n A P_n)$ и вычислите его в явном виде.]

(b) Докажите, что при $W \in L^1(\mathbb{R}^n)$ оператор $W^{1/2} e^{-tH_0}$ есть оператор Гильберта — Шмидта. То же самое докажите для $W^{1/2} e^{-t(H_0+V)}$ при $W \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $V \geqslant 0$.

(c) Докажите (14).

31. (a) Пусть $N_\alpha(V)$ — число собственных значений оператора $-\Delta+V$, действующего в $L^2(\mathbb{R}^3)$, меньших $-\alpha$. С помощью оценки Бирмана — Швингера и неравенства Юнга докажите, что

$$N_\alpha(V) \leqslant (4\pi)^{-1}\left(\sqrt{2\alpha}\right)^{-1} \int |\min\{V(x)+\alpha/2,\ 0\}|^2\,dx.$$

(b) Пусть $E_1(V), \ldots, E_n(V)$ — отрицательные собственные значения $-\Delta+V$. Докажите, что

$$\sum_i |E_i(V)| = \int_0^\infty N_\alpha(V)\,d\alpha.$$

(c) Получите оценку Либа — Тирринга

$$\sum_i |E_i(V)| \leqslant \frac{4}{15\pi} \int |V_-(x)|^{5/2}\,dx.$$

32. Пусть $S_\gamma(V)$ — сумма чисел $|E|^\gamma$, взятая по всем отрицательным собственным значениям $-\Delta+V$.

(a) Докажите, что $S_\gamma(V) = \gamma \int_0^\infty E^{\gamma-1} N_E(V)\,dE$, если $\gamma > 0$, а $N_E(V)$ — число собственных значений, меньших $-E$.

(b) Докажите, что для $V \in C_0^\infty$, $W = -V_-$ и любого m

$$S_\gamma(V) \leqslant \gamma\Gamma(\gamma)(m+1) \int_0^\infty t^{-\gamma}\,\mathrm{Tr}\left[\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^j e^{-t(H_0+jW)}\right] dt,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u}\,du$.

(c) Докажите, что если V — некоторая функция на $\mathbb{R}^n$ и γ — любое неотрицательное число, такое, что $\gamma+n/2 > 1$, то

$$S_\gamma(V) \leqslant C_{n,\gamma} \int |V_-(x)|^{n/2+\gamma}\,d^n x.$$

33. (a) С помощью оценки Цвикеля — Либа — Розенблюма докажите, что для $n \geqslant 3$

$$N_E(V) \leqslant C_n \int |(E+V)_-(x)|^{n/2}\,d^n x.$$

(b) Докажите, что для $V \in C_0^\infty$

$$\gamma \int_0^\infty dE \int |(E+V)_-(x)|^{n/2} E^{\gamma-1} d^n x = d_\gamma \int |V_-(x)|^{n/2+\gamma} d^n x,$$

где $d_\gamma = \gamma \int_0^1 (1-E)^{n/2} E^{\gamma-1} dE$.

(c) Дайте другое доказательство оценки в задаче 32(c).

Примечание. Оценки в задачах 31, 32(c), 33(c) при $\gamma > 0$ принадлежат Либу и Тиррингу: E. Lieb and W. Thirring, Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger equation and their relation to Sobolev inequalities. In: Studies in Mathematical Physics: Essays in Honor of Valentine Bargmann (E. Lieb, B. Simon and A. S. Wightman, eds.).— Princeton Univ. Press, 1976. Их метод доказательства проиллюстрирован в задаче 31.

34. (a) Пусть C — компактный оператор и $A(z) = z^{-1}C$. Покажите, что $(1-A(z))^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда z не является собственным значением C. Докажите, что утверждение теоремы XIII.13 может нарушаться, если вычет $A(z)$ является не оператором конечного ранга, а компактным оператором.

(b) Пусть $A(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} n P_n$, где $\{P_n\}$ — семейство проекторов ранга 1, причем $P_n P_m = 0$ при $n \neq m$. Докажите, что утверждение теоремы XIII.13 может нарушаться, если $A(z)$ имеет существенные особенности.

†*35.* Докажите, что для любого замкнутого оператора $\sigma_{ess}(A)$ — замкнутое подмножество $\mathbb{C}$.

†*36.* Докажите пункт (b) теоремы о сильном спектральном отображении (лемма 2, § 4).

37. Пусть A и B — положительные самосопряженные операторы, такие, что оператор $(A+1)^{-n} - (B+1)^{-n}$ компактен при некотором целом $n > 0$. Докажите, что $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$.

38. (a) Пусть A и C — замкнутые операторы с $D(C) \supset D(A)$. Докажите, что оператор $C(A-z)^{-1}$ компактен при некотором $z \in \rho(A)$ тогда и только тогда, когда он компактен при всех $z \in \rho(A)$.

(b) Докажите, что $C(A-z)^{-1}$ компактен тогда и только тогда, когда C — компактное отображение из $\langle D(A), \|\cdot\|_A\rangle$ в $\langle \mathcal{H}, \|\ \|\rangle$, где $\|\psi\|_A^2 = \|\psi\|^2 + \|A\psi\|^2$.

39. Пусть A самосопряжен и положителен. Ограниченное в смысле форм возмущение C оператора A называется относительно компактным в смысле форм тогда и только тогда, когда C — компактный оператор из $\mathcal{H}_{+1}$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Докажите, что если C относительно компактен в смысле форм, то C имеет нулевую относительную грань в смысле форм и $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(A+C)$.

40. Найдите симметрический оператор H с самосопряженными расширениями A и B, такими, что $\sigma_{ess}(A) \neq \sigma_{ess}(B)$. [*Указание.* Пусть h — симметрический оператор с индексами дефекта (1, 1), и пусть a и b — подходящие самосопряженные расширения. Возьмите $H = h \otimes I$, $A = a \otimes I$ и $B = b \otimes I$, где I — единичный оператор на l_2.]

41. Пусть $V \in L^q(\mathbb{R}^n) + L^\infty_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$ с $q \geqslant \max\{n/2, 2\}$, если $n \neq 4$, и $q > 2$, если $n = 4$. Докажите, что V — относительно компактное возмущение $-\Delta$, так что $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta + V) = [0, \infty)$.

†*42.* С помощью теоремы XIII.17 докажите, что

$$\inf\{\Sigma_D \mid \#(D) = m+1\} \geqslant \inf\{\Sigma_D \mid \#(D) = m\},$$

и выведите отсюда, что

$$\inf\{\Sigma_D \mid \#(D) = 2\} = \inf\{\Sigma_D \mid \#(D) \geqslant 2\}.$$

43. (a) Предположим, что $U(t)$ — однопараметрическая унитарная группа с инфинитезимальным генератором, имеющим лишь абсолютно непрерывный спектр. Пусть A — компактный оператор, такой, что $AU(t) = U(t)A$. Докажите, что $A = 0$. [*Указание:* докажите, что $\operatorname{w-lim}_{t\to\infty} U(t) = 0$.]

†(b) Докажите, что операторы, отвечающие несвязным диаграммам (по любому правилу § 5), некомпактны. Подчеркнем, что движение центра масс отделено.

†*44.* (a) Пусть $V \in R$; покажите, что существуют $V^{(n)} \in C_0^\infty$, такие, что $\|V^{(n)} - V\|_R \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$.

(b) Пусть $V \in R + (L^\infty)_\varepsilon$; покажите, что существуют $V^{(n)} \in C_0^\infty$, такие, что $\|(H_0+1)^{-1/2}(V^{(n)} - V)(H_0+1)^{-1/2}\| \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$.

(c) Пусть $V_{ij} \in R + (L^\infty)_\varepsilon$, $1 \leqslant i < j < N$; покажите, что существуют $V_{ij}^{(n)} \in C_0^\infty$, такие, что $H^{(n)} = H_0 + \sum_{i<j} V_{ij}^{(n)}$ сходится в смысле резольвентной нормы к $H = H_0 + \sum_{i<j} V_{ij}$.

45. (a) Пусть $V \in L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)_\varepsilon$ и $\psi \in D(\Delta)$. Для любого $a \in \mathbb{R}^3$ положим $\psi_a(x) = \psi(x-a)$. Докажите, что $\lim_{a\to\infty} \|V\psi_a\| = 0$.

(b) Докажите, что $\lim_{a\to\infty} \|(-\Delta + V - \lambda)\psi_a\| = \|(-\Delta - \lambda)\psi\|$, и выведите отсюда, что $[0, \infty) \subset \sigma(-\Delta + V)$.

(c) Пусть H — гамильтониан вида $H_0 + \sum_{i<j} V_{ij}$ с $V_{ij} \in L^2 + (L^\infty)_\varepsilon$. Без помощи волновых операторов докажите, что $[\Sigma, \infty) \subset \sigma(H)$.

Примечание. Такой метод использовал Хунцикер в статье, упомянутой в замечаниях к § 5.

46. Пусть $\tilde{H}_0^{(N)} = \sum_{i=1}^{N} (2m)^{-1}\Delta_i$ и $H^{(N)} = H_0^{(N)} + \sum_{i<j} V(r_i - r_j)$ (все V_{ij} одинаковые). Предположим, что $V \in R + (L^\infty)_\varepsilon$. Пусть $\mathcal{H}^{(N)}_{\text{Fermi}}$ — подпространство $L^2(\mathbb{R}^{3N-3})$ функций, нечетных относительно замен координат, вызванных перестановкой любых двух частиц. Пусть $H_{\text{F}}^{(N)} = H^{(N)} \restriction \mathcal{H}^{(N)}_{\text{Fermi}}$. Докажите, что $\sigma_{\text{ess}}\left(H_{\text{F}}^{(N)}\right) = [\Sigma, \infty)$, где $\Sigma = \inf \sigma\left(H_{\text{F}}^{(N-1)}\right)$.

Примечание 1. При доказательстве аналога леммы 1 в нашем доказательстве теоремы ХВЖ легче применять метод Хунцикера (задача 45), чем волновые операторы.

Примечание 2. По поводу распространения результатов на другие симметрии относительно перестановок и другие группы симметрий см. статьи

Саймона, Балслева и Жислина и Сигалова, упомянутые в замечаниях к § 5.

47. (a) Предположим, что основная оценка (31) выполнена для плотного множества векторов φ. Докажите, что тогда $R(\lambda \pm i\varepsilon)\varphi \in D(A)$ для почти всех λ при всех φ ($\varepsilon \neq 0$ фиксировано) и (31) справедлива при всех φ.

(b) Предположим, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \| AR(\lambda \pm i\varepsilon)\varphi\|^2 d\lambda < \infty$ для любого $\varphi \in \mathscr{H}$ при любом фиксированном $\varepsilon > 0$. Докажите, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \| AR(\lambda \pm i\varepsilon)\varphi\|^2 d\lambda \leqslant C \|\varphi\|^2$$

с некоторой постоянной C для всех φ. [*Указание:* примените теорему о замкнутом графике к отображению $\varphi \mapsto AR(\lambda + i\varepsilon)\varphi$ пространства $\mathscr{H}$ в $L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathscr{H})$.]

(c) Предположим, что $\sup\limits_{\varepsilon > 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \| AR(\lambda \pm i\varepsilon)\varphi\|^2 d\lambda < \infty$ для каждого φ.

Докажите, что A H-гладкий. [*Указание:* используйте (b) и принцип равномерной ограниченности.]

48. Пусть f — ограниченная борелева функция на $\mathbb{R}$; предположим, что $f(H)$ есть H-гладкий оператор для некоторого самосопряженного оператора H. Докажите, что $f(H) = 0$.

49. (a) Пусть оператор H самосопряженный, а A H-гладкий. Докажите, что A $|H|^{\alpha}$-ограничен для любого $\alpha > 1/2$. [*Указание:* используйте пункт (3) теоремы XIII.25 для доказательства ограниченности $(H^2+1)^{-\alpha/2}A^*$.]

(b) Пусть $H = -id/dx$ в $L^2(\mathbb{R})$. Докажите, что существуют неограниченные $\varphi \in Q(H)$.

(c) Найдите H-гладкий оператор A, который не ограничен относительно $|H|^{1/2}$. [*Указание:* используйте пример 1.]

50. Пусть H — оператор умножения на x в $L^2([\alpha, \beta], dx)$ с $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Предположим, что A ограничен и K — интегральное ядро A^*A. Докажите, что $\|A\|_H^2 = \|K\|_\infty$.

**51.* Пусть H — оператор умножения на x в $L^2([\alpha, \beta], dx)$ с $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Предположим, что A ограничен и H-гладок. Докажите, что A^*A представим в виде (37). [*Указание.* Сначала покажите, что A^*x лежит в L^∞ для любого x, для которого $\|A^*x\|_\infty \leqslant C\|x\|_2$, а затем воспользуйтесь теоремой Данфорда — Петтиса (задача 33 к гл. V) и найдите ограниченную измеримую функцию F из $[\alpha, \beta]$ в $\mathscr{H}$, такую, что $(A^*x)(\lambda) = (F(\lambda), x)$.] *Литература:* статья Като в *Studia Math.* (см. замечания к § 7).

52. Пусть A и B — самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ соответственно. Предположим, что C A-гладкий, а D — ограниченный оператор в $\mathscr{H}_2$. Докажите, что $C \otimes D$ является $(A \otimes I + I \otimes B)$-гладким.

53. В условиях теоремы XIII.26 докажите, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leqslant 1$,

$H_0+\lambda\sum_{i=1}^{n} C_i$ — строго m-аккретивная форма на $Q(H_0)$ и для спектра соответствующего оператора H выполнено включение $\sigma(H)\subset\sigma(H_0)$, причем $\sup\| |C_i|^{1/2}(H-z)^{-1}|C_j|^{1/2}\|<\infty$ для всех i, j (продолжение в следующей задаче).

*54. (Продолжение задачи 53.) Пусть $R(\mu)$ — резольвента H_0, $R(\mu;\ \lambda)$ — резольвента $H(\lambda)=H_0+\lambda\sum_{j=1}^{n} C_j$. Введем $W^{\pm}(\lambda)$ равенством

$$(\varphi,\ W^{\pm}(\lambda)\psi)=(\varphi,\ \psi)\mp$$
$$\mp\frac{\lambda}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\left(C_j^{1/2}R(\mu\pm i0)\varphi,\ \ |C_j|^{1/2}R(\mu\mp i0;\ \lambda)\psi\right)d\mu.$$

Докажите, что

(a) $W^{\pm}(\lambda)$ аналитичны в области $|\lambda|\leqslant 1$;

(b) $W^{\pm}(\lambda)$ обратимы и $H(\lambda)=W^{\pm}(\lambda)H_0W^{\pm}(\lambda)^{-1}$;

(c) если λ вещественно, то $W^{\pm}(\lambda)=\Omega^{\pm}(\lambda)$.

55. Пусть A и H_0 — самосопряженные операторы и $\operatorname{Ker} A=\{0\}$. Докажите, что для любых положительных $n\neq m$ по крайней мере один из операторов A^n и A^{-m} H_0-гладкий.

56. Пусть $V\in R$ и $\|V\|_R<4\pi$. Докажите, что волновые операторы осуществляют унитарную эквивалентность между $-\Delta$ и $-\Delta+V$ и, в частности, что множество состояний рассеяния полно.

57. (a) Пусть $H_n=H_0+A_n^*B_n$, где B_n H_0-гладкий, а A_n H_n-гладкий. Предположим, что $\sup_n\|A_n\|_{H_n}<\infty$ и $\lim_{n\to\infty}\|B_n\|_{H_0}=0$. Докажите, что $\Omega_n^{\pm}=\operatorname{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{itH_n}e^{-itH_0}$ *равномерно* сходится к I. В частности, проверьте равномерную непрерывность $\Omega^{\pm}(\lambda)=\operatorname{s-lim}_{t\to\mp\infty} e^{it(H_0+\lambda C)}\times$ $\times e^{-itH_0}$ для $\lambda\in(-1,\ 1)$ в контексте теоремы XIII.26.

(b) Пусть $V_n\longrightarrow V$ в норме Рольника. Докажите, что соответствующие S-матрицы сходятся сильно. [*Указание.* Представьте V_n в виде W_n+Y_n, а V — в виде $W+Y$, так чтобы $Y_n\longrightarrow Y$ в $L^1\cap R$, $W_n\longrightarrow W$ в R и $\sup_n\|W_n\|_R<4\pi$.]

58. (a) Пусть H_0 — оператор в $L^2[0,\ \infty)$, который представляет собой замыкание $-d^2/dx^2$, определенного на $\{u\in C_0^\infty[0,\ \infty)\mid u(0)=0\}$. Пусть $E\notin\sigma(H_0)$ и

$$K_E(x,\ y)=E^{-1/2}\sin\left[\sqrt{E}\min\{x,\ y\}\right]e^{i\sqrt{E}\max\{x,\ y\}},$$

где $\sqrt{E}$ — квадратный корень с $\operatorname{Im}\sqrt{E}>0$. Докажите, что

$$[(H_0-E)^{-1}\varphi](y)=\int_0^\infty K_E(x,\ y)\,\varphi(y)\,dy.$$

(b) $|K_E(x,\ y)|\leqslant\sqrt{xy}$.

(c) Пусть V—измеримая функция на $[0, \infty)$ с $\int_0^\infty x\,|V(x)|\,dx < \infty$. Тогда

$$\sup_{E \in \mathbb{R}} \| |V|^{1/2} (H_0 - E)^{-1} |V|^{1/2} \| < \infty.$$

(d) Если $\int_0^\infty x\,|V(x)|\,dx < 1$, то H_0 и $H_0 + V$ унитарно эквивалентны, а волновые операторы осуществляют эту эквивалентность.

59. Пусть A и H—ограниченные самосопряженные операторы и $R(\mu) = (H-\mu)^{-1}$. Докажите, что

$$|\varepsilon|\,|(R(\lambda+i\varepsilon)\varphi,\ [H, A]\, R(\lambda+i\varepsilon)\varphi)| \leqslant \|A\|\,\|\varphi\|^2,$$

и с помощью этого неравенства докажите, что $(i[H, A])^{1/2}$ H-гладкий, если $i[H, A] \geqslant 0$.

60. Пусть A и B—ограниченные самосопряженные операторы и $c > 0$—число. Докажите двумя способами, что $i[A, B] \geqslant cI$ не верно:

(a) применяя теорию гладких возмущений;

(b) проделывая прямые вычисления (рассмотрите $e^{itA} B e^{-itA}$).

61. Распространите теорему Като—Путнама на неограниченные H, понимая в этом случае $i[H, A] > 0$ как неравенство $i(A\varphi, H\varphi) - i(H\varphi, A\varphi) > 0$ для всех $\varphi \in D(H)$, $\varphi \neq 0$.

†*62.* Предположим, что $f(t)$—равномерно непрерывная функция на $\mathbb{R}$ со значениями в банаховом пространстве. Предположим также, что $\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^p dt < \infty$ для некоторого $p < \infty$ и f сильно дифференцируема с равномерно ограниченной производной. Выведите отсюда, что $\lim_{t \to \infty} f(t) = 0$.

†*63.* Проведите вычисления в доказательстве теоремы XIII.29.

†*64.* Восполните детали доказательства теоремы XIII.32.

65. Повторяя доказательство пункта (a) теоремы XIII.33, докажите, что если $H_0\varphi = \lambda\varphi - V\varphi$ с $\lambda > 0$, то $\varphi \in L^2_\delta$ для всех δ.

†*66.* (a) Докажите, что $(-\Delta - \mu)^{-1}$—ограниченный оператор из L^2_δ в L^2_δ при любом δ и любом $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. [*Указание:* докажите нужный факт для $\delta > 0$ последовательно в $[0, 1]$, $(1, 2]$, ...]

(b) Завершите доказательство леммы 1 § 8.

(c) Докажите ограниченность $(-\Delta + 1)^{-1} \partial/\partial x_i$ как отображения из L^2_δ в L^2_δ для любого δ.

†*67.* Проверьте оценку (62).

68. Пусть $\delta > n + 1/2$. Докажите, что для любых $b > a > 0$ существует постоянная C, такая, что для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и всех $\lambda \in [a, b]$

$$\|(-\Delta - \lambda - i0)^{-n} \varphi\|_{-\delta} \leqslant C \|\varphi\|_\delta.$$

69. Пусть $\|A\|_{\delta,\,-\delta}$ — норма A как отображения L^2_δ в $L^2_{-\delta}$. Пусть $\delta > 1/2$. Докажите, что для любого $\alpha < \min\{1, \delta - 1/2\}$ функция $(H_0 - \mu - i0)^{-1}$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка α как функция μ со значениями в $\mathscr{L}(L^2_\delta, L^2_{-\delta})$, т. е. для любого $\mu > 0$ существуют такие C и ε, что при $|\mu - \mu'| < \varepsilon$

$$\|(H_0 - \mu' - i0)^{-1} - (H_0 - \mu - i0)^{-1}\|_{\delta,\,-\delta} \leqslant C|\mu - \mu'|^\alpha.$$

*70. Пусть V — потенциал Агмона. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ таковы, что $\sum_{j=1}^{n} \partial_j a_j = 0$ (в смысле обобщенных функций) и $|a_j(x)| \leqslant C_j(1 + |x|^2)^{-1/2-\varepsilon}$. Пусть

$$H = -\Delta + 2i\sum_{j=1}^{n} a_j\partial_j + \sum_{j=1}^{n} a_j^2 + V.$$

Докажите, что $\sigma_{\rm sing}(H) = \varnothing$ и что $\Omega^\pm(H, H_0)$ существуют и полны. [*Указание:* постройте теорию, аналогичную теореме XIII.33.]

*71. Пусть $V(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2-\varepsilon} W(x)$, где W — относительно компактное в смысле форм возмущение $-\Delta$. Докажите, что теорема XIII.33 остается справедливой.

72. Пусть $A \geqslant 0$ — положительный самосопряженный оператор и $\mathscr{H}_{+1} \subset \mathscr{H} \subset \mathscr{H}_{-1}$ — соответствующая шкала пространств. Пусть $\{U(s)\}$ — унитарная группа на $\mathscr{H}$, в которой каждый оператор $U(s)$ лежит в $\mathscr{L}(\mathscr{H}_{+1}, \mathscr{H}_{+1})$. Пусть $V \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_{+1}, \mathscr{H}_{-1})$. Положим $V(s) = U(s)VU(s)^{-1}$ для $s \in \mathbb{R}$. Докажите, что если $V(s)$ можно продолжить до $\mathscr{L}(\mathscr{H}_{+1}, \mathscr{H}_{-1})$-значной аналитической функции в окрестности $s = 0$, то ее можно продолжить и в полосу $\{s \mid |\operatorname{Im} s| < \alpha\}$.

73. (a) Пусть H_0 — положительный самосопряженный оператор и V — симметрический оператор с $D(V) \supset D(H_0)$. Предположим, что $V(H_0 + 1)^{-1}$ — компактный оператор. Докажите, что $(H_0 + 1)^{-1/2} V (H_0 + 1)^{-1/2}$ компактен. [*Указание:* воспользуйтесь интерполяцией.]

(b) Будем говорить, что оператор V в $L^2(\mathbb{R}^3)$ принадлежит классу C_α, тогда и только тогда, когда

(1) V — симметрический оператор с $D(V) \supset D(H_0)$, где $H_0 = -\Delta$;

(2) $V(H_0 + 1)^{-1}$ компактен;

(3) семейство операторов $\tilde{F}(\theta) = u(\theta)Vu(\theta)^{-1}(H_0 + 1)^{-1}$, определенных для $\theta \in \mathbb{R}$, допускает продолжение до аналитической операторнозначной функции в полосе $\{\theta \mid |\operatorname{Im}\theta| < \alpha\}$.

Докажите, что $C_\alpha \subset \mathscr{F}_\alpha$.

†74. Восполните детали в примере 1 § 10.

75. Пусть A — самосопряженный оператор и $\{U(s) = e^{isA}\}$ — соответствующая унитарная группа. Пусть $\psi \in C^\infty(A)$ и $\sum_{n=0}^{\infty} t^n\|A^n\psi\|/n! < \infty$ при $|t| < \alpha$. Докажите, что $f(s) = e^{isA}\psi$ имеет аналитическое продолжение в полосу $\{s \mid |\operatorname{Im} s| < \alpha\}$. Обратно, если $f(s)$ имеет такое продолжение, докажите, что $\sum_{n=0}^{\infty} t^n\|A^n\psi\|/n! < \infty$, когда $|t| < \alpha$.

†76. Проведите рассуждения, основанные на связности, которые необходимы в доказательстве теоремы XIII.36 для доказательства следующего факта: пусть γ — кривая в B_α и $\lambda \notin \sigma_{ess}(H(\gamma(t)))$ при любом t; тогда либо λ лежит как в $\sigma_d(\gamma(0))$, так и в $\sigma_d(\gamma(1))$, либо не лежит ни в одном из этих множеств.

†77. Восполните детали доказательства предложения 2 § 10.

†78. Докажите, что в предложениях теоремы XIII.37

$$\{\mu + e^{-2\theta}\lambda \mid \mu \in \Sigma(\theta),\ \lambda \in [0, \infty)\} \subset \sigma_{ess}(\theta),$$

действуя следующим образом:

(a) сначала предположите, что каждый $V_{ij} \in C_\alpha$ (см. задачу 73). [*Указание:* см. задачу 45.]

(b) В случае $V_{ij} \in \mathcal{F}_\alpha$ воспользуйтесь предельным переходом.

†79. Восполните детали доказательства теоремы XIII.37.

†80. Докажите лемму 1 (b) § 11.

†81. Пусть $V \in M_\sigma^{(n)}$ с $\sigma > n/2$, $\sigma \geqslant 1$. Докажите, что $V \ll -\Delta$.

†82. Докажите, что в предложениях теоремы XIII.38 вложения $C^\infty(\tilde{H}) \subset C_\theta$ (или C_θ^1) непрерывны.

83. Пусть $(-\Delta + V)\psi = E\psi$ в смысле обобщенных функций, и пусть V принадлежит классу C^∞ на открытом множестве Ω в $\mathbb{R}^n$. Используя идеи теоремы об эллиптической регулярности, докажите, что тогда и ψ принадлежит классу C^∞ на Ω.

84. Найдите пример, показывающий, что лемму О'Коннора нельзя распространить на бесконечномерные проекторы $P(0)$.

85. Докажите, что в предположениях леммы О'Коннора $P(\alpha)$ всегда допускает аналитическое продолжение в область $\tilde{D} = \{\alpha \mid \operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\alpha_0$ для некоторого $\alpha_0 \in D\}$.

†86. (a) Пусть $0 < a < b$. Докажите, что существуют *единичные* векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ в $\mathbb{R}^n$, такие, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\exp(a|\mathbf{x}|) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \exp(b\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{x}).$$

(b) Проверьте вычисления существенного спектра $H(\alpha)$ в доказательстве теоремы XIII.40.

(c) Покажите, что $\sigma_{ess}(H(\alpha)) \subset \{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda \geqslant \Sigma - (2M)^{-1} |\operatorname{Im}\alpha|^2\}$.

(d) Завершите доказательство теоремы XIII.40.

87. Докажите, что в предположениях теоремы XIII.42

$$|\psi(\zeta) - \psi(\zeta')| \leqslant C_\varepsilon \exp[-(a-\varepsilon)\min\{r, r'\}]\, |\zeta - \zeta'|^\theta,$$

если $\theta < \min\{1, 2 - 3/\sigma\}$. Здесь r (соответственно r') — радиус инерции конфигурации ζ (соответственно ζ').

†88. Восстановите пропущенный шаг доказательства теоремы XIII.42.

89. (a) Пусть A и B — полуограниченные операторы в гильбертовом пространстве с $Q(A) \subset Q(B)$. Предположим, что $B-A$ строго положителен в том смысле, что $(\psi, (B-A)\psi) > 0$ для всех $\psi \neq 0$, лежащих в $Q(A) \cap Q(B)$. Предположим, что $\mu_1(A)$ — изолированное собственное значение конечной кратности. Докажите, что $\mu_1(A) < \mu_1(B)$. Приведите пример ситуации, когда $\mu_1(A)$ лежит в существенном спектре и $\mu_1(A) = \mu_1(B)$.

(b) Дайте прямое доказательство того, что для центрально-симметричного потенциала V основное состояние оператора $-\Delta + V$, если оно существует, есть s-состояние и не имеет нулей.

†90. Восполните детали примера 2 § XIII.12.

91. Пусть H_0 — оператор, порождающий усиливающую положительность полугруппу, а $-V$ — сохраняющий положительность ограниченный оператор. Докажите, что

(i) $(H_0 + V + \mu)^{-1}$ усиливает положительность для всех достаточно больших μ;

(ii) $\exp(-t(H_0 + V))$ усиливает положительность для всех $t > 0$.

92. Пусть $H_0 = -\Delta$, V есть H_0-ограниченный оператор умножения с относительной гранью < 1 и W — оператор Гильберта — Шмидта с отрицательным ядром. Докажите, что $H_0 + V + W$ обладает невырожденным строго положительным основным состоянием, если на дне спектра лежит собственное значение этого оператора.

*93. Найдите положительный, сохраняющий положительность и эргодический оператор, который не усиливает положительности. [*Указание:* ищите среди 3×3-матриц.]

94. Найдите положительный оператор H_0, для которого $(H_0 + \mu)^{-1}$ сохраняет положительность лишь для некоторых μ. [*Указание:* ищите среди 3×3-матриц.]

95. Пусть $H(\lambda) = -d^2/dx^2 + x^2 + \lambda/x^4$ с $\lambda > 0$ и областью определения $C_{00}^\infty(\mathbb{R})$, состоящей из C_0^∞-функций с носителем, отделенным от нуля.

(a) Докажите, что $H(\lambda)$ в существенном самосопряжен.

(b) Докажите, что спектр $H(\lambda)$ чисто дискретен.

(c) Докажите, что наинизшее собственное значение $H(\lambda)$ вырожденно.

(d) Почему это не противоречит теореме XIII.46?

(e) Почему $H(\lambda)$ не может сходиться к $-d^2/dx^2 + x^2$ в сильном резольвентном смысле при $\lambda \downarrow 0$? К чему он сходится?

†96. Восполните детали доказательства первого критерия Бёрлинга — Дени.

97. (a) Пусть A — конечная матрица, не обязательно симметричная, но такая, что $a_{ij} \leqslant 0$ при $i \neq j$. Докажите, что $\exp(-tA)$ — матрица с положительными элементами для всех $t > 0$. [*Указание.* Представьте A в виде $B + D$ с диагональной матрицей D и такой B, что $b_{ij} \leqslant 0$ для всех i, j, и воспользуйтесь формулой Троттера.]

(b) Пусть A — конечная матрица, не обязательно симметричная, но такая, что e^{-tA} есть матрица с положительными элементами для всех $t > 0$. Докажите, что $a_{ij} \leqslant 0$ при всех $i \neq j$. [*Указание:* воспользуйтесь равенством $A = \lim_{t \downarrow 0} (1 - e^{-tA})/t$.]

98. Предположим, что $H \geqslant 0$. Пусть $\{F_n\}$ — семейство функций на $\mathbb{C}$ (соответственно $\mathbb{R}$), таких, что $|F_n(z)| \leqslant |z|$ и что для всех $f \in Q(H)$ (соответственно вещественнозначных) $F_n(f) \in Q(H)$ и $(F_n(f), HF_n(f)) \leqslant (f, Hf)$. Пусть $F_n \longrightarrow F$ поточечно. Докажите, что для всех $f \in Q(H)$ всегда $F(f) \in Q(H)$ и $(F(f), HF(f)) \leqslant (f, Hf)$.

99. Пусть H — лапласиан с граничными условиями Дирихле или Неймана. Покажите, что H удовлетворяет первому и второму критериям Бёрлинга—Дени. [*Указание:* воспользуйтесь задачей 98 и приблизьте $|z|$ и $z \wedge 1$ гладкими F_n.]

†*100.* Представьте (77) в форме (76).

†*101.* Покажите, что правая часть (79) определяет непрерывный линейный функционал на $\{\varphi \in \mathscr{Z} \mid \varphi(0) = 0 = \partial_i \varphi(0)\}$, если

$$\int\limits_{0<|\lambda|<1} |\lambda|^2 d\sigma + \int\limits_{|\lambda| \geqslant 1} d\sigma < \infty.$$

†*102.* (a) Пусть $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $\int f(x)\,dx = \int x f(x)\,dx = 0$. Докажите, что существует $g \in C_0^\infty$, такая, что $f = g''$.

(b) Пусть $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Представим точку из $\mathbb{R}^n$ в виде $\langle x, y\rangle$, где $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}$. Предположим, что

$$\int f(x, y)\, d^{n-1}x\, dy = 0 = \int y f(x, y)\, d^{n-1}x\, dy = \int x_i f(x, y)\, d^{n-1}x\, dy.$$

Найдите функции $a_1, a_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $\eta_1, \eta_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, такие, что

$$\int a_i(x)\, d^{n-1}x = \int x_j a_i(x)\, d^{n-1}x = 0, \quad i = 1, 2, \ j = 1, \ldots, n-1,$$

и что функция

$$g(x, y) = f(x, y) - \sum_{i=1}^{2} a_i(x)\, \eta_i(y)$$

при любом x удовлетворяет равенству

$$\int g(x, y)\, dy = \int y g(x, y)\, dy = 0.$$

(c) Докажите по индукции, что любую такую f можно представить в виде суммы $\sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2 f_i$ с $f_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(d) Докажите, что любая $\varphi \in \mathscr{Z}$ с $\varphi(0) = 0 = \partial_i \varphi(0)$ (для всех i) есть сумма функций вида $\lambda_i \lambda_l \psi$, $\psi \in \mathscr{Z}$.

†*103.* Покажите, что определенная в доказательстве теоремы XIII.53 мера $d\sigma$ обладает свойством $\int\limits_{|\lambda| \geqslant 1} d\sigma(\lambda) < \infty$.

†*104.* Рассмотрите пример 2 § XIII.13 во всех подробностях.

†*105.* Докажите, что любое решение в классе обобщенных функций радиального уравнения Шредингера (88) на $(0, \infty)$ с $E > 0$ есть линейная комбинация двух решений Йоста.

†106. Проведите подробное доказательство теоремы XIII.58, сделав строгими формальные операции над $G(m, r)$.

107. Постройте явно потенциал V, гладкий вне $r=0$, и собственную функцию ψ, не лежащую в области определения D инфинитезимального генератора группы масштабных преобразований. [*Указание:* модифицируйте пример Вигнера—фон Неймана.]

108. Пусть V — сумма потенциала отталкивания и однородного потенциала степени $-\alpha$, $0<\alpha<2$. Докажите, что у $-\Delta+V$ нет положительных собственных значений.

109. Пусть заданы комплексные числа $a_1, a_2, \ldots$. Докажите, что существует не более чем одна аналитическая в $\{z \mid \operatorname{Re} z>0\}$ функция f, такая, что $f(n)=a_n$, $n=1, 2, \ldots$, и $|f(z)| \leqslant C_1 \exp(C_2|z|)$ для некоторой постоянной $C_2<\pi$. [*Указание:* если f_1 и f_2 — две такие функции, примените теорему Карлсона к $(f_2-f_1)/\sin \pi z$.]

110. Докажите, что правая часть (91) конечна, если $\psi \in D(-\Delta)$.

111. (a) Пусть $c>-1/4$ и $A_c f=-f''+cx^{-2} f$. Покажите, что для подходящей постоянной d и всех $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in C_0^{\infty}(0, 1)$

$$\int_0^1 x^{\alpha}|f(x)|^2 dx \leqslant d \int_0^1 x^{\alpha}|(A_c f)(x)|^2 dx.$$

(b) Пусть $n \geqslant 3$ и носитель $h \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ лежит в $\{x \mid 0<|x|<1\}$. Докажите, что существует постоянная D, не зависящая от h и такая, что при всех α

$$\int|x|^{\alpha}|h(x)|^2 d^n x \leqslant D \int|x|^{\alpha}|\Delta h(x)|^2 d^n x.$$

(c) Докажите теоремы XIII.63 и XIII.64 для всех $n \geqslant 3$.

112. (a) Докажите теорему XIII.57 для $n=2$, используя результаты для $n=3$. [*Указание:* берите функции, постоянные в одном направлении.]

(b) Докажите теоремы XIII.63 и XIII.57 для $n=2$, показав, что для любой $h \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2 \setminus\{0\})$ и $\alpha>0$

$$\int|x|^{-\alpha-2}|h(x)|^2 d^2 x \leqslant \alpha^{-1} \operatorname{Re}\left[\int|x|^{\alpha} \overline{h(x)}(-\Delta h)(x) d^2 x\right].$$

[*Указание:* воспользуйтесь тем, что $\int\left(|x|^{\alpha/2} h(x)\right)\left[-\Delta\left(|x|^{\alpha/2} h(x)\right)\right] \times$ $\times d^2 x \geqslant 0$.]

113. (a) Пусть $f \in C_0^{\infty}(0, 1)$ и $g=-f''+cx^{-2} f$ для некоторой $c>-1/4$. Докажите, что для любого α

$$\int_0^1 r^{\alpha}|f'(r)|^2 dr \leqslant \int_0^1 r^{\alpha}|g(r)|^2 dr.$$

*(b) Докажите, что для $n \geqslant 3$ и любой h класса C^{∞} с носителем в $\{x \mid 0<|x|<1\}$

$$\int|x|^{\alpha}|\nabla h|^2 dx \leqslant 2 \int|x|^{\alpha}|\Delta h|^2 dx.$$

(c) Докажите теорему о единственности продолжения операторов Шредингера с магнитным полем.

Литература: статья Хейнца, упомянутая в Замечаниях.

(d) Восполните детали доказательства теоремы XIII.62.

114. Докажите, что замкнутое подпространство метрического пространства компактно тогда и только тогда, когда для любого ε его можно покрыть конечным числом ε-шаров.

115. Пусть A — самосопряженное расширение с периодическими граничными условиями сужения $id/dx \upharpoonright C_0^\infty(-\pi, \pi)$ на $L^2(-\pi, \pi)$. Дайте прямое доказательство компактности множества

$$S = \{\psi \in L^2(-\pi, \pi) \mid \|\psi\| \leqslant 1,\ \|A\psi\| \leqslant 1\}.$$

**116.* Дайте другое доказательство теоремы XIII.65, действуя следующим образом.

(a) Пусть $H(p) = \min\left\{|p|, \operatorname*{ess\,min}_{|q| \geqslant p/2} \sqrt{G(q)}\right\}$. Докажите, что для $\psi \in S$ (S — множество, описанное в теореме XIII.65) и $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\int H(p)^2 |\widehat{(\eta\psi)}(p)|^2 d^n p \leqslant (2\pi)^n 4 \left(\int (1 + 2|p|)\, |\hat{\eta}(p)|\, d^n p\right)^2.$$

[*Указание:* докажите, что $H(a+b) \leqslant 2|a| + \sqrt{G(b)}$.]

(b) Выберите R и η с носителем в ящике с ребром R так, чтобы если $\psi \in S$ и $\psi_1 = \eta\psi$, то $\|\psi - \psi_1\|_2 \leqslant \varepsilon/4$.

(c) Выберите $R_0 > R$ таким, чтобы для $|k_i| \leqslant \pi/R_0$ и $\varphi_k(x) = \exp(-ik \cdot x)\, \psi_1(x)$ было $\|\varphi_k - \psi_1\| \leqslant \varepsilon/4$.

(d) Пусть $a_m(k)$ — коэффициенты *ряда* Фурье φ_k как функции в ящике с ребром R_0. Докажите, что для некоторой постоянной C_1, не зависящей от $\psi \in S$,

$$\sum_m \int_{|k_i| \leqslant \pi/R_0} H\left(k + \frac{2\pi m}{R_0}\right)^2 |a_m(k)|^2 dk \leqslant C_1.$$

(e) Найдите C_2, не зависящую от $\psi \in S$, и некоторое k так, чтобы $\|\varphi_k - \psi\| \leqslant \varepsilon/2$ и

$$\sum_m H\left(\frac{2\pi}{R_0}(|m| - 1)\right)^2 |a_m(k)|^2 \leqslant C_2.$$

Пусть $\psi_2 = \varphi_k$ для этого специального выбора k.

(f) Найдите не зависящее от ψ число N, такое, чтобы обрезанный ряд Фурье ψ_3 для ψ_2 удовлетворял неравенству $\|\psi_2 - \psi_3\| \leqslant \varepsilon/4$.

(g) Закончите доказательство теоремы.

117. Получите критерий Реллиха как следствие критерия Рисса.

118. Пусть $S \subset l_p$, $1 \leqslant p < \infty$. Докажите, что S компактно тогда и только тогда, когда (1) $\sup_{f \in S} \|f\|_p < \infty$ и (2) для любого ε существует такое N, что $\sum_{|n| \geqslant N} |f_n|^p \leqslant \varepsilon$ для всех $f \in S$.

119. (Теорема Стрихартца для форм.) Пусть $s \geqslant 3$. Докажите следующие утверждения об операторе умножения V в $L^2(\mathbb{R}^3)$.

(a) Если $V \in L^s_w$, то

$$\|V(I-\Delta)^{-1/2}\varphi\|_2 \leqslant C\|V\|_{s/2,\,w}\|\varphi\|_2.$$

(b) Если $V \in L^{s/2}_w$, то V есть ограниченное в смысле форм возмущение оператора $-\Delta$.

(c) Если $V \in L^{s/2}$, то относительная грань равна нулю.

120. Докажите теорему XIII.68, показав, что каждый член ряда Неймана для возмущенной резольвенты компактен.

†*121.* Восполните детали доказательства теоремы XIII.70.

122. Докажите, что если A и B—положительные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ и $B \leqslant A$, то для любого замкнутого подпространства $\mathscr{H}_0$ в $\mathscr{H}$ с $\mathscr{H}_0 \cap D(A)$ плотным в $\mathscr{H}_0$, $B_0 \leqslant A_0$, где A_0 и B_0—фридрихсовы расширения $A \restriction \mathscr{H}_0$, $B \restriction \mathscr{H}_0$.

123. Цель этой задачи—дать другое доказательство теоремы XIII.73.

(a) Покажите, что достаточно доказать, что из $f_n \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\|f_n\|_m \leqslant 1$ вытекает существование сходящейся по $\|\cdot\|_j$-норме подпоследовательности последовательности $\{f_n\}$.

(b) Пусть $f_n \in C_0^\infty(\Omega)$, $\|f_n\|_m \leqslant 1$. Покажите, что $\sup_k |\hat{f}_n(k)| \leqslant c_0$ и что $\{f_n\}$ имеет слабо сходящуюся в $L^2(\Omega)$ подпоследовательность $\{f_{n_i}\}$.

(c) Докажите, что $\hat{f}_{n_i}$ сходится поточечно.

(d) Покажите, что существуют постоянные c_1 и c_2, такие, что для любого $r > 0$

$$\|f_{n_i} - f_{n_l}\|_j^2 \leqslant c_1 \int\limits_{|k| \leqslant r} |k|^{2j} |\hat{f}_{n_i}(k) - \hat{f}_{n_l}(k)|^2 dk +$$
$$+ c_2 r^{2j-2m} \int\limits_{|k| \geqslant r} |k|^{2m} |\hat{f}_{n_i}(k) - \hat{f}_{n_l}(k)|^2 dk.$$

(e) С помощью неравенства из (d) закончите доказательство теоремы XIII.73.

124. (a) Докажите первую часть следствия 2 теоремы XIII.74, установив неравенство

$$(\eta u, (-\Delta_D)(\eta u)) \leqslant C[(u, (-\Delta_D)u) + (u, u)]$$

для фиксированной функции $\eta \in C_0^\infty$, тождественно равной единице в окрестности K.

(b) Докажите вторую часть следствия 2 теоремы XIII.74, используя неравенство $x^{-2} \leqslant C(-\Delta)$ для оценки $\|\eta u_n\|$.

(c) Докажите следствие 2 теоремы XIII.75, показав, что ограниченность $(\eta, (-\Delta_N)\eta)$ и (η, η) (соответственно $\|\Delta_N u_n\|$ и $(\eta, (-\Delta_N)\eta)$) влечет за собой ограниченность H^1-нормы η (соответственно $\nabla\eta$).

Примечание. Доказательство второй части (c) потребует оценки $\|\partial_i\partial_j\varphi\|$ величиной $\|-\Delta_N\varphi\|$. Такие оценки обсуждаются в книге Агмона, упоминавшейся в замечаниях к § 14.

125. (a) Пусть ∂_i—замыкание оператора i-й частной производной, определенного на $C_0^\infty(\Omega)$, рассматриваемое как оператор в $L^2(\Omega)$. Пусть

∂_i^* — его сопряженный. Докажите, что для любого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ мы имеем $-\Delta_D^\Omega = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^* \partial_i$.

(b) Для любого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ докажите, что $-\Delta_N^\Omega = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \partial_i^*$.

126. Докажите предложение 1 § 15, рассмотрев одномерный случай, а затем применив теорию тензорных произведений.

127. Пусть C — оператор $-d^2/dx^2$ в $L^2[a, b]$ с граничными условиями

$$\frac{df}{dx}(a) + \alpha f(a) = 0, \qquad -\frac{df}{dx}(b) + \beta f(b) = 0.$$

(a) Докажите, что $Q(C) = H^1(a, b)$.

(b) Докажите, что для $f \in C^\infty(a, b)$

$$(f, Cf) = \int_a^b \left| \frac{df}{dx} \right|^2 dx + \alpha |f(a)|^2 + \beta |f(b)|^2.$$

128. (a) Пусть Ω имеет жорданов объем. Докажите, что Ω измеримо по Лебегу в том смысле, что существуют два борелевых множества D_1, D_2, таких, что $D_1 \subset \Omega \subset D_2$ и $\mu(D_2 \triangle D_1) = 0$. [*Указание:* возьмите в качестве D_1 (соответственно D_2) объединение (соответственно пересечение) кубов, приближающих Ω изнутри (снаружи).]

(b) Найдите открытое измеримое по Лебегу множество, не имеющее жорданова объема.

129. Пусть A и B — полуограниченные самосопряженные операторы и $\tilde{N}_E(A)$ — число собственных значений A, меньших $-E$.

(a) Докажите, что для $0 \leqslant \theta \leqslant 1$

$$\tilde{N}_E(A + B) \leqslant \tilde{N}_{\theta E}(A) + \tilde{N}_{(1-\theta)E}(B).$$

(b) Пусть $\tilde{S}_\gamma(A)$ — сумма γ-х степеней отрицательных собственных значений A. Докажите, что для $\gamma > 0$ и $0 < \theta < 1$

$$\tilde{S}_\gamma(A + B) \leqslant \theta^{-\gamma} \tilde{S}_\gamma(A) + (1 - \theta)^{-\gamma} \tilde{S}_\gamma(B).$$

[*Указание:* докажите и затем примените формулу $\tilde{S}_\gamma(A) = \gamma \int_0^\infty E^{\gamma-1} \tilde{N}_E(A)\, dE$.]

130. Рассмотрим формулу

$$\lim_{\lambda \to \infty} S_\gamma(\lambda V)/\lambda^{m/2+\gamma} = \tau_m (2\pi)^{-m/2} \int |V_-(x)|^{m/2+\gamma} d^m x, \tag{209}$$

где $S_\gamma(W)$ — сумма γ-х степеней отрицательных собственных значений оператора $-\Delta + W$.

(a) Докажите (209) для любого $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, используя вилку Дирихле — Неймана.

(b) Распространите (209) при $n \geqslant 3$ на любые $V \in L^{m/2+\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

(c) Распространите (209) при $n=1$, 2 на любые $V\in L^{m/2+\gamma}(\mathbb{R}^n)$ с условием $m/2+\gamma>1$.

[*Указание:* в (b) и (c) воспользуйтесь задачей 129 и оценками Либа — Тирринга (задачи 31—33).]

†*131.* Докажите теорему XIII.82.

132. Пусть W таково, что $\dim E_{(-\infty,\,0]}(-\Delta+\lambda W)<\infty$ для всех λ. Предположим, что функция

$$f(\lambda)=\lim_{a\uparrow 0}\left[\dim E_{(-\infty,\,\lambda a]}(-\Delta+\lambda V)/\dim E_{(-\infty,\,a]}(-\Delta+V)\right]$$

существует при всех λ и конечна, что $\lim\limits_{a\uparrow 0} E_{(-\infty,\,a]}(-\Delta+V)=\infty$ и что $f(\lambda)$ непрерывна при $\lambda=1$. Докажите, что

$$\lim_{a\uparrow 0}\left[\dim E_{(-\infty,\,a]}(-\Delta+V+W)/\dim E_{(-\infty,\,a]}(-\Delta+V)\right]=1.$$

[*Указание.* Сначала докажите, что если $\dim E_{(-\infty,\,0]}(B)=N<\infty$, то $\dim E_{(-\infty,\,a]}(A+B)\leqslant\dim E_{(-\infty,\,a]}(A)+N$.]

133. Проверьте свойства $A_1\oplus A_2$, перечисленные перед предложением 3 § 15.

134. Пусть $f_n\in L^2(M,\,d\mu;\,\mathscr{H}')=\mathscr{H}$, где $\mathscr{H}'$ — сепарабельное пространство, а M σ-конечно. Предположим, что $\{f_n(m)\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $\mathscr{H}'$ для почти всех $m\in M$. Докажите, что

$$\sum_{n=1}^{N}(f_n(\cdot),\,f(\cdot))_{\mathscr{H}'}\,f_n(\cdot)\longrightarrow f$$

в $\mathscr{H}$ для каждого $f\in\mathscr{H}$. [*Указание:* воспользуйтесь теоремой о монотонной сходимости.]

Примечание. Это есть обобщение задачи 12 гл. II.

135. Предположим, что A — самосопряженный оператор. Пусть $\{U(t)\}$ — унитарная однопараметрическая группа. Предположим, что $\mathscr{D}$ — существенная область определения A и что $U(t)\,\mathscr{D}\subset\mathscr{D}$ и $AU(t)\,\psi=U(t)\,A\psi$ для всех t и всех $\psi\in\mathscr{D}$. Докажите, что $U(t)\,D(A)=D(A)$ и что $U(t)\,e^{isA}=e^{isA}\,U(t)$.

†*136.* (a) Докажите пункт (b) теоремы XIII.85.

(b) Восполните детали доказательства пункта (c) теоремы XIII.85.

137. Докажите, что фурье-образом $(2\pi)^{-1/2}(p^2+1)^{-1}$ служит $^1/_2e^{-|x|}$. [*Указание:* воспользуйтесь интегрированием по контуру в комплексной плоскости.]

138. Пусть $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Определим $V(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}f(x+2\pi n)$.

(a) Используя теорию преобразований Фурье периодических обобщенных функций, формулы (144) и (145), докажите, что

$$\hat{V}(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\,\delta(k-n).$$

(b) Применяя формулу обращения Фурье к $V(0)$, докажите формулу суммирования Пуассона

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(2\pi m) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n).$$

(c) Предположим, что f и $\hat{f}$ — непрерывные функции, причем $|f(x)| \leqslant C(1+|x|)^{-1-\delta}$ и $|\hat{f}(k)| \leqslant C(1+|k|)^{-1-\delta}$ с некоторыми C, $\delta > 0$. Докажите формулу суммирования Пуассона для f, применяя предельный переход.

(d) Зная фурье-образ функции $e^{-|x|}$, вычислите $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (1+n^2)^{-1}$.

(e) Зная фурье-образ функции $e^{-\alpha|x|}$, вычислите $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$.

Примечание. Как видно из сказанного выше, формула суммирования Пуассона является полезным инструментом теории чисел; см., например, К. Чандрасекхаран, Введение в аналитическую теорию чисел.— М.: Мир, 1974.

139. (Модель Крёнига — Пенни.) Пусть V есть 2π-периодический потенциал, равный 0 на $[0, y)$ и c на $[y, 2\pi)$. Вычислите дискриминант явно и докажите, что при $n \longrightarrow \infty$ для размера n-й щели справедлива формула

$$l_n \sim \left| \frac{4c}{n} \sin\left(\frac{ny}{2}\right) \right|.$$

В частности, докажите, что число щелей бесконечно.

†*140*. Пусть A — разложимый самосопряженный оператор на $\mathscr{H} = \int_M^{\oplus} \mathscr{H}' \, d\mu$.

Предположим, что каждый $A(m)$ ограничен снизу и обладает компактной резольвентой.

(a) Докажите, что n-е собственное значение $E_n(m)$ оператора $A(m)$ — измеримая функция. [*Указание*: воспользуйтесь принципом минимакса.]

(b) Покажите, что можно найти такие $\mathscr{H}'$-значные функции $\psi_n(m)$, удовлетворяющие уравнению $A(m)\psi_n(m) = E_n(m)\psi_n(m)$ и образующие ортонормированный базис в $\mathscr{H}'$, что $\psi_n(\cdot)$ измеримы. [*Указание*: для заданного n положите $M_{k;\,n} = \{m \mid E_n(m)\ k\text{-кратно вырожденно}\}$ и выберите $\psi_n(m)$ на каждом $M_{k;\,n}$.]

(c) Предположим, что M — топологическое пространство, что каждый $A(m) > 0$ и что $(A(m)+1)^{-1}$ равномерно непрерывна. Докажите, что $E_n(\cdot)$ непрерывна.

(d) Дайте пример, в котором $(A(m)+1)^{-1}$ была бы слабо непрерывна, а $E_n(\cdot)$ не была бы непрерывной.

(e) Объясните, почему $\psi_n(\cdot)$ может не быть непрерывной даже при условиях пункта (c).

†*141*. (a) Проверьте (173 b).

(b) Пусть $\alpha > n/2$. Проверьте, что

$$\sum_{|m| \geqslant c_2(1+|y|)} |E_m(x+iy)+1|^{-\alpha} \leqslant c_3 (1+|y|)^{-\alpha+n/2}.$$

(c) Пусть $\alpha > 1$. Проверьте, что

$$\sum_{|m| \leqslant c_2(1+|y|)} |E_m(x+iy)+1|^{-\alpha} \leqslant c_4 (1+|y|)^{-\alpha+n-1}.$$

(d). Завершите доказательство леммы 1 к теореме XIII.100.

142. Докажите, что любая решетка в R^ν имеет базис.

143. Докажите, что ячейка Вигнера—Зейтца любой решетки есть многогранник, т. е. пересечение конечного числа полупространств. [*Указание.* Пусть $a_1, \ldots, a_n$—базис и V—множество 3^n точек $\sum_{i=1}^{n} t_i a_i$ с $t_i = 0, +1$ или -1. Пусть $R = \max\{|x| \mid x \in V\}$. Докажите, что любая точка из ячейки Вигнера—Зейтца C лежит в шаре радиуса R. Докажите, что точка границы ∂C находится на одинаковом расстоянии от 0 и некоторой точки в $\mathscr{L} \cap \{x \mid |x| \leqslant 2R\}$.]

144. Предположим, что $\{A_\alpha\}$—семейство самосопряженных ограниченных снизу операторов, таких, что $A_\alpha \geqslant A$ и A имеет компактную резольвенту. Пусть $E_n(\alpha)$ есть n-е собственное значение A_α. Докажите, что $E_n(\alpha) \longrightarrow \infty$ равномерно по α при $n \longrightarrow \infty$.

145. Докажите, что мера плотности состояний, заданная формулой (176), абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. [*Указание*: докажите, что эта мера равна сумме спектральных мер оператора H.]

146. Докажите, что в одномерном случае плотность состояний в точке E, такой, что $E_n(k) = E$, задается формулой

$$\frac{d\rho}{dE} = \frac{2}{|\bar{Q}|}\left(\frac{dE}{dk}\right)^{-1}.$$

†*147.* **Восполните детали доказательства теоремы XIII.101.**

†*148.* Докажите аналог теоремы XIII.101 в случае, когда периодические граничные условия заменены на граничные условия Дирихле или Неймана.

149. С помощью (185) докажите (186).

150. Пусть $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$. Положим $f_N(z) = \prod_{j=1}^{N} (1 + a_j z)$. Докажите, что f_N равномерно сходится на компактных множествах при $N \longrightarrow \infty$, придерживаясь следующей схемы.

(a) Найдите равномерную оценку $f_N(z)$, используя неравенство $|1 + x| \leqslant e^{|x|}$.

(b) Докажите, что коэффициенты ряда Тейлора функций f_N сходятся при $N \longrightarrow \infty$.

(c) Докажите нужную сходимость.

151. (a) Пусть $A_n \longrightarrow A$ по норме в классе операторов со следом и $\mu \notin \sigma(A)$. Докажите непосредственно (не пользуясь теоремой XIII.107), что

$$\det(1 + \mu A_n)(1 + \mu A_n)^{-1} \longrightarrow \det(1 + \mu A)(1 + \mu A)^{-1}$$

по норме.

(b) Докажите (196), зная, что это справедливо для операторов A конечного ранга и $\mu \notin \sigma(A)$.

152. Пусть $d(\mu) = \det(1 + \mu A)$ и $D(\mu) = d(\mu)(1 + \mu A)^{-1} A$. Рассмотрим разложения $d(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu^n$, $D(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \mu^n$.

(a) Докажите, что $|a_n| \leqslant (e/n)^n \|A\|_1^n$.
(b) Докажите, что $\|B_n\|_1 \leqslant (e/n)^n \|A\|_1^{n+1}$.

153. Определим **частичный след** Tr_{n-1} из $\mathfrak{I}_1(\otimes^n \mathcal{H})$ в $\mathfrak{I}_1(\mathcal{H})$, полагая $\mathrm{Tr}\,(C\,\mathrm{Tr}_{n-1}(A)) = \mathrm{Tr}\,[(C \otimes I \otimes \ldots \otimes I)\,A]$ для любого $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
(a) Покажите, что Tr_{n-1} — корректно определенное сужение.
*(b) Рассмотрим $\wedge^k(A)$ как отображение, заданное на $\otimes^k \mathcal{H}$, полагая его равным нулю на $(\wedge^k(\mathcal{H}))^{\perp}$. Докажите, что $D(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \mu^n$, где

$$B_n = (n+1)\,\mathrm{Tr}_n\,(\wedge^{n+1}(A)).$$

154. Докажите, что $|\lambda_1(A) \ldots \lambda_n(A)| \leqslant \mu_1(A) \ldots \mu_n(A)$ для любого компактного оператора A. [*Указание*: рассмотрите собственные значения и норму $\wedge^n(A)$.]

155. Пусть $A \in \mathfrak{I}_p$ и $p \leqslant n$. Введем

$$R_n(A) = (1+A)\exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} (-A)^k/k\right) - 1.$$

(a) Докажите, что $R_n(A) \in \mathfrak{I}_1$.
Введем $\det_n(1+A) = \det(1 + R_n(A))$.
(b) Докажите, что $1+A$ обратим тогда и только тогда, когда $\det_n(1+A) \neq 0$.
(c) Докажите, что

$$\det_n(1+A) = \prod_{j=1}^{N(A)} \left[(1+\lambda_j(A))\exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} (-\lambda_j(A))^k/k\right)\right].$$

Пусть $D_n(\mu A) = A\,(1+\mu A)^{-1} \det_n(1+\mu A)$.
*(d) Докажите, что

$$|\det_n(1+A)| \leqslant \exp(\gamma_n \|A\|_n^n), \qquad \|D_n(\mu A)\|_n \leqslant C_n \exp(\gamma_n \|A\|_n^n \mu^n)$$

при подходящих постоянных C_n и γ_n.
(e) Найдите формулы Племеля—Смитиса для $\det_n$ и D_n.
(f) Найдите критерий полноты для собственных векторов операторов из $\mathfrak{I}_n$.

156. Докажите, что следующие свойства операторов $A \in \mathfrak{I}_1$ эквивалентны:
(a) A квазинильпотентен, т. е. $\sigma(A) = \{0\}$;
(b) $\det(1+\mu A) = 1$;
(c) $\mathrm{Tr}\,(A^k) = 0$ для всех $k > 0$;
(d) $\mathrm{Tr}\,(A^k) = 0$ для всех $k > k_0$ при некотором k_0.

157. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны для всех $A \in \mathfrak{I}_1$:
(a) при всех $\mu \in \mathbb{C}$ алгебраическая кратность μ и $-\mu$ одинакова;
(b) $\det(1+\mu A) = \det(1-\mu A)$ для всех $\mu \in \mathbb{C}$;
(c) $\mathrm{Tr}\,(A^k) = 0$ для всех нечетных k.

†*158.* (a) Докажите принцип минимакса для сингулярных чисел

$$\mu_n(A) = \inf_{\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}} \left(\sup_{\varphi \in [\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}]^{\perp};\ \|\varphi\|=1} \|A\varphi\| \right).$$

(b) Докажите, что $\mu_n(1+A) \leqslant 1 + \mu_n(A)$.
(c) Докажите **неравенство Фана**

$$\mu_{n+m+1}(A+B) \leqslant \mu_{n+1}(A) + \mu_{m+1}(B).$$

†*159.* Пусть A — замкнутый оператор, $\mu \notin \sigma(A)$ и P — спектральный проектор, отвечающий некоторой изолированной точке λ в $\sigma(A)$. Докажите, что P в то же время есть спектральный проектор оператора $(A-\mu)^{-1}$, отвечающий точке $(\lambda-\mu)^{-1}$.

160. Пусть D — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^{n+1}$ с гладкой границей ∂D. Пусть $\mathcal{H}=L^2(\partial D, dS)$ и $K(x, y)$ — ядро интегрального оператора A на $\mathcal{H}$. Предположим, что $|K(x, y)| \leqslant C|x-y|^{-\alpha}$ с $\alpha < n$. Пусть L — ядро интегрального оператора B, такое, что

$$|L(x, y)| \leqslant D|x-y|^{-\beta}.$$

(a) Докажите, что ядро AB ограничено, если $\alpha+\beta < n$.

(b) Докажите, что AB имеет ядро M, удовлетворяющее неравенству $|M(x, y)| \leqslant E|x-y|^{-\gamma}$ с $\gamma=\alpha+\beta-n$, если $\alpha+\beta > n$.

(c) Пусть $\alpha < n[1-(2k)^{-1}]$, где k — целое положительное число. Докажите, что $A \in \mathfrak{I}_{2k}$.

*(d) Пусть $2 \leqslant p < \infty$, $\alpha < n(1-p^{-1})$. Докажите, что $A \in \mathfrak{I}_p$. [*Указание*: используйте комплексную интерполяцию.]

161. (a) Пусть $f \in L^2(\mathbb{R})$ имеет L^2-производиую. Докажите, что существуют g, $h \in L^2$, такие, что $f=g*h$.

(b) Пусть $f \in L^2(\mathbb{R})$ имеет L^2-производиую; V, $W \in L^2(\mathbb{R})$. Докажите, что $V(x) f(x-y) W(y)$ — ядро оператора со следом в $L^2(\mathbb{R})$.

(c) Пусть V, $W \in L^2(\mathbb{R})$ имеют *компактные носители*. Пусть f и ее производная *локально* лежат в L^2. Докажите, что $V(x) f(x-y) W(y)$ есть ядро оператора со следом.

162. Пусть B — оператор единичного ранга. Докажите, что $\det(1+B) = 1+\operatorname{Tr}(B)$. [*Указание*: замените B на λB и докажите утверждение для малых λ.]

163. (a) Докажите, что фурье-образ обобщенной функции $|x|$ на $\mathbb{R}$ есть обобщенная функция, равная вне точки $k=0$ функции $-(2/\pi)^{1/2} k^{-2}$.

(b) Докажите, что $-|x|$ условно строго положительно определена, т. е. если $(1+|x|) V \neq 0$ лежит в L^1 и $\int V(x)\,dx=0$, то $-\int V(x) \times |x-y| V(y)\,dx\,dy > 0$.

164. Предположим, что A и B — операторы со следом и $A \geqslant 0$.

(a) Докажите, что $|B|^{1/2}(1+\mu A)^{-1/2}$ сходится к нулю по норме Гильберта — Шмидта при $\mu \longrightarrow \infty$. [*Указание*: в базисе из собственных векторов оператора A вычислите $\operatorname{Tr}((1+\mu A)^{-1/2}|B|(1+\mu A)^{-1/2})$.]

(b) Докажите, что $B(1+\mu A)^{-1}$ сходится к нулю по норме в классе операторов со следом при $\mu \longrightarrow \infty$.

(c) Докажите, что $\lim\limits_{\mu\to\infty} [\det(1+B+\mu A)/\det(1+\mu A)]=1$, где $\det$ есть определитель Фредгольма.

165. Рассмотрим одномерный оператор Шредингера $-d^2/dx^2+V(x)$ с положительным 1-периодическим V. Пусть $D(E)$ — дискриминант соответствующего уравнения, а $D_0(E)=2\cos\sqrt{E}$ — дискриминант того же уравнения, но при $V=0$. Пусть G_0 — оператор, обратный к $(h_0+1)^{-1}$, где h_0 — оператор $-d^2/dx^2$ с периодическими граничными условиями в $L^2(0, 1)$. Докажите, что

$$D(E)=2+C[\det(1+G_0V-(E+1)G_0)],$$

где det — определнтель Фредгольма, а $C = D_0(-1) - 2$. [*Указание*. Сначала докажнте, что $D(E) - 2 = C_V[\det(1 + G_0V - (E+1)G_0)]$, показав, что обе частн равенства суть целые функцнн, задаваемые бесконечнымн пронзведеннямн н нмеющне одннаковые нулн. Затем докажнте с помощью задачн 164, что $C_V = C_0$, показав, что $(D(E) - 2)/(D_0(E) - 2)$ н $\det(1 + G_0V - (E+1)G_0)/\det(1 - (E+1)G_0)$ стремятся к 1 прн $E \to -\infty$. Наконец, найднте C_0, взяв $E = -1$.]

166. Пусть E н F — два ограннченных оператора.

(a) Предположнм, что $0 \neq \lambda \notin \sigma(EF)$. Докажнте, что $-(\lambda)^{-1}[1 - F(EF - \lambda)^{-1}E]$ есть двусторонннй обратный к $FE - \lambda$, н выведнте отсюда, что $\lambda \notin \sigma(FE)$.

(b) Пусть $\lambda \neq 0$ н $\mathcal{M} = \{\varphi \mid EF\varphi = \lambda\varphi\}$, $\mathcal{N} = \{\varphi \mid FE\varphi = \lambda\varphi\}$. Докажнте, что F есть бнекцня нз $\mathcal{M}$ на $\mathcal{N}$, н выведнте отсюда, что $\dim \mathcal{M} = \dim \mathcal{N}$.

167. Пусть $p \neq \infty$. Предположнм, что $A_n \in \mathcal{J}_p$, $\sup_n \|A_n\|_p < \infty$ н $A_n \to A$ в слабом смысле к ограннченному оператору A. Докажите, что $A \in \mathcal{J}_p$ н $\|A\|_p \leq \overline{\lim} \|A_n\|_p$. [*Указание*. Пусть q сопряжено p. Докажите, что $|\operatorname{Tr}(FA)| \leq \|F\|_q \overline{\lim} \|A_n\|_p$ для любого оператора F конечного ранга.]

168. Используя комплексную ннтерполяцню, докажнте оценку $\|C^{1/2}DC^{1/2}\|_r \leq \|CD\|_r$, нспользованную прн доказательстве неравенства Голдена — Томпсона.

169. В этой задаче надо получнть неравенство Гёльдера для матриц (предложенне 5 дополнення к § IX.4) из неравенства Гёльдера для сумм без использовання комплексной интерполяцнн.

(a) Пусть $\{a_{ij}\}_{1 \leq i,\, j \leq n}$ — матрнца с $\sum_i |a_{ij}| \leq 1$ для всех j н $\sum_j |a_{ij}| \leq 1$ для всех i. Докажнте, что
$$\left|\sum a_{ij}\mu_i\nu_j\right| \leq \left(\sum_i |\mu_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_j |\nu_j|^q\right)^{1/q}$$
для $p^{-1} + q^{-1} = 1$. [*Указание*: вннкннте в доказательство теоремы XIII.103.]

(b) Пусть $A = \sum \mu_i(\varphi_i, \cdot)\psi_i$ и $B = \sum \nu_j(\eta_j, \cdot)\gamma_j$ — канонические представлення A н B. Докажнте, что $|\operatorname{Tr}(AB)| \leq \sum |a_{ij}| \mu_i\nu_j$, где $\sum_i |a_{ij}| \leq 1$, $\sum_j |a_{ij}| \leq 1$.

(c) Выведнте неравенство $|\operatorname{Tr}(AB)| \leq \operatorname{Tr}(|A|^p)^{1/p}\operatorname{Tr}(|B|^q)^{1/q}$.

170. Пусть $F_A(\mu)$ — функцня нз теоремы XIII.107. Цель этой задачн — показать, что прн фнкснрованных A, $B \in \mathcal{J}_1$ отображенне $\lambda \mapsto F_{A+\lambda B}(\mu)$ есть целая функцня λ. Это нужно для доказательства (197).

(a) Фнкснруем такое μ, что $-\mu^{-1} \notin \sigma(A)$. Покажнте, что $F_{A+\lambda B}(\mu) = F_C(\lambda)F_A(\mu)$, где $C = \mu(1 + \mu A)^{-1}B$, н выведнте отсюда, что $\lambda \mapsto F_{A+\lambda B}(\mu)$ — целая функцня λ прн такнх μ.

(b) Пусть $\mu_n \to \mu_\infty$ и $f_n(\lambda) = F_{A+\lambda B}(\mu_n)$. Используя первую часть доказательства теоремы XIII.107, покажнте, что $\sup_n \sup_{\lambda \in R} |f_n(\lambda)| < \infty$ для любой ограннченной области R н что $f_n(\lambda) \to f_\infty(\lambda)$ для любого λ. Выведнте отсюда, что $F_{A+\lambda B}(\mu)$ — целая функцня λ прн фнкснрованном μ.