Для того чтобы показать, что

$$T(x)-f(x)\leqslant T(\xi)-f(\xi)$$

или, что то же самое,

$$f(\xi)-f(x)\leqslant T(\xi)-T(x)=T(x,\ \xi),$$

заметим, что $|f(\xi)-f(x)|$ представляет собой частный случай суммы $\Sigma_{x\xi}$ (когда между x и ξ нет точек деления); поэтому

$$|f(\xi)-f(x)|\leqslant T(x,\ \xi).$$

Это неравенство дает возможность представить $f(x)$ еще иначе, в виде разности двух монотонных функций:

$$f(x)=P(x)-N(x),$$

где функции $P(x)$ и $N(x)$, определяемые с точностью до постоянного слагаемого равенствами

$$P(x)=\frac{1}{2}[T(x)+f(x)],\qquad N(x)=\frac{1}{2}[T(x)-f(x)],$$

называются соответственно *положительным* и *отрицательным изменением* $f(x)$ на интервале $(a,\ x)$; мы будем называть их также *неопределенным положительным изменением* и *неопределенным отрицательным изменением* функции $f(x)$.

Наконец, так как $f(x)=P(x)-N(x)$ дифференцируема всюду, где дифференцируемы одновременно и $P(x)$ и $N(x)$, а объединение двух множеств меры нуль является множеством меры нуль, то мы получаем следующий окончательный результат:

Теорема Лебега. *Любая функция с ограниченным изменением почти всюду имеет конечную производную.*

§ 2. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ТЕОРЕМЫ ЛЕБЕГА

5. Теорема Фубини о почленном дифференцировании ряда с монотонными членами. Теперь мы рассмотрим некоторые следствия, вытекающие более или менее непосредственно из только что доказанной основной теоремы. Начнем с теоремы Фубини, касающейся почленного дифференцирования ряда с монотонными членами.

Теорема Фубини[1]). *Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... — неубывающие (невозрастающие) функции на интервале $a\leqslant x\leqslant b$ и ряд*

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots=s(x)\tag{4}$$

сходится на этом интервале. Тогда для всех x, за исключением,

[1]) Фубини [2]; см. также Тонелли [1], Райхман и Сакс [1].

может быть, множества меры нуль,

$$f_1'(x)+f_2'(x)+\ldots=s'(x), \tag{5}$$

т. е. ряд (4) *можно почти всюду дифференцировать почленно.*

Докажем эту теорему. Не нарушая общности, можно предположить, что $f_n(a)=0$. Для определенности предположим, далее, что все f_n — неубывающие функции. Пусть

$$s_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x); \quad s_n(x)\to s(x).$$

Все эти функции имеют конечные производные всюду, за исключением множества E_0 меры нуль — объединения счетного набора множеств меры нуль тех точек, в которых $f_n(x)$ не имеют производных. Так как, очевидно,

$$s_n'(x)\leqslant s_{n+1}'(x)\leqslant s'(x),$$

то ряд в левой части (5) сходится всюду, кроме, может быть, множества E_0. Далее, так как s_n' образуют неубывающую последовательность, то равенство (5), т. е. соотношение $s'(x)-s_n'(x)\to 0$, достаточно проверить для какой-нибудь частичной последовательности номеров $n_1, n_2, \ldots$. Эту последнюю мы выберем так, чтобы ряд, составленный из разностей $s(b)-s_{n_k}(b)$, был сходящимся; при этом, так как

$$s(x)-s_{n_k}(x)\leqslant s(b)-s_{n_k}(b),$$

то будет сходиться и ряд из $s(x)-s_{n_k}(x)$; можно, например, выбрать n_k так, чтобы выполнялись неравенства

$$s(b)-s_{n_k}(b)<2^{-k}.$$

Тогда ряд, составленный из разностей $s-s_{n_k}$, будет такого же типа, что и ряд (4); поэтому ряд, полученный его почленным дифференцированием, почти всюду сходится, и, следовательно, почти всюду

$$s'(x)-s_{n_k}'(x)\to 0,$$

что и требовалось доказать.

6. Точки плотности линейных множеств. Следствием только что доказанной теоремы является теорема о *плотности* линейных множеств. Поясним сначала, что понимается под точкой плотности такого множества; соответствующее определение основывается на понятии *внешней меры.*

Внешней мерой $m_e(E)$ множества E точек x называется нижняя грань сумм длин систем интервалов, которыми может быть покрыто множество E. Из этого определения прямо следует, что если множества E_1 и E_2 заключены в непересекающихся интервалах, то $m_e(E_1\cup E_2)=m_e(E_1)+m_e(E_2)$; это свойство можно выразить иначе, сказав, что внешняя мера части некоторого фиксированного множества, попавшей в переменный интервал, представляет собой аддитивную функцию интервала.

Условимся говорить, что точка x, принадлежащая или не принадлежащая множеству E, есть *точка плотности* этого множества, если

$$\frac{m_e(E;\ x-h,\ x+k)}{h+k} \longrightarrow 1 \quad (0<h,\ k \longrightarrow 0),$$

где выражение в числителе означает меру той части множества E, которая заключена между $x-h$ и $x+k$. Теперь мы можем сформулировать следующее предложение:

Теорема[1]). *Почти все точки (т. е. все, за исключением, может быть, некоторого множества меры нуль) произвольного линейного множества E представляют собой его точки плотности.*

Сформулируем эту теорему в аналитической форме, задав на интервале (a, b), в котором заключено множество E, функцию $f(x)$, равную внешней мере части множества E, попавшей между a и x. Тогда теорему можно сформулировать, сказав, что $f'(x)=1$ почти во всех точках множества E. Для того чтобы доказать это, рассмотрим открытые множества, т. е. системы интервалов Σ_1, Σ_2, ..., покрывающие множество E, суммы длин которых быстро стремятся к $m_e(E)$. Пусть $f_n(x)$—функция, построенная с помощью Σ_n так же, как с помощью E строилась $f(x)$, т. е. $f_n(x)$ равна сумме длин интервалов и частей интервалов, принадлежащих Σ_n, которые лежат левее точки x. Применим теперь к ряду из разностей $f_n(x)-f(x)$ теорему Фубини; мы получим, что $f'_n(x)-f'(x) \longrightarrow 0$ почти всюду в интервале (a, b) и, следовательно, почти всюду на E, а так как $f'_n(x)=1$ на E при любом n, то теорема доказана.

Следует заметить, что Лебег формулировал теорему о точках плотности лишь для так называемых измеримых множеств, о которых речь будет идти ниже. Однако это лишь внешнее различие в формулировках; обе теоремы являются следствиями друг друга.

7. Функции скачков. Приведем еще одно следствие теоремы Фубини.

Пусть $\{x_n\}$—какое-нибудь конечное или счетное множество точек в интервале (a, b); рассмотрим ряд

$$\sum f_n(x),$$

где

$$f_n(x)=0 \text{ при } x<x_n,\quad f_n(x_n)=u_n,\quad f_n(x)=u_n+v_n \text{ при } x>x_n.$$

[1]) Лебег [2].

Допустим, что ряды

$$\sum u_n, \ \sum v_n$$

сходятся абсолютно. В этих предположениях ряд $\sum f_n(x)$ сходится, и его сумма $s(x)$ называется *функцией скачков*; $s(x)$ можно представить в виде

$$s(x) = \sum_{x_n < x} u_n + \sum_{x_n < x} v_n. \qquad (6)$$

В том случае, когда $u_n \geqslant 0$ и $v_n \geqslant 0$, функции $f_n(x)$ не убывают и $f'_n(x) = 0$ всюду, кроме точки $x = x_n$; следовательно, согласно теореме Фубини, $s'(x) = 0$ *почти всюду*.

То же справедливо и в общем случае, когда u_n и v_n — числа произвольных знаков. В самом деле, мы покажем, что *всякая функция скачков $s(x)$ представляет собой функцию с ограниченным изменением; ее неопределенное полное изменение $T(x)$ также является функцией скачков с теми же x_n и с $|u_n|$, $|v_n|$ вместо u_n, v_n. Ее неопределенное положительное изменение и неопределенное отрицательное изменение порождаются соответственно числами* $\max\{u_n, 0\}$, $\max\{v_n, 0\}$ *и* $-\min\{u_n, 0\}$, $-\min\{v_n, 0\}$.

Достаточно доказать, что полное изменение $T = T(b)$ функции $s(x)$ равно $U = \sum(|u_n| + |v_n|)$; соответствующее выражение для $T(x)$ получится, если вместо (a, b) взять интервал (a, x).

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем целое число M таким образом, чтобы сумма M первых членов ряда, определяющего U, отличалась от U меньше чем на ε. Возьмем теперь такое разбиение интервала (a, b), чтобы каждый замкнутый частичный интервал $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ содержал одну и только одну из точек $x_1, x_2, \ldots, x_M$ и эта последняя совпадала бы с α или β. Для замкнутого частичного интервала вида $\alpha \leqslant x \leqslant x_r$, где $r \leqslant M$, будем иметь

$$|s(x_r) - s(\alpha)| = \left| u_r + \sum_{\alpha < x_n < x_r} u_n + \sum_{\alpha \leqslant x_n < x_r} v_n \right| \geqslant$$

$$\geqslant |u_r| - \left(\sum_{\alpha < x_n < x_r} |u_n| + \sum_{\alpha \leqslant x_n < x_r} |v_n| \right),$$

где все u_n и v_n, за исключением u_r, имеют номера $> M$. Подобное же неравенство справедливо для частичных интервалов вида $x_r \leqslant x \leqslant \beta$. Отсюда следует, что сумма $\sum |s(\beta) - s(\alpha)|$, распространенная на все частичные интервалы рассматриваемого разбиения, больше или равна $\sum_1^M (|u_n| + |v_n|) - \varepsilon \geqslant U - 2\varepsilon$. Так как, с другой стороны, согласно (6), аналогичная сумма, соответствующая произвольному разбиению, не может превзойти U, то полное изменение T функции $s(x)$ равно U, что и требовалось доказать.

Будучи функцией с ограниченным изменением, $s(x)$ в любой точке имеет пределы справа и слева. Покажем, что *в точках x_n*

функция $s(x)$ имеет левые и правые скачки, равные соответственно u_n и v_n, а в остальных точках она непрерывна.

Возьмем для этого снова разбиение, описанное выше. Для частичных интервалов вида (α, x_r) будем иметь

$$|s(x_r)-s(\alpha)-u_r|<\varepsilon;$$

заставив α стремиться к x_r, получим в пределе

$$|s(x_r)-s(x_r-0)-u_r|\leqslant\varepsilon.$$

Это неравенство верно для $r=1, 2, \ldots, M$, а так как выбор ε ограничивает M только снизу, то оно оказывается справедливым для всех r. В силу того, что ε было выбрано произвольно, мы получаем

$$s(x_r)-s(x_r-0)=u_r \quad (r=1, 2, \ldots).$$

Подобным же образом можно получить равенства

$$s(x_r+0)-s(x_r)=v_r \quad (r=1, 2, \ldots).$$

Тем же рассуждением можно воспользоваться при рассмотрении точки x, отличной от всех x_n. Нужно только множество $\{x_n\}$ дополнить точкой x, поставив ей в соответствие числа u и v, равные 0. От этого функция $s(x)$ не изменится, и мы получим равенства $s(x)-s(x-0)=s(x+0)-s(x)=0$, означающие, что x является точкой непрерывности функции $s(x)$.

Функции скачков интересны тем, что *всякая функция $f(x)$ с ограниченным изменением может быть представлена в виде суммы непрерывной функции $g(x)$ с ограниченным изменением и функции скачков $s(x)$*; эти последние называются соответственно *непрерывной составляющей* и *функцией скачков* функции $f(x)$. В самом деле, $s(x)$ надо задать как функцию скачков, имеющую те же точки разрыва и в них те же скачки, какие имеет функция $f(x)$; тогда функция $g(x)=f(x)-s(x)$ окажется всюду непрерывной и, как разность двух функций с ограниченным изменением, будет иметь ограниченное изменение.

Ясно, что в том случае, *когда $f(x)$ — монотонная функция, например неубывающая, ее непрерывная составляющая $g(x)$ и ее функция скачков $s(x)$ также неубывающие.*

8. Произвольные функции с ограниченным изменением. Мы видели, что функция скачков $s(x)$ имеет почти всюду производную, равную нулю. Ее неопределенное полное изменение $T(x)$, будучи также функцией скачков, тоже имеет почти всюду производную, равную нулю.

Совпадение производных $s'(x)$ и $T'(x)$ соответствует частному случаю следующего предложения, относящегося к произвольным функциям с ограниченным изменением:

Теорема. *Если $f(x)$ — функция с ограниченным изменением, а $T(x)$ — ее неопределенное полное изменение, то почти всюду*

$$T'(x) = |f'(x)|.$$

Выберем последовательность разбиений $\{\Delta_n\}$ интервала (a, b) таким образом, чтобы суммы (3), соответствующие разбиениям Δ_n, отличались от полного изменения $T = T(b)$ меньше чем на 2^{-n}. Имея разбиение Δ_n интервала (a, b) на частичные интервалы $x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k$, построим функцию $f_n(x)$, положив на каждом таком частичном интервале $f_n(x)$ равной

$$f(x) + \text{постоянная},$$

если $f(x_k) - f(x_{k-1}) \geqslant 0$, и

$$-f(x) + \text{постоянная},$$

если $f(x_k) - f(x_{k-1}) < 0$. Постоянные слагаемые выберем так, чтобы $f_n(a)$ равнялась 0, а в точках x_k значения $f_n(x)$ были бы согласованы.

Тогда будем иметь

$$f_n(x_k) - f_n(x_{k+1}) = |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

и, следовательно,

$$T(b) - f_n(b) = T(b) - \sum_k [f_n(x_k) - f_n(x_{k-1})] \leqslant 2^{-n}.$$

С другой стороны, функция $T(x) - f_n(x)$ *возрастающая*; это можно установить, показав, что при $x < \xi$

$$T(\xi) - T(x) \geqslant f_n(\xi) - f_n(x).$$

В том случае, когда x и ξ принадлежат одному и тому же отрезку (x_{k-1}, x_k), это неравенство вытекает из того, что

$$T(\xi) - T(x) \geqslant |f(\xi) - f(x)|.$$

В общем случае, когда

$$x < x_k < \ldots < x_p < \xi,$$

мы просуммируем соответствующие неравенства для отрезков (x, x_k), (x_k, x_{k+1}), $\ldots$, (x_p, ξ).

Ряд

$$\sum [T(x) - f_n(x)]$$

сходится, так как он мажорируется рядом $\sum 2^{-n}$. В силу теоремы Фубини, ряд из производных сходится почти всюду; следовательно, почти всюду

$$T'(x) - f_n'(x) \to 0.$$

Согласно определению функций f_n,

$$f_n'(x) = \pm f'(x),$$

и так как $T'(x) \geqslant 0$, в силу того, что $T(x)$ — возрастающая функция, мы приходим к заключению, что почти всюду $T'(x) = |f'(x)|$.

Метод, которым мы здесь воспользовались, применим также и к изучению *разрывов* функции $f(x)$ и ее неопределенного полного изменения $T(x)$. Сейчас будет доказана

Теорема. *Функции $f(x)$ и $T(x)$ имеют одни и те же точки разрыва, и их скачки в точках разрыва совпадают с точностью до знака, т. е. в любой точке x*

$$T(x)-T(x-0)=|f(x)-f(x-0)|,\quad T(x+0)-T(x)=|f(x+0)-f(x)|.$$

В самом деле, при $x < \xi$ имеем

$$T(\xi)-T(x)-f_n(\xi)+f_n(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |T(\xi)-f_n(\xi)|+|T(x)-f_n(x)| \leqslant 2\cdot 2^{-n};$$

в пределе, когда ξ стремится к x, получим

$$|T(x+0)-T(x)-f_n(x+0)+f_n(x)| \leqslant 2^{1-n}.$$

Отсюда, при $n \to \infty$, вытекает, что

$$f_n(x+0)-f_n(x) \to T(x+0)-T(x).$$

Так как, очевидно, скачки $f_n(x)$ равны, с точностью до знака, скачкам функции $f(x)$, то

$$|f(x+0)-f(x)| = T(x+0)-T(x).$$

Утверждение, касающееся пределов слева, устанавливается точно так же.

9. Теорема Данжуа — Юнг — Сакса о производных числах любой функции. Следующая весьма общая теорема, описывающая *поведение четырех производных чисел какой угодно функции*, представляет известный интерес, хотя и не понадобится нам в дальнейшем.

Для непрерывных функций эту теорему впервые доказали независимо друг от друга Данжуа и Г. Юнг[1]; позднее Г. Юнг обобщила ее на измеримые функции[2]; наконец, Сакс показал, что теорема эта справедлива для совершенно произвольных функций[3]). Доказательство, предложенное Саксом, исключительно просто, как это обычно и бывает в тех случаях, когда устанавливается чрезвычайно общая теорема.

Следуя Данжуа, назовем два производных числа *смежными*, если они оба правые или оба левые, и *противоположными*, если

[1]) Данжуа [1] (см. стр. 174—195); Г. Юнг [1].
[2]) Г. Юнг [2].
[3]) Сакс [1]; см. также Хэнсон [1] и Блюмберг [1].

они не смежные, т. е. одно из них верхнее, а другое нижнее, как, например, λ_g и Λ_d. Сама теорема может быть сформулирована следующим образом:

Теорема. *В любой точке, за исключением точек некоторого множества меры нуль, могут осуществляться лишь следующие возможности: два смежных производных числа либо оба конечны и равны, либо хотя бы одно из них бесконечно; два противоположных производных числа либо оба конечны и равны, либо одно из них, именно то, которое является верхним производным числом, равно ∞, а другое равно $-\infty$.*

Заметим прежде всего, что первое утверждение, касающееся смежных производных чисел, прямо следует из второго; этим последним мы и займемся.

Следует обратить внимание на то, что положение значительно упрощается, если отказаться от правых и левых производных чисел и рассматривать лишь пару *симметричных* производных чисел, верхнее и нижнее, определяемых, например, как верхний и нижний пределы отношения

$$\frac{f(x+h)-f(x-k)}{h+k} \quad (h,\ k \geqslant 0,\ 0 < h+k \to 0).$$

При этом, *за исключением некоторого множества меры нуль, оказываются возможными лишь следующие два случая: либо эти пределы равны соответственно ∞ и $-\infty$, либо существует определенная конечная производная.*

Если функция монотонна, то случай бесконечных пределов, имеющих разные знаки, исключается и остается только одна возможность—наличие конечной производной.

Наметим здесь доказательство теоремы. Нам достаточно показать, что почти всюду, где λ_g отлична от $-\infty$, это производное число и его противоположное Λ_d конечны и равны; остальные комбинации производных чисел можно получить, взяв вместо $f(x)$ последовательно $-f(x)$, $f(-x)$ и $-f(-x)$. Для определенности допустим, что $f(x)$ определена в интервале (a, b); случай, когда $f(x)$ определена на произвольном множестве, не внесет никаких осложнений. Пусть E—множество точек x, в которых λ_g отлична от $-\infty$; это множество можно представить как объединение счетного набора множеств $E_{r,n}$, состоящих из тех точек $x > r$, в которых

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} > -n$$

для всех ξ, заключенных между r и x; при этом $n=0, 1, 2, \ldots$, а r пусть принимает всевозможные рациональные значения, принадлежащие интервалу (a, b). Так как объединение счетного набора множеств меры нуль само является множеством меры нуль, то требуемое равенство достаточно будет установить для почти всех точек каждого из множеств $E_{r,n}$. Так как $f(x)$ можно заменить функцией $f(x-r)+nx$, то мы рассмотрим лишь множество $E_0=E_{0,0}$, соответствующее частной системе значений $n=0$, $r=0$. Далее, мы исключим из рассмотрения те точки множества E_0, которые не являются его точками плотности (достаточно было бы изъять точки, не являющиеся точками плотности его замыкания $\bar{E}_0$), а также те, в которых $f(x)$ не имеет определенной конечной производной относительно множества E_0, т. е. производной, вычисленной таким образом, что $x+h$ стремится к x *по множеству* E_0. Такие изъятия обеднят E_0 лишь на множество меры нуль; это следует, во-первых, из теоремы о точках плотности, а во-вторых, из теоремы Лебега, так как, в силу определения множества E_0, функция $f(x)$ монотонна на этом множестве и, следовательно, имеет почти всюду на нем определенную конечную производную относительно E_0.

Рассмотрим оставшиеся точки x множества E_0. Разностное отношение

$$\frac{f(x')-f(x)}{x'-x},$$

когда x' стремится к x, оставаясь в множестве E_0, имеет, согласно сделанным предположениям, конечный предел, который мы обозначим $f'_{E_0}(x)$. Тогда же, когда значение x' не принадлежит к E_0, но достаточно близко к x, можно вместо x' взять $\xi > x'$, принадлежащее к E_0 и такое, что $\xi - x'$ бесконечно мало по сравнению с $x'-x$. Так как $f(\xi) \geqslant f(x')$, в силу определения множества $E_0=E_{0,0}$, то при замене x' точкой ξ числитель рассматриваемой дроби не уменьшится; знаменатель же существенно не изменится. Последний может принимать как положительные, так и отрицательные значения, поэтому

$$\lambda_g \geqslant f'_{E_0}(x) \geqslant \Lambda_d.$$

С другой стороны, число $f'_{E_0}(x)$, по самому его определению, представляет собой один из пределов, одновременно справа и слева, того же разностного отношения, посредством которого определяются λ_g и Λ_d; следовательно,

$$\lambda_g \leqslant f'_{E_0}(x) \quad \text{и} \quad \Lambda_d \geqslant f'_{E_0}(x),$$

откуда вытекает требуемое равенство. Теорема, таким образом, доказана.

§ 3. ФУНКЦИИ ИНТЕРВАЛА

10. Вводные замечания. Для некоторых приложений важно рассмотреть функции интервала, не обязательно аддитивные. Вообще, функцией интервала $f(I)=f(\alpha, \beta)$ называется закон, ставящий в соответствие каждому интервалу $I=(\alpha, \beta)$ из неко-