нуль, то требуемое равенство достаточно будет установить для почти всех точек каждого из множеств $E_{r,n}$. Так как $f(x)$ можно заменить функцией $f(x-r)+nx$, то мы рассмотрим лишь множество $E_0 = E_{0,0}$, соответствующее частной системе значений $n=0$, $r=0$. Далее, мы исключим из рассмотрения те точки множества E_0, которые не являются его точками плотности (достаточно было бы изъять точки, не являющиеся точками плотности его замыкания $\bar{E}_0$), а также те, в которых $f(x)$ не имеет определенной конечной производной относительно множества E_0, т. е. производной, вычисленной таким образом, что $x+h$ стремится к x *по множеству* E_0. Такие изъятия обеднят E_0 лишь на множество меры нуль; это следует, во-первых, из теоремы о точках плотности, а во-вторых, из теоремы Лебега, так как, в силу определения множества E_0, функция $f(x)$ монотонна на этом множестве и, следовательно, имеет почти всюду на нем определенную конечную производную относительно E_0.

Рассмотрим оставшиеся точки x множества E_0. Разностное отношение

$$\frac{f(x')-f(x)}{x'-x},$$

когда x' стремится к x, оставаясь в множестве E_0, имеет, согласно сделанным предположениям, конечный предел, который мы обозначим $f'_{E_0}(x)$. Тогда же, когда значение x' не принадлежит к E_0, но достаточно близко к x, можно вместо x' взять $\xi > x'$, принадлежащее к E_0 и такое, что $\xi - x'$ бесконечно мало по сравнению с $x'-x$. Так как $f(\xi) \geqslant f(x')$, в силу определения множества $E_0 = E_{0,0}$, то при замене x' точкой ξ числитель рассматриваемой дроби не уменьшится; знаменатель же существенно не изменится. Последний может принимать как положительные, так и отрицательные значения, поэтому

$$\lambda_g \geqslant f'_{E_0}(x) \geqslant \Lambda_d.$$

С другой стороны, число $f'_{E_0}(x)$, по самому его определению, представляет собой один из пределов, одновременно справа и слева, того же разностного отношения, посредством которого определяются λ_g и Λ_d; следовательно,

$$\lambda_g \leqslant f'_{E_0}(x) \quad \text{и} \quad \Lambda_d \geqslant f'_{E_0}(x),$$

откуда вытекает требуемое равенство. Теорема, таким образом, доказана.

§ 3. ФУНКЦИИ ИНТЕРВАЛА

10. Вводные замечания. Для некоторых приложений важно рассмотреть функции интервала, не обязательно аддитивные. Вообще, функцией интервала $f(I) = f(\alpha, \beta)$ называется закон, ставящий в соответствие каждому интервалу $I = (\alpha, \beta)$ из некоторого семейства определенное число. Мы можем рассматривать и многозначные функции интервала; примером может служить

$$f(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha) f(\xi),$$

где ξ — произвольная точка, заключенная между α и β, а $f(x)$ — обычная функция. Выражения такого вида встречаются в теории интеграла Римана. С помощью функций

$$(\beta-\alpha) \sup_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} f(x), \quad (\beta-\alpha) \inf_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} f(x), \tag{7}$$

как известно, определяются верхний и нижний интегралы, иначе называемые интегралами Дарбу. Функцией интервала является длина дуги кривой $y=f(x)$, соединяющей точки с абсциссами $x=\alpha$ и $x=\beta$, или длина дуги кривой

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

концы которой соответствуют значениям параметра $t=\alpha$ и $t=\beta$. Многозначная функция интервала

$$[g(\beta) - g(\alpha)] f(\xi), \tag{8}$$

образованная с помощью двух обычных функций, из которых $g(x)$ имеет ограниченное изменение, а $f(x)$ непрерывна, служит для построения интеграла Стильтьеса [1]). Все функции, приведенные здесь в качестве примеров, при надлежащих предположениях могут быть отнесены, как мы увидим ниже, к классу интегрируемых функций интервала. Отметим, наконец, функцию

$$\frac{[f(\beta)-f(\alpha)]^2}{g(\beta)-g(\alpha)}; \tag{9}$$

на ней основано понятие интеграла Хеллингера [2]), применяемого в теории квадратичных форм с бесконечным числом переменных.

Определения *интегрируемой функции интервала* и ее *интеграла* весьма просты; мы имеем здесь прямое обобщение интеграла Римана или интегралов Дарбу. Интервал (a, b) мы делим на частичные интервалы, составляем суммы значений рассматриваемой функции на этих частичных интервалах и смотрим, стремятся ли такие суммы к определенному конечному пределу, когда разбиения варьируются так, что длины частичных отрезков равномерно стремятся к нулю, иначе говоря, существует ли для любого $\varepsilon > 0$ такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при любом разбиении интервала (a, b) на частичные интервалы, меньшие δ, соответствующие суммы отличаются от некоторой постоянной меньше чем на ε. Если это имеет место, то такая функция интервала называется *интегрируемой*,

---

[1]) Подробно интегралы Стильтьеса рассмотрены в гл. III.

[2]) См. Хеллингер [1] (в частности, стр. 25—51) и [2] (стр. 234—240).

а предел описанных сумм — ее *интегралом*; последний обозначается

$$\int\limits_a^b f(\alpha, \beta).$$

Для того чтобы оценить степень общности этого понятия, достаточно заметить, что всякая функция $f(\alpha, \beta)$ вида $f(\beta)-f(\alpha)$ интегрируема, какова бы ни была функция $f(x)$.

Прежде чем перейти к рассмотрению перечисленных выше примеров, мы докажем две общие теоремы, касающиеся соотношений между интегралами и производными функций интервала.

Производной функции интервала $f(\alpha, \beta)$ *в точке* x называется предел, если он существует, к которому стремится отношение

$$\frac{f(\alpha, \beta)}{\beta-\alpha},$$

когда интервал (α, β) стягивается к точке x. Аналогично определяются производные числа. В том частном случае, когда функция интервала $f(\alpha, \beta)$ аддитивна, ее производная совпадает с производной в обычном смысле функции $F(x)=f(a, x)$; то же справедливо и для производных чисел.

Задача дифференцирования функций интервала исследовалась целым рядом авторов с очень общей точки зрения[1]). Первая из приведенных нами здесь теорем передает основное содержание полученных в этом направлении результатов.

11. Первая основная теорема. Так названа следующая

Теорема. *Пусть* $f(\alpha, \beta)$ — *неотрицательная функция интервала, интегрируемая на* (a, b). *Если ее интеграл равен нулю, то* $f(\alpha, \beta)$ *имеет почти всюду на* (a, b) *производную, равную нулю.*

Доказательство весьма просто. Пусть $\delta_1, \delta_2, \ldots$ — положительные числа, выбранные таким образом, чтобы суммы значений функции $f(\alpha, \beta)$, соответствующие разбиениям (a, b) на частичные интервалы, длины которых не превышают δ_n, отличались от интеграла меньше чем на n-й член какого-нибудь заранее заданного сходящегося ряда, например $\sum 2^{-n}$. Рассмотрим теперь функции $F_n(x)$, определенные следующим образом: $F_n(x)$ равна верхней грани сумм $f(\alpha, \beta)$, соответствующих разбиению интервала (a, x) на частичные интервалы с длинами $\leqslant \delta_n$. Функции $F_n(x)$, очевидно, неубывающие, и составленный из них ряд сходится. Следовательно, согласно теореме Фубини, $F'_n(x)$ почти всюду стремятся к нулю. Далее, так как

$$f(\alpha, \beta) \leqslant F_n(\beta)-F_n(\alpha) \quad (\beta-\alpha<\delta_n),$$

[1]) См., в частности, Беркилл [1]—[3], Р. Юнг [1], Сакс [2] (стр. 102—107) и [3] (стр. 165—169).

то производные функций $F_n(x)$ там, где они существуют, будут не меньше, чем производные числа функции интервала $f(\alpha, \beta)$. Эти последние, таким образом, почти всюду равны нулю, что и требовалось доказать.

12. Вторая основная теорема. Прежде чем говорить о второй основной теореме, отметим одно обстоятельство, которым мы уже пользовались: *если* $f(\alpha, \beta)$ *интегрируема на* (a, b), *то она интегрируема на любом интервале* (c, d), *заключенном в* (a, b).

В самом деле, возьмем какое-нибудь $\varepsilon > 0$ и соответствующее ему $\delta = \delta(\varepsilon)$ для интервала (a, b) (см. п. 10). Рассмотрим два каких-нибудь разбиения интервала (c, d) на частичные интервалы длиной $< \delta$ и по одному удовлетворяющему тому же условию разбиению каждого из интервалов (a, c) и (d, b); при этом мы получаем два разбнения интервала (a, b). Возьмем разность соответствующих этим разбиениям сумм.

Эти последние обе отличаются от интеграла функции $f(\alpha, \beta)$ на интервале (a, b) меньше чем на ε, поэтому абсолютная величина рассматриваемой разности меньше 2ε. А так как слагаемые, соответствующие интервалам (a, c) и (d, b), взаимно уничтожаются, то разность сумм, распространенных на интервал (c, d), оказывается по абсолютной величине меньше 2ε. В силу критерия сходимости Коши, такие суммы имеют предел, т. е. $f(\alpha, \beta)$ интегрируема на интервале (c, d).

Отметим далее, что сходимость сумм к соответствующим интегралам равномерна относительно всех частичных интервалов. Наконец, интеграл функции $f(\alpha, \beta)$ по переменному интервалу (c, d), содержащемуся в (a, b), представляет собой *аддитивную* функцию интервала и выражается в виде $F(d) - F(c)$ через неопределенный интеграл $F(x)$.

Для заданного $\varepsilon > 0$ возьмем какое-нибудь разбиение интервала (a, b) на частичные интервалы $I_1, I_2, \ldots, I_n$, длины которых не превосходят $\delta = \delta(\varepsilon)$; для этого разбиения, так же как и для любого разбиения, которое можно получить добавлением новых точек деления, соответствующие суммы отличаются от интеграла функции $f(\alpha, \beta)$ на интервале (a, b) не больше чем на ε. В частности, сохраняя некоторые из интервалов $I_k = (\alpha_k, \beta_k)$ и разбивая неограниченно остальные, мы получим в пределе сумму слагаемых двух родов: первые соответствуют неизмененным частичным интервалам, вида $f(\alpha_k, \beta_k)$, вторые — остальным I_k, вида $F(\beta_k) - F(\alpha_k)$. Поменяв, далее, ролями обе группы частичных интервалов и взяв разность соответствующих сумм, каждая из которых не более чем на ε отличается от интеграла, мы получим неравенство

$$\sum_1^n \pm [f(\alpha_k, \beta_k) - (F(\beta_k) - F(\alpha_k))] \leqslant 2\varepsilon.$$

Учтя, наконец, то, что знак каждого из слагаемых может быть выбран произвольно, получим

$$\sum_{1}^{n}|f(\alpha_k, \beta_k)-(F(\beta_k)-F(\alpha_k))|\leqslant 2\varepsilon.$$

Это означает, что функция интервала

$$g(I)=g(\alpha, \beta)=|f(\alpha, \beta)-(F(\beta)-F(\alpha))|,$$

очевидно, неотрицательная, интегрируема и интеграл ее равен нулю. Применив нашу первую основную теорему, мы придем к заключению, что $g(I)$ имеет производную, почти всюду равную нулю. Таким образом, доказана

Теорема. *Интегрируемая функция интервала $f(I)$ и ее неопределенный интеграл $F(x)$ имеют почти всюду одинаковые производные числа; в частности, почти всюду на множестве, на котором одна из этих функций имеет определенную конечную производную, другая также имеет определенную конечную производную.*

13. Интегралы Дарбу и интеграл Римана. Рассмотрим снова обе функции интервала (7) и образуем их интегралы в том смысле, как они были определены выше; в результате мы получим так называемые интегралы Дарбу, верхний и нижний, функции $f(x)$. Первый из этих интегралов, вообще говоря, больше второго; если они совпадают, то функция $f(x)$ называется интегрируемой, а общее значение ее интегралов Дарбу называется интегралом Римана. Таким образом, условие интегрируемости в смысле Римана функции $f(x)$ на интервале (a, b) состоит в том, что неотрицательная функция интервала

$$(\beta-\alpha)\left[\sup_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta} f(x)-\inf_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta} f(x)\right]=(\beta-\alpha)\,\omega(f;\,\alpha,\,\beta), \tag{10}$$

где $\omega(f;\,\alpha,\,\beta)$ означает *колебание функции $f(x)$ на интервале* (α, β), должна иметь интеграл, равный нулю. Производная $\omega(x)$ этой функции интервала, представляющая собой *колебание функции $f(x)$ в точке x*, обращается в нуль во всех точках непрерывности функции $f(x)$; обратно, равенство $\omega(x)=0$ означает, что $f(x)$ непрерывна в точке x.

Сопоставив это замечание с первой основной теоремой, мы получим *необходимое условие интегрируемости функции $f(x)$ в смысле Римана*; оно состоит в том, что *$f(x)$ должна быть непрерывна почти всюду.*

Если функция $f(x)$ ограничена, то высказанное условие и достаточно. Может быть, будет небезынтересно доказать и это предложение с помощью функций интервала, так как обычно и необходимость и достаточность условия устанавливаются иными методами. Для этого заметим, что так как $f(x)$, а следовательно, и $\omega(f;\ \alpha,\ \beta)$ ограничены, то неопределенный интеграл функции (10), т. е.

$$\Omega(x)=\int_a^x(\beta-\alpha)\,\omega(f;\ \alpha,\ \beta),$$

удовлетворяет условию Липшица:

$$\Omega(\beta)-\Omega(\alpha)\leqslant C(\beta-\alpha)\qquad(\alpha<\beta);\tag{11}$$

кроме того, $\Omega(x)$ не убывает. Далее, согласно второй основной теореме, $\Omega(x)$ имеет почти всюду производную, совпадающую с производной функции (10), т. е., в силу предположения относительно $f(x)$, $\Omega'(x)$ почти всюду равна 0. Таким образом, нам остается только доказать, что *неубывающая функция* $\Omega(x)$, *удовлетворяющая условию* (11) *и имеющая почти всюду производную, равную нулю, приводится к постоянной*, т. е. образ интервала (a, b) при отображении $y=\Omega(x)$ состоит из единственной точки.

Рассмотрим для этого множество E тех точек, в которых $\Omega'(x)$ не существует или не равна нулю, и его образ при отображении $y=\Omega(x)$, который мы обозначим $\Omega(E)$. Так как E — множество меры нуль, то его можно покрыть системой интервалов с суммой длин $<\varepsilon$. В силу (11), образы этих интервалов будут содержаться в интервалах с суммой длин $<C\varepsilon$; следовательно, и $\Omega(E)$ будет множеством меры нуль.

То же верно и для $\Omega(e)$ — образа дополнительного множества $e=(a,\ b)\setminus E$. В самом деле, на e выполняется равенство $\Omega'(x)=0$, поэтому для каждого x из e найдется точка ξ, такая, что $\Omega(\xi)-\Omega(x)<\varepsilon(\xi-x)$, где $\varepsilon>0$ выбрано сколь угодно малым. Иначе говоря, при фиксированном ε множество e содержится в множестве, которое строится для функции $g(x)=\varepsilon x-\Omega(x)$ согласно лемме п. 3, и которое мы обозначим e_ε. Упомянутая лемма утверждает, что e_ε представляет собой систему интервалов $(a_k,\ b_k)$, для которых $g(a_k)\leqslant g(b_k)$, т. е. $\Omega(b_k)-\Omega(a_k)\leqslant\varepsilon(b_k-a_k)$; отсюда вытекает, что сумма длин интервалов $(\Omega(a_k),\ \Omega(b_k))$, образующих множество $\Omega(e_\varepsilon)$, не превосходит $\varepsilon(b-a)$ и, следовательно, множество $\Omega(e)$, содержащееся во всех таких $\Omega(e_\varepsilon)$, имеет меру нуль.

Мы показали, таким образом, что интервал $(\Omega(a),\ \Omega(b))$, являясь объединением двух множеств, каждое из которых меры нуль, сам представляет собой множество меры нуль.

Строго говоря, наше рассуждение будет завершено только тогда, когда мы покажем, что никакой интервал положительной длины не может быть множеством меры нуль. До тех пор пока это не доказано, вообще все наши предложения, утверждающие существование „почти всюду“ того или иного соотношения, представляют собой лишь игру слов. Итак, допустим противное, т. е.

что некоторый интервал (a, b), в котором $a < b$, есть множество меры нуль. Это означает, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, интервал (a, b) может быть покрыт последовательностью интервалов с суммой длин $< \varepsilon$. Возьмем внутри интервала (a, b) замкнутый интервал длины $\frac{b-a}{2}$. Он будет целиком покрыт интервалами, принадлежащими рассматриваемой последовательности.

Из них, согласно известной теореме Бореля, некоторое конечное число опять-таки покрывает выбранный замкнутый интервал; отсюда следует, что $\varepsilon > \frac{b-a}{2}$, в противоречии с нашим предположением.

14. Теорема Дарбу. Нам остается заполнить еще один пробел. В начале предыдущего пункта мы воспользовались существованием верхнего и нижнего интегралов произвольной ограниченной функции; отсюда вытекала интегрируемость функции интервала (10). Соответствующая теорема существования приводится в курсах классического анализа, в частности в первой главе учебника Жордана. Однако мы предпочитаем привести ее здесь в виде некоторого общего принципа, на который не раз будем ссылаться в дальнейшем.

Предположим, что $f(\alpha, \beta)$ — *полуаддитивная* функция[1]; это означает, что при $\alpha < \beta < \gamma$

$$f(\alpha, \gamma) \leqslant f(\alpha, \beta) + f(\beta, \gamma).$$

Из этого неравенства следует, что суммы, служащие для определения интеграла, не уменьшаются при добавлении новых точек деления. Заметим, что можно было бы рассматривать функции, удовлетворяющие противоположному неравенству. Этот случай сводится к рассматриваемому заменой $f(\alpha, \beta)$ функцией $-f(\alpha, \beta)$; в соответствующей теореме будет при этом говориться о нижней грани сумм.

Второе предположение будет состоять в том, что *функция* $f(\alpha, \beta)$ *всюду непрерывна.* Это означает, что, какова бы ни была точка x, $f(\alpha, \beta)$ становится бесконечно малой, когда интервал (α, β) стягивается к точке x, т. е. для любой точки x и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|f(\alpha, \beta)| < \varepsilon$, коль скоро $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ и $\beta - \alpha < \delta$.

Предположим, наконец, что суммы $\sum f(\alpha_{k-1}, \alpha_k)$, соответствующие всевозможным разбиениям интервала (a, b), *имеют верхнюю грань* L.

Тогда справедлива следующая

Теорема. *При указанных выше трех предположениях функция* $f(\alpha, \beta)$ *интегрируема и ее интеграл равен* L.

[1] В оригинале авторы называют такие функции „неубывающими при разбиении“ (non-décroissantes par décomposition).— *Прим. перев.*

Следует заметить, что приводимое ниже доказательство по существу воспроизводит доказательство теоремы Дарбу.

Возьмем такое разбиение Δ_ε, для которого соответствующая сумма больше, чем $L-\frac{\varepsilon}{2}$; пусть ν — число точек деления, производящих выбранное разбиение. Выберем δ так, чтобы при $\beta-\alpha<\delta$ для интервалов (α, β), окружающих любую из этих точек деления, выполнялось неравенство $|f(\alpha, \beta)|<\frac{\varepsilon}{6\nu}$, и рассмотрим произвольное разбиение Δ, при котором все частичные интервалы имеют длины $<\delta$; такому разбиению соответствует сумма Σ. Объединив разбиения Δ_ε и Δ, мы получим новое разбиение Δ' и соответствующую сумму Σ'. Так как функция $f(\alpha, \beta)$ полуаддитивна, то $\Sigma' \geqslant \Sigma_\varepsilon > L-\frac{\varepsilon}{2}$. Но, с другой стороны, от разбиения Δ можно перейти к разбиению Δ', добавляя последовательно ν точек деления, порождающих разбиение Δ_ε; при добавлении каждой такой точки соответствующая сумма возрастает не больше, чем на $\frac{\varepsilon}{2\nu}$, следовательно, $\Sigma' \leqslant \Sigma+\frac{\varepsilon}{2}$. Сопоставив два полученных неравенства, мы придем к заключению, что $\Sigma \geqslant L-\varepsilon$, т. е. Σ отличается от L не больше чем на ε, а это и требовалось доказать.

Нижний интеграл ограниченной функции $f(x)$ как функция интервала принадлежит к рассматриваемому типу; верхний интеграл, а также разность между верхним и нижним интегралами, т. е. интеграл функции интервала (10), относятся к противоположному типу.

15. Функции с ограниченным изменением и спрямляемые кривые. Следующие два понятия — полное изменение функции и длина дуги, — если их рассматривать как интегралы некоторых функций интервала, принадлежат к тому типу интегралов, который мы только что рассмотрели. Хотя первый из них является частным случаем второго, полезно будет сначала рассмотреть их отдельно.

Полное изменение на интервале (a, b) непрерывной функции $f(x)$ с ограниченным изменением представляет собой интеграл, распространенный на (a, b), функции интервала

$$f(\alpha, \beta)=|f(\beta)-f(\alpha)|; \tag{12}$$

это обстоятельство находит свое отражение в общепринятом обозначении

$$T(x)=\int_a^x |df(x)|.$$

Такой интеграл принадлежит, очевидно, к рассматриваемому типу; применив к нему нашу вторую основную теорему, мы придем к выводу, что $T(x)$ — неопределенное полное изменение функции $f(x)$ — имеет производную $T'(x)$, почти всюду совпадающую, с точностью до знака, с $f'(x)$, т. е. $T'(x) = |f'(x)|$; выше мы показали (см. п. 8), что это справедливо даже для разрывных функций.

К разрывным функциям с ограниченным изменением мы еще вернемся, а теперь займемся *спрямляемыми кривыми*. Пусть нам задана кривая Γ (для определенности в обычном трехмерном пространстве): $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, где $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ — непрерывные функции. Рассмотрим вписанные в эту кривую ломаные, т. е. линии, которые получатся, если взять какое-нибудь разбиение интервала (a, b) на частичные интервалы (t_{k-1}, t_k), где $k = 1, 2, \ldots, n$, $t_0 = a$, $t_n = b$, и провести хорды $P_{k-1}P_k$, где P_k — точки кривой, соответствующие значениям параметра $t = t_k$. Кривая Γ называется спрямляемой, если длины ломаных $P_0 \ldots P_n$, отвечающих произвольным разбиениям интервала (a, b), ограничены сверху; их верхняя грань называется при этом длиной кривой Γ. Так как длина хорды $P_{k-1}P_k$ ограничена снизу любой из величин $|x(t_k) - x(t_{k-1})|$, $|y(t_k) - y(t_{k-1})|$, $|z(t_k) - z(t_{k-1})|$, а сверху — их суммой, то кривая Γ оказывается спрямляемой тогда и только тогда, когда непрерывные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ имеют ограниченное изменение. С другой стороны, согласно нашим общим теоремам, это условие эквивалентно интегрируемости функции интервала $f(\alpha, \beta)$, равной длине хорды, которая соединяет точки $P(\alpha)$ и $P(\beta)$ кривой, соответствующие значениям α и β параметра t; интеграл такой функции, взятый в пределах от a до b, оказывается равным длине кривой Γ. Далее, если длину дуги кривой от точки $P(a)$ до точки $P(t)$ обозначить $s(t)$, то, в силу нашей второй основной теоремы, получим обобщение классического равенства

$$(s'(t))^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2, \tag{13}$$

установленное последовательно Лебегом[1]) и Тонелли[2]) и *справедливое для любой спрямляемой кривой при почти всех значениях параметра t*. Последний может быть выбран совершенно произвольно; взяв, в частности, в качестве параметра длину s, мы получим соотношение

$$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 + (z'(s))^2 = 1, \tag{14}$$

обеспечивающее *существование определенной касательной почти всюду относительно s.*

---

[1]) Лебег [2] (1-е изд., стр. 59—63, 125—129).

[2]) Тонелли [2], Лебег [2] (2-е изд., стр. 198—201).

Те же результаты можно получить без помощи второй основной теоремы, применив первую основную теорему к функции интервала $f(\alpha, \beta)$, равной разности между длиной дуги и длиной хорды, соединяющих точки $P(\alpha)$ и $P(\beta)$; эта функция, очевидно, неотрицательна, полуаддитивна, и интеграл ее равен нулю. При этом соотношение (14) можно записать, в очевидных обозначениях, в виде соотношения

$$\frac{\overline{PR}}{\widehat{PQR}} \to 1,$$

справедливого почти всюду.

Вернемся к случаю одной функции $x(t)$, непрерывной и с ограниченным изменением. Если поставить ей в соответствие „кривую" $x = x(t)$, $y = 0$, $z = 0$, то эта последняя будет, очевидно, спрямляемой. Функция $s(t)$ будет совпадать с неопределенным полным изменением

$$T(t) = \int_a^t |dx(t)|.$$

Формула (13) приведется в этом случае к равенству

$$T'(t) = |x'(t)|,$$

справедливому почти всюду. Тот факт, что это равенство, установленное выше независимо, оказывается частным случаем классической формулы (13), подсказывает один из возможных подходов к разрывным функциям. Для определенности допустим сначала, что $x(t)$ имеет одну точку разрыва $t = c\ (a < c < b)$, и рассмотрим снова „кривую" $x = x(t)$, $y = 0$, $z = 0$, на этот раз дополненную двумя ориентированными отрезками, из которых один идет от точки $x(c-0)$ до точки $x(c)$, а другой — от $x(c)$ до $x(c+0)$. В общем случае такое построение должно быть проведено конечное или счетное число раз с тем, чтобы устранить все разрывы функции $x(t)$. Применив полученные результаты к кривой, дополненной указанным способом, мы получим, что равенство $T'(t) = |x'(t)|$, справедливое почти всюду, имеет место для любой функции с ограниченным изменением.

Еще более тесная, с формальной точки зрения, связь существует между функциями с ограниченным изменением и плоскими спрямляемыми кривыми $x = x(t)$, $y = y(t)$, если эти последние рассматривать в плоскости комплексного переменного $\zeta = x + iy$. В этом случае длина кривой равна *полному изменению комплексной функции* $\zeta(t) = x(t) + iy(t)$, определяемому по аналогии с действительными функциями как верхняя грань сумм $\sum |\zeta(t_k) - \zeta(t_{k-1})|$.