Глава II

ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

16. Интегралы ступенчатых функций. Две леммы. После Коши и Римана, в течение второй половины прошлого века, предлагались многочисленные определения интеграла, относившиеся как к ограниченным, так и к неограниченным функциям. Но лишь в 1902 г. А. Лебег в своей диссертации [1] ввел понятие интеграла, коренным образом изменившее взгляд на весь круг задач, основанных на интегрировании. Причины, вызвавшие такие изменения, а также достоинства теории Лебега выяснятся в дальнейшем; бесполезно говорить об этом заранее.

В диссертации Лебега и в его лекциях по теории интеграла, читанных им в Коллеж де Франс, путь, ведущий к цели, еще весьма тернист; прошли годы, прежде чем современники освоились с новыми методами. За эти годы были сделаны попытки изыскать новые пути, более доступные, и тем самым, как говорит Валле Пуссен, ввести новую теорию в обиход университетского преподавания. Здесь мы изложим эту теорию, отправляясь от одного из таких определений, связанного с понятием линейного функционала, тогда как первоначальное определение опиралось на понятие меры множества. Попутно мы приведем и некоторые другие определения, в том числе и лебеговское, и сравним их как между собой, так и с тем определением, которое сейчас будет дано.

Сначала рассмотрим ступенчатые функции, определенные в конечном или бесконечном интервале (a, b), т. е. такие функции, которые принимают постоянные значения c_k на интервалах i_k конечной длины $|i_k|$, взятых в конечном числе, и равные нулю вне этих интервалов. В концах интервалов значения функций могут быть какими угодно; в самом деле, в дальнейшем мы сможем вообще пренебрегать множествами меры нуль. Для каждой ступенчатой функции интеграл определяется обычным образом как сумма

$$\sum c_k |i_k|.$$

С помощью предельного перехода нам удастся распространить понятие интеграла на функции гораздо более общего вида.

Заметим, что в качестве исходного можно было бы с равным успехом взять класс непрерывных или класс интегрируемых по Риману функций, причем, в случае бесконечного интервала $(a, b,)$

каждая функция должна быть равна нулю вне некоторого конечного интервала, своего для каждой функции. Почти ничего не изменив в деталях доказательств, мы пришли бы к тому же окончательному классу функций, с тем же понятием интеграла. Ступенчатые функции выбраны нами лишь затем, чтобы ни в какой мере не опираться на теорию интегрирования. Условимся обозначать ступенчатые функции греческими буквами.

Изложение будет основано на следующих двух простых леммах.

Лемма А. *Для любой убывающей последовательности ступенчатых функций $\{\varphi_n(x)\}$, почти всюду стремящейся к нулю, последовательность их интегралов также стремится к нулю.*

Лемма Б. *Если для некоторой неубывающей последовательности ступенчатых функций $\{\varphi_n(x)\}$ последовательность их интегралов остается ограниченной, то $\{\varphi_n(x)\}$ почти всюду стремится к конечному пределу.*

Доказательство леммы А. Возьмем множество E_0, на котором $\{\varphi_n(x)\}$ не стремится к нулю, присоединив к нему также точки разрыва функций $\varphi_n(x)$. Задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, покроем E_0 конечной или счетной системой интервалов Σ_0 с суммой длин, меньшей ε. Возьмем какую-нибудь точку x_0, оказавшуюся вне E_0; для нее существует n, такое, что $\varphi_n(x_0) < \varepsilon$. При этом, очевидно, неравенство $\varphi_n(x) < \varepsilon$ будет выполняться во всех точках некоторого интервала i_k, соответствующего функции $\varphi_n(x)$ и содержащего x_0. Всевозможным x_0 отвечают различные интервалы такого рода, и каждому из них соответствует определенное n; систему таких интервалов обозначим Σ_1. Обе системы Σ_0 и Σ_1 в совокупности покрывают замкнутый интервал $[a_1, b_1]$, вне которого $\varphi_1(x)=0$; следовательно, согласно теореме Бореля, $[a_1, b_1]$ оказывается покрытым некоторым конечным числом интервалов из Σ_0 и Σ_1. Те из них, которые принадлежат Σ_0, имеют сумму длин $< \varepsilon$, поэтому интеграл по ним от любой $\varphi_n(x)$ не превосходит $M\varepsilon$, где M — общая верхняя граница функций $\varphi_n(x)$. Что касается интервалов, принадлежащих Σ_1, то на каждом из них одна из функций $\varphi_n(x)$ (а вместе с ней и все последующие) оказывается меньше ε. Следовательно, если N — наибольший из номеров n, соответствующих рассматриваемым интервалам, то функция $\varphi_N(x)$, а с ней и все последующие будут меньше ε на всех выделенных из Σ_1 интервалах и интеграл по ним от этих функций не превзойдет $(b_1-a_1)\varepsilon$. Итак, интегралы от a до b функций $\varphi_n(x)$ при $n \geqslant N$ не превзойдут $\varepsilon(M+b_1-a_1)$; лемма A, таким образом, доказана.

Доказательство леммы Б. Рассмотрим неубывающую последовательность ступенчатых функций и предположим, что последовательность их интегралов на (a, b) ограничена сверху некоторым числом A. Не нарушая общности, можно считать, что все φ_n положительны, так как в противном случае мы взяли бы последовательность $\{\varphi_n - \varphi_1\}$.

Множество E_0 точек, в которых $\{\varphi_n(x)\}$ расходится, содержится, очевидно, в множестве E_ε тех точек, в которых, начиная с некоторого номера, $\varphi_n(x) > \frac{A}{\varepsilon}$. Так как при любом n такое неравенство выполняется на некотором интервале или на некоторой конечной системе интервалов $\Sigma_{n,\,\varepsilon}$ (если вообще выполняется где-либо), то E_ε само оказывается объединением конечного или счетного множества интервалов. Сумма длин интервалов, образующих систему $\Sigma_{n,\,\varepsilon}$, помноженная на $\frac{A}{\varepsilon}$, не превзойдет интеграла функции $\varphi_n(x)$, т. е. будет меньше A, следовательно, сама эта сумма будет меньше ε, а так как

$$\Sigma_{n,\,\varepsilon} \subset \Sigma_{n+1,\,\varepsilon},$$

то и сумма длин интервалов, образующих E_ε, не превзойдет ε. Итак, задавшись произвольным ε, мы показали, что множество E_0 можно покрыть конечной или счетной системой интервалов, сумма длин которых не превосходит ε; следовательно, E_0 представляет собой множество меры нуль.

17. Интегралы суммируемых функций. Класс ступенчатых функций мы обозначим C_0. Теперь, располагая леммами А и Б, мы распространим определение интеграла на *класс C_1 функций, являющихся пределами почти всюду последовательностей $\{\varphi_n\}$, рассмотренных в лемме* Б.

Согласно этой лемме, предел $f(x) = \lim \varphi_n(x)$ существует почти всюду, если интегралы функций $\varphi_n(x)$ образуют ограниченную последовательность, которая, будучи неубывающей, имеет конечный предел; значение, равное этому пределу, и приписывается интегралу функции $f(x)$. Итак,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

Для того чтобы оправдать это определение, надо еще показать, что значение предела в правой части не зависит от выбора функций φ_n, т. е. что этот предел не изменится, если последовательность $\{\varphi_n\}$ заменить другой последовательностью $\{\psi_n\}$ такого же типа, сходящейся почти всюду к той же функции $f(x)$. Мы докажем несколько более общее предложение, состоящее в том, что если последовательность $\{\psi_n\}$ сходится почти всюду к некоторой функции $g(x) \geqslant f(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx \geqslant \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

Отсюда будет следовать равенство обоих пределов в том случае, когда почти всюду $f(x)=g(x)$.

Для доказательства обозначим пределы интегралов от $\psi_n(x)$ и $\varphi_n(x)$ соответственно J_1 и J_2 и возьмем какую-нибудь функцию $\varphi_m(x)$ из последовательности $\{\varphi_n\}$. Положительная часть разности $\varphi_m(x)-\psi_n(x)$ стремится к нулю почти всюду при $n\to\infty$, и, согласно лемме А, ее интеграл также стремится к нулю. Следовательно, интеграл самой этой разности имеет отрицательный или равный нулю предел, т. е.

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,dx-J_1\leqslant 0, \qquad \int_a^b \varphi_m(x)\,dx\leqslant J_1.$$

Перейдя к пределу при $m\to\infty$, мы получим требуемое неравенство $J_1\geqslant J_2$.

Рассмотрим теперь еще более широкий *класс* C_2, *состоящий из разностей всевозможных функций, принадлежащих классу* C_1. Интеграл разности f_1-f_2 определим формулой

$$\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,dx=\int_a^b f_1(x)\,dx-\int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Для того чтобы оправдать это определение, надо вновь показать, что при $f_1-f_2=g_1-g_2$ функции, стоящие в обеих частях этого равенства, имеют одинаковые интегралы. Это равносильно следующему утверждению: если $f_1+g_2=f_2+g_1$, то

$$\int_a^b f_1(x)\,dx+\int_a^b g_2(x)\,dx=\int_a^b f_2(x)\,dx+\int_a^b g_1(x)\,dx.$$

Таким образом, то, что мы хотим доказать, сводится к аддитивности интеграла для функций класса C_1, а это свойство прямо следует из определения.

Нетрудно видеть, что C_2 представляет собой линейный класс, т. е., коль скоро ему принадлежат функции $h_1(x)$ и $h_2(x)$, ему принадлежат и $c_1h_1(x)+c_2h_2(x)$. Далее, интеграл представляет собой аддитивную функцию интервала, т. е. если $a<b<c$ и $h(x)$ интегрируема на (a, b) и на (b, c), то $h(x)$ интегрируема и на (a, c), причем $\int_a^c h(x)\,dx=\int_a^b h(x)\,dx+\int_b^c h(x)\,dx$. Это свойство очевидно тогда, когда h принадлежит классу C_0, и отсюда вытекает его справедливость в общем случае.

Интеграл, который мы только что определили, обладает следующим важным свойством: если функция $h(x)$ интегрируема, или, как говорит Лебег, *суммируема*, то интегрируемы *ее абсолютная величина* $|h(x)|$, а также *ее положительная* и *отрица-*

тельная части $h^+(x)$ и $h^-(x)$. В самом деле, представим h в виде $h=f_1-f_2$, где f_1 и f_2 принадлежат классу C_1. При этом классу C_1 будут принадлежать $\sup(f_1, f_2)$ и $\inf(f_1, f_2)$; это вытекает из того, что соответствующее свойство выполняется для функций класса C_0. Соотношения

$$|h| = \sup(f_1, f_2) - \inf(f_1, f_2),$$
$$h^+ = \sup(f_1, f_2) - f_2 = f_1 - \inf(f_1, f_2),$$
$$h^- = \sup(f_1, f_2) - f_1 = f_2 - \inf(f_1, f_2)$$

показывают, что $|h|$, h^+ и h^- принадлежат классу C_2.

Непосредственно из определения интеграла следует также, что *для всякой суммируемой функции* $h(x)$ *существует последовательность ступенчатых функций, такая, что*

$$\int_a^b |h(x) - \varphi_n(x)|\, dx \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

В самом деле, пусть $h = f_1 - f_2$; возьмем возрастающие последовательности ступенчатых функций $\{\varphi_{1n}(x)\}$ и $\{\varphi_{2n}(x)\}$, сходящиеся почти всюду соответственно к $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Положив $\varphi_n(x) = \varphi_{1n}(x) - \varphi_{2n}(x)$, получим

$$\int_a^b |h(x) - \varphi_n(x)|\, dx \leqslant \int_a^b [f_1(x) - \varphi_{1n}(x)]\, dx + \int_a^b [f_2(x) - \varphi_{2n}(x)]\, dx \to 0.$$

Здесь уместно выяснить, какое место среди суммируемых функций занимают функции, *интегрируемые в смысле Римана*. Возьмем одну из таких функций $f(x)$ и образуем последовательность $\{\varphi_n(x)\}$, где $\varphi_n(x)$ задана следующим образом: интервал (a, b) делится на 2^n равных частичных интервалов, и на каждом из них $\varphi_n(x)$ полагается постоянной и равной нижней грани функции $f(x)$. Так как $f(x)$ почти всюду непрерывна, то неубывающая последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится к $f(x)$ почти всюду. Предел последовательности интегралов функций φ_n будет, с одной стороны, интегралом функции $f(x)$ в только что определенном смысле, а с другой стороны, ее нижним интегралом Дарбу, т. е. ее интегралом в смысле Римана. Таким образом, в рассматриваемом случае оба интеграла совпадают. Далее, $f(x)$ принадлежит классу C_1, и, как легко видеть, то же верно и для $-f(x)$. Обратно, если $f(x)$ и $-f(x)$ одновременно принадлежат классу C_1, то оба интеграла Дарбу функции $f(x)$ совпадают с интегралом в только что определенном смысле, и $f(x)$ оказывается интегрируемой в смысле Римана. Мы приходим к следующему выводу:

Для того чтобы функция $f(x)$ *была интегрируема в смысле Римана, необходимо и достаточно, чтобы* $f(x)$ *и* $-f(x)$ *принадлежали одновременно классу* C_1.

Мы предоставляем читателю построить пример функции класса C_2, не принадлежащей классу C_1; варьируя примеры такого рода, можно дать себе отчет в том, насколько введенное здесь понятие интеграла является более общим по сравнению с интегралом Римана.

18. Интегрирование возрастающих последовательностей (теорема Б. Леви). Рассмотрим теперь один из самых замечательных фактов излагаемой теории. Может показаться заманчивым применить описанный процесс к функциям класса C_1 или класса C_2 с целью распространить понятие интеграла на еще более широкий класс функций. Мы увидим сейчас, что такой процесс не вывел бы нас за пределы класса C_2; иначе говоря, класс суммируемых функций оказывается замкнутым относительно такого предельного перехода. Более того, в случае неубывающих последовательностей суммируемых функций допустим предельный переход под знаком интеграла.

Рассмотрим сначала неубывающую последовательность функций $\{f_n\}$, принадлежащих классу C_1. Предположим, что

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \leqslant A$$

для всех n. Для любого фиксированного n возьмем возрастающую последовательность ступенчатых функций $\{\varphi_{nk}\}$, сходящуюся почти всюду к f_n. Положим

$$\varphi_n = \sup_{i \leqslant n} \{\varphi_{in}\}.$$

Эти ступенчатые функции образуют возрастающую последовательность, и, так как

$$\varphi_{in} \leqslant f_i \leqslant f_n \text{ при } i \leqslant n,$$

то

$$\varphi_n \leqslant f_n$$

и, следовательно,

$$\int_a^b \varphi_n\,dx \leqslant \int_a^b f_n\,dx \leqslant A.$$

Таким образом, последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится почти всюду к некоторому пределу $f(x)$.

С другой стороны, так как

$$\varphi_k \geqslant \varphi_{nk} \text{ при } n \leqslant k,$$

то в пределе, при $k \to \infty$, получим

$$f \geqslant f_n.$$

Итак, функции $f_n(x)$, попав между функциями $\varphi_n(x)$ и их пределом $f(x)$, сами стремятся почти всюду к функции $f(x)$. Последняя, очевидно, принадлежит классу C_1. Далее, так как интегралы функций φ_n, f_n и f связаны такими же неравенствами, что и сами эти функции, и

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx,$$

то

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Рассмотрим теперь возрастающую последовательность функций $\{h_n(x)\}$, принадлежащих классу C_2, или, что сводится к тому же, ряд

$$h_1(x) + \sum k_n(x),$$

где

$$k_n(x) = h_{n+1}(x) - h_n(x),$$

и поставим вопрос о сходимости и интегрируемости ряда $\sum k_n(x)$, составленного из неотрицательных функций, принадлежащих классу C_2. Предположим, что

$$\int_a^b h_n(x)\,dx \leqslant A.$$

Тогда будут выполняться соотношения

$$\sum_1^\infty \int_a^b k_n(x)\,dx \leqslant A + \int_a^b |h_1(x)|\,dx = B, \tag{1}$$

и, следовательно, ряд из интегралов в левой части сходится. Положим $k_n(x) = f_n(x) - g_n(x)$, где f_n и g_n принадлежат классу C_1, неотрицательны и

$$\int_a^b g_n(x)\,dx \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Последнему условию можно удовлетворить, взяв произвольное представление k_n в виде $k_n = f_n - g_n$, выбрав возрастающую последовательность ступенчатых функций $\{\psi_k\}$, сходящуюся почти всюду к g_n, и заменив f_n и g_n соответственно функциями $f_n - \psi_{k_0}$ и $g_n - \psi_{k_0}$, где номер k_0 выбран настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_a^b g_n(x)\,dx - \int_a^b \psi_{k_0}(x)\,dx < \frac{1}{2^n}.$$

Тем самым будет обеспечена сходимость ряда

$$\sum_{1}^{\infty} \int_{a}^{b} g_n(x)\,dx,$$

а в силу (1), и ряда

$$\sum_{1}^{\infty} \int_{a}^{b} f_n(x)\,dx.$$

Таким образом, общий случай сведен к рассмотренному выше частному случаю; остается только применить его к рядам $\sum f_n$ и $\sum g_n$. Мы придем к выводу, что их суммы, так же как f_n и g_n, принадлежат классу C_1.

Итак, доказана

Теорема Б. Леви[1]). *Всякая возрастающая последовательность суммируемых функций* $\{h_n(x)\}$, *интегралы которых равномерно ограничены, сходится почти всюду к некоторой суммируемой функции, и интеграл предела такой последовательности равен пределу интегралов функций* $h_n(x)$.

Иначе можно сформулировать эту теорему в той форме, в какой она была нами доказана, т. е. как теорему о почленном интегрировании ряда с неотрицательными членами. В такой форме она допускает следующее обобщение:

Ряд суммируемых функций

$$\sum_{1}^{\infty} k_n(x),$$

для которого сходится ряд

$$\sum_{1}^{\infty} \int_{a}^{b} |k_n(x)|\,dx,$$

сам сходится почти всюду к некоторой суммируемой функции и интегрировать его можно почленно.

Доказать это можно, рассмотрев, например, отдельно ряды из положительных и отрицательных частей функций $k_n(x)$.

Вот одно из следствий последней теоремы:

Интеграл от $|k(x)|$ *обращается в нуль тогда, когда* $k(x)$ *равна нулю почти всюду.*

Следующее предложение также является очевидным следствием нашей теоремы:

Если последовательность суммируемых функций $\{f_n(x)\}$ *монотонна и сходится почти всюду к некоторой суммируемой функции* $f(x)$, *то*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{a}^{b} f_n(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

[1]) Б. Леви [1].

19. Интегрирование последовательностей, имеющих суммируемую мажоранту (теорема Лебега). Можно попытаться расширить понятие интеграла, воспользовавшись последовательностями или рядами более общего типа по сравнению с теми, которые мы рассматривали. Желая обеспечить предельный переход под знаком интеграла, мы не можем совсем отказаться от каких бы то ни было дополнительных условий и предполагать только сходимость почти всюду, как показывают следующие примеры: $f_n(x)=nx^n$, $g_n(x)=n^2x^n$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$; обе эти последовательности стремятся к нулю всюду, за исключением точки $x=1$, тогда как интегралы функций f_n стремятся к 1, а интегралы g_n неограниченно возрастают. Одно из таких условий, важное для приложений, состоит в том, что $|f_n(x)|\leqslant g(x)$, где „мажоранта" $g(x)$ предполагается суммируемой. При этом условии мы докажем, что $\int\limits_a^b f_n\,dx \to \int\limits_a^b f\,dx$, когда $f_n\to f$ почти всюду; попутно мы покажем, что такой предельный переход не выводит нас за пределы класса C_2.

Заметим сначала, что

$$g_1(x)=\sup(f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots)$$

представляет собой суммируемую функцию. Это верно для функции $\sup(f_1(x), f_2(x))=(f_1(x)-f_2(x))^+ + f_2(x)$, так как она представляется в виде суммы двух суммируемых функций; далее, это утверждение распространяется последовательно на $\sup(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ при любом конечном m, а затем и на $g_1(x)$, так как функции $\sup(f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_m)$ образуют возрастающую последовательность, а их интегралы ограничены сверху интегралом функции g. Точно так же можно установить суммируемость функций

$$g_n(x)=\sup(f_n(x),\ f_{n+1}(x),\ \ldots).$$

Последовательность $\{g_n(x)\}$ убывает и сходится почти всюду к той же функции f, что и последовательность $\{f_n\}$.

Применив подобные же рассуждения к функциям $\inf(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, иначе говоря, к $-\sup(-f_1,\ -f_2,\ \ldots,\ -f_n)$, мы получим возрастающую последовательность суммируемых функций

$$h_n(x)=\inf(f_n(x),\ f_{n+1}(x),\ \ldots),$$

сходящуюся почти всюду к $f(x)$.

Отсюда следует, что $f(x)$ — суммируемая функция и

$$\int\limits_a^b g_n(x)\,dx \to \int\limits_a^b f(x)\,dx,\qquad \int\limits_a^b h_n(x)\,dx \to \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

а так как

$$h_n(x) \leqslant f_n(x) \leqslant g_n(x)$$

и, следовательно,

$$\int_a^b h_n(x)\,dx \leqslant \int_a^b f_n(x)\,dx \leqslant \int_a^b g_n(x)\,dx,$$

то

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx,$$

что и требовалось доказать.

Сформулируем полученный результат:

Теорема Лебега. *Если последовательность функций $\{f_n(x)\}$, суммируемых в интервале (a, b), сходится почти всюду к некоторой функции $f(x)$ и если существует суммируемая функция $g(x)$, такая, что*

$$|f_n(x)| \leqslant g(x)$$

для всех n, то функция $f(x)$ также суммируема и

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Разумеется, Лебег[1]) доказал эту теорему, исходя из своего определения интеграла, которое, как мы увидим ниже, эквивалентно нашему. Теоремы Б. Леви и Лебега по существу эквивалентны; при другом изложении теории первая может быть выведена из второй.

Следует особо отметить один частный случай последней теоремы, когда $g(x)$ постоянна, т. е. когда функции $f_n(x)$ *ограничены в совокупности*. Впрочем, эта „малая" теорема Лебега справедлива лишь для конечного интервала (a, b), так как функция, тождественно равная отличной от нуля постоянной, на бесконечном интервале не суммируема.

Здесь уместно упомянуть о еще более частных случаях теоремы Лебега, установленных ранее и относящихся к классической теории; это — теоремы Арцела[2]) и Осгуда[3]). Из них первая относится к ограниченным последовательностям функций, интегрируемых в смысле Римана, вторая — к последовательностям непрерывных функций. От теоремы Лебега, следствиями которой они являются, они существенно отличаются тем, что интегрируемость или непрерывность предельной функции в них не вытекают из остальных предположеиий и должны постулироваться особо. Теоре-

[1]) Лебег [4] (см. стр. 375).
[2]) Арцела [1] и [3] (см. стр. 723—724).
[3]) Осгуд [1] (см. стр. 183—189).

ма Арцела, опубликованная в 1885 г., осталась незамеченной, так что в 1887 г. ее передоказал независимо Осгуд, и то только для непрерывных функций.

20. Теоремы о суммируемости предельной функции. Приведем здесь еще одно следствие теоремы Лебега, в котором, впрочем, утверждается лишь то, что предельная функция суммируема, и ничего не говорится о возможности предельного перехода под знаком интеграла.

Теорема. *Если последовательность функций* $\{f_n(x)\}$, *суммируемых на интервале* (a, b), *сходится почти всюду к некоторой функции* $f(x)$, *причем*

$$|f(x)| \leqslant g(x),$$

где $g(x)$ — *суммируемая функция, то* $f(x)$ *также суммируема.*

Для доказательства достаточно применить теорему Лебега к последовательности функций

$$\inf [g(x), \sup (f_n(x), -g(x))],$$

сходящейся почти всюду к $f(x)$. Эти функции представляют собой $f_n(x)$, „усеченные" сверху и снизу посредством $g(x)$ и $-g(x)$, т. е. там, где $|f_n(x)| > g(x)$, значения $f_n(x)$ заменены значениями $g(x)$, если $f_n(x) > 0$, и $-g(x)$, если $f_n(x) < 0$. При этом, в силу предположений теоремы, предельная функция $f(x)$ не изменяется.

Из этой теоремы вытекает одно важное следствие, относящееся к сложным функциям:

Пусть $g(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ — *непрерывная функция в пространстве* $(u_1, u_2, \ldots, u_r)$, *а* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x)$ *суммируемы на интервале* (a, b). *Тогда, если существует суммируемая на* (a, b) *функция* $h(x)$, *такая, что*

$$|g(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x))| \leqslant h(x),$$

то функция

$$G(x) = g(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x))$$

суммируема на интервале (a, b).

Выберем для каждой $f_k(x)$ последовательность ступенчатых функций $\{\varphi_{kn}(x)\}$, сходящуюся к $f_k(x)$ почти всюду; существование таких последовательностей следует прямо из определения суммируемой функции. Тогда, в силу непрерывности функции g, почти всюду будет выполняться соотношение

$$G_n(x) = g(\varphi_{1n}(x), \varphi_{2n}(x), \ldots, \varphi_{rn}(x)) \to G(x). \tag{2}$$

В том случае, когда интервал (a, b) конечен, $G_n(x)$ представляют собой ступенчатые функции, следовательно, они суммируемы; а так как, согласно предположению, $|G(x)| \leqslant h(x)$, где $h(x)$ — суммируемая функция, то, применив к последовательности (2) предыдущую теорему, мы придем к выводу, что и предельная функция $G(x)$ суммируема. То же рассуждение можно применить и в случае бесконечного интервала (a, b), если только изменить функции (2), положив $G_n(x)=0$ вне интервала $(-n, n)$.

Следующая теорема, доказанная Фату [1] и называемая обычно „леммой Фату", имеет важные приложения. Так же, как и предыдущие теоремы, она утверждает суммируемость предельной функции; что же касается интеграла этой последней, то для него устанавливается лишь некоторая оценка.

Лемма Фату. *Если функции $f_n(x)$, неотрицательные и суммируемые на интервале (a, b), стремятся почти всюду к некоторой функции $f(x)$ и если последовательность интегралов*

$$\int_a^b f_n(x)\,dx$$

ограничена, то функция $f(x)$ суммируема и

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \liminf \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

По существу, нам придется повторить вторую часть доказательства теоремы Лебега. Функции

$$h_n(x) = \inf(f_n(x),\ f_{n+1}(x),\ \ldots)$$

образуют убывающую последовательность, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду. Так как $h_n \leqslant f_{n+k}$, то

$$\int_a^b h_n(x)\,dx \leqslant \int_a^b f_{n+k}(x)\,dx \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

В пределе при $k \to \infty$ получим

$$\int_a^b h_n(x)\,dx \leqslant \liminf \int_a^b f_{n+k}(x)\,dx = \liminf \int_a^b f_k(x)\,dx.$$

Суммируемость функции $f(x) = \lim h_n(x)$ и соотношения

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \int_a^b h_n(x)\,dx \leqslant \liminf \int_a^b f_k(x)\,dx$$

следуют отсюда в силу теоремы Б. Леви.

Лемма Фату может быть высказана еще в такой эквивалентной форме:

Если функции $f_n(x)$, неотрицательные и суммируемые на интервале (a, b), стремятся почти всюду к некоторой функции

$f(x)$ и если

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \leqslant A,$$

то функция $f(x)$ суммируема и

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant A.$$

21. Неравенства Шварца, Гёльдера и Минковского. Вернемся к теореме о сложных функциях и отметим некоторые простейшие частные случаи, соответствующие специально выбранным функциям $g(u_1, u_2, \ldots, u_r)$. В тех случаях, с которыми мы уже встречались, а именно, когда $g(u_1, u_2) = c_1u_1 + c_2u_2$, $g(u) = |u|$, $g(u) = u^+$, $g(u) = u^-$ и $g(u_1, u_2, \ldots, u_r) = \sup(u_1, u_2, \ldots, u_r)$, не было надобности вводить дополнительные предположения, так как роль мажоранты $h(x)$, о которой говорится в теореме, в этих случаях играли соответственно $C(|f_1| + |f_2|)$, $|f|$ (во втором, третьем и четвертом случаях) и $|f_1| + |f_2| + \ldots + |f_r|$.

Иначе обстоит дело в тех важных для приложений случаях, когда $g(u) = u^2$ и $g(u_1, u_2) = u_1u_2$, т. е. когда речь идет об интегрировании квадрата или произведения. Суммируемость f^2 должна или постулироваться особо, или следовать из существования суммируемой мажоранты $g \geqslant f^2$. Суммируемость произведения может быть обеспечена различными предположениями, из которых особенно важны следующие два.

Первое состоит в том, что один из множителей, например f_1, ограничен: $|f_1| \leqslant C$; тогда, если f_2 суммируема, то суммируемо и произведение f_1f_2, причем

$$\left|\int_a^b f_1(x)\,f_2(x)\,dx\right| \leqslant C\int_a^b |f_2(x)|\,dx.$$

Это неравенство выполняется потому, что $C|f_2|$ служит мажорантой функции $|f_1f_2|$.

Второе предположение состоит в том, что одновременно с f_1 и f_2 суммируемы и их квадраты; при этом $f_1^2 + f_2^2$ служит мажорантой функции $|f_1f_2|$ и эта последняя оказывается суммируемой. В этом предположении, при любом $\lambda > 0$, выполняется неравенство

$$2|f_1f_2| \leqslant \lambda f_1^2 + \frac{1}{\lambda} f_2^2$$

и, следовательно,

$$2\left|\int_a^b f_1(x)\,f_2(x)\,dx\right| \leqslant \lambda\int_a^b f_1^2(x)\,dx + \frac{1}{\lambda}\int_a^b f_2^2(x)\,dx.$$

Отсюда, выбрав λ так, чтобы слагаемые в правой части были равны, с помощью простых подсчетов получим

$$\left(\int_a^b f_1(x) f_2(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f_1^2(x)\,dx \cdot \int_a^b f_2^2(x)\,dx.$$

Это — так называемое *неравенство Шварца*[1]); оно представляет собой обобщение на интегралы известного *неравенства Коши*[2])

$$\left(\sum a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum a_k^2 \cdot \sum b_k^2.$$

Следует заметить, что тогда, когда f_1 или f_2 почти всюду равна нулю (так же, как тогда, когда все a_k или все b_k равны нулю), наш вывод непосредственно неприменим, но при этом выражения в обеих частях неравенства становятся равными нулю. В общем случае наш вывод показывает, что знак равенства имеет место тогда, когда f_1 и f_2 почти всюду отличаются лишь постоянным множителем.

Установим теперь более общее *неравенство Гёльдера*[3]). Рассмотрим функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, которые мы предположим суммируемыми вместе с $|f_1|^p$ и $|f_2|^q$, где

$$p > 1, \quad q > 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

т. е. $q = \frac{p}{p-1}$. Неравенство Гёльдера имеет вид

$$\left|\int_a^b f_1(x) f_2(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int_a^b |f_1(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f_2(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3}$$

причем существование левой части вытекает из существования правой.

Вместо того чтобы провести выкладку по образцу предыдущей, изменим на время наши обозначения, взяв f и g соответственно вместо $|f_1|^p$ и $|f_2|^q$, а также α и $\beta = 1 - \alpha$ вместо $\frac{1}{p}$ и $\frac{1}{q}$. Не нарушая общности, можно считать f_1 и f_2 неотрицательными; тогда $f_1 = f^\alpha$ и $f_2 = g^\beta$. Предположим сначала, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx = 1. \tag{4}$$

Будем исходить из элементариого неравенства

$$t^\alpha \leqslant \alpha t + \beta = \alpha t + 1 - \alpha$$

[1]) До Шварца его установил (для классических интегралов) Буняковский; см. Харди, Литтльвуд и Полиа [1] (стр. 132—133).

[2]) Харди, Литтльвуд и Полиа [1] (стр. 16).

[3]) Гёльдер доказал аналогичное неравенство для рядов; для интегралов его установил Ф. Рисс; см. Харди, Литтльвуд и Полиа [1] (стр. 21—26, 146—150).

(выражающего, между прочим, тот факт, что направленная выпуклостью вверх кривая $y=x^{\alpha}$ расположена под своей касательной в точке $x=1$); взяв $\frac{t}{v}$ вместо t, это неравенство можно записать в виде

$$t^{\alpha}v^{\beta}\leqslant \alpha t+\beta v.$$

Подставив в это неравенство $f(x)$ вместо t и $g(x)$ вместо v и проинтегрировав, получим

$$\int_a^b f^{\alpha}(x)\, g^{\beta}(x)\, dx\leqslant \alpha+\beta=1.$$

Для того чтобы избавиться от предположения (4), нужно сначала „нормировать" функции f и g, т. е. снабдить их множителями, равными обратным величинам их интегралов; применив после этого только что полученное неравенство и умножив обе его части на соответствующие степени интегралов, получим

$$\int_a^b f^{\alpha}(x)\, g^{\beta}(x)\, dx\leqslant\left(\int_a^b f(x)\, dx\right)^{\alpha}\left(\int_a^b g(x)\, dx\right)^{\beta}.$$

Возвратившись к исходным обозначениям, получим требуемое неравенство (3). Наш вывод неприменим тогда, когда хотя бы одна из функций f и g равна нулю почти всюду, но в этом случае почти всюду равно нулю произведение $f^{\alpha}g^{\beta}$ и обе части последнего неравенства обращаются в нуль. Вообще же, как видно из нашего вывода, равенство имеет место тогда, когда почти всюду $f(x)=$ $=\lambda g(x)$; что же касается неравенства (3), то оно приводится к равенству тогда, когда $|f_1|^p$ и $|f_2|^q$ почти всюду отличаются лишь постоянным множителем, а произведение $f_1(x)f_2(x)$ почти всюду сохраняет знак.

В дальнейшем нам понадобится еще *неравенство Минковского* [1]), непосредственно вытекающее из неравенства Гёльдера. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — неотрицательные функции, суммируемые вместе с f_1^p и f_2^p, где $p>1$; согласно неравенству Гёльдера,

$$\int_a^b (f_1+f_2)^p dx=\int_a^b f_1(f_1+f_2)^{p-1}dx+\int_a^b f_2(f_1+f_2)^{p-1}dx\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_a^b f_1^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b (f_1+f_2)^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}}+\left(\int_a^b f_2^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b (f_1+f_2)^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

[1]) Миковский доказал аналогичное неравенство для конечных сумм; на интегралы его обобщил Ф. Рисс; см. Харди, Литтльвуд и Полиа [1] (стр. 30—32, 146—150).

откуда, разделив на второй множитель, входящий в оба слагаемых правой части, получим

$$\left(\int_a^b (f_1+f_2)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b f_1^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b f_2^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тем более для функций произвольного знака будет выполняться неравенство

$$\left(\int_a^b |f_1+f_2|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |f_1|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |f_2|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Для полноты вывода надо еще заметить, что существование интеграла функции $(f_1+f_2)^p$, которым мы здесь пользовались, следует из теоремы о сложных функциях (см. п. 20) и из соотношения

$$(f_1+f_2)^p \leqslant 2^p \sup(f_1^p, f_2^p).$$

Вопрос о том, когда в неравенстве Минковского имеет место равенство, решается без труда; предоставляем это читателю.

Заметим, наконец, что выведенные здесь неравенства нам придется в дальнейшем применять к функциям, принимающим *комплексные* значения; такое обобщение этих неравенств очевидно. Другое обобщение, которое нам понадобится, относится к *бесконечному интервалу интегрирования*. Предположим, например, что функция $f(x)$ определена в интервале $(-\infty, \infty)$ и требуется рассмотреть интеграл от $|f|^2$. Этот последний, даже в случае $f(x) \geqslant 0$, может существовать без того, чтобы существовал интеграл от $f(x)$, и вместо того, чтобы предполагать и f и f^2 суммируемыми, можно потребовать, чтобы f^2 была суммируема, а f — лишь „измерима"; смысл последнего требования будет сейчас выяснен.

22. Измеримые множества и измеримые функции. Интеграл был определен нами для некоторого класса функций на интервале (a, b), названных *суммируемыми функциями*. Эти функции представляют собой пределы почти всюду сходящихся последовательностей ступенчатых функций. Однако существуют, очевидно, последовательности ступенчатых функций, сходящиеся почти всюду, пределы которых не суммируемы. Условимся называть *измеримой* всякую функцию, *являющуюся пределом сходящейся почти всюду последовательности ступенчатых функций.*

Все суммируемые функции, таким образом, измеримы; функция $f(x)=c$ измерима даже тогда, когда интервал (a, b) бесконечен. В силу первой теоремы п. 20, любая измеримая функция, абсолютная величина которой имеет суммируемую мажоранту, сама суммируема. Вообще, если функция $f(x)$ измерима, а $g(x)$ и $h(x)$ $[g(x) < h(x)]$ суммируемы, то функция, равная $f(x)$ в тех точках, где $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, и равная $g(x)$ или $h(x)$ там, где соответственно $f(x) \leqslant g(x)$ или $f(x) \geqslant h(x)$, оказывается суммируемой. В частности, если интервал (a, b) конечен и функции $g(x) = c$ и $h(x) = d$ постоянны, то измеримая функция, усеченная на уровнях c и d, дает суммируемую функцию.

Непосредственно из определения следует, что *абсолютная величина измеримой функции измерима; одновременно с* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *измеримы также* $f_1(x)+f_2(x)$, $f_1(x)-f_2(x)$, $f_1(x)f_2(x)$, $\sup\{f_1(x), f_2(x)\}$ *и* $\inf\{f_1(x), f_2(x)\}$. *Обратная величина* измеримой функции $f(x)$ измерима при условии, что $f(x) \neq 0$ почти всюду. В самом деле, если $f(x)$ является пределом почти всюду последовательности ступенчатых функций $\varphi_n(x)$, то к $1/f(x)$ почти всюду сходится последовательность ступенчатых функций $\psi_n(x)$, определенных следующим образом: $\psi_n(x) = 0$ там, где $\varphi_n(x) = 0$, $\psi_n(x) = 1/\varphi_n(x)$ там, где $\varphi_n(x) \neq 0$.

Помимо указанных операций, предельный переход также не выводит за пределы класса измеримых функций: *предел последовательности измеримых функций, сходящейся почти всюду, представляет собой измеримую функцию.* Для доказательства возьмем какую-нибудь всюду положительную суммируемую функцию $h(x)$. В случае конечного интервала (a, b) можно выбрать $h(x) = 1$; на бесконечном интервале $h(x)$ можно, например, положить равной 1 на интервале $-1 < x \leqslant 0$ и равной $\frac{1}{n^2}$ при $n-1 < x \leqslant n$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Если теперь измеримые функции $f_n(x)$ стремятся почти всюду к $f(x)$, то

$$g_n(x) = \frac{h(x) f_n(x)}{h(x) + |f_n(x)|} \to \frac{h(x) f(x)}{h(x) + |f(x)|} = g(x),$$

причем все $g_n(x)$ измеримы и $|g_n(x)| < h(x)$, $|g(x)| < h(x)$. Следовательно, функции $g_n(x)$ суммируемы и, согласно теореме Лебега, суммируем и их предел $g(x)$. В силу соотношения

$$f(x) = \frac{h(x) g(x)}{h(x) - |g(x)|},$$

функция $f(x)$ измерима, что и требовалось доказать.

Теперь, когда определены измеримые функции, *измеримые множества* мы определим как такие множества, *характеристические функции которых измеримы*; при этом характеристической функцией множества e называется функция $e(x)$, равная 1 на множестве e и равная 0 вне e. *Мера* $m(e)$ измеримого множества e определяется как *интеграл характеристической функции* $e(x)$ в том случае, когда эта последняя суммируема; если же нет, то мере $m(e)$ приписывается значение ∞.

Очевидно, что всякий интервал, конечный или бесконечный, представляет собой измеримое множество и его мера равна его длине. Ясно также, что интеграл, который определяет меру $m(e)$, может быть взят по любому интервалу, содержащему множество e.

Мера множества меры нуль приобретает, согласно нашему определению, значение 0. Обратно, измеримое множество e, для которого $m(e)=0$, есть множество меры нуль; это вытекает из следствия теоремы Б. Леви (п. 18).

Разность $e_1 \setminus e_2$ двух измеримых множеств e_1, e_2 ($e_2 \subset e_1$), а также пересечение $\bigcap e_k$ и объединение $\bigcup e_k$ конечного или счетного набора измеримых множеств представляют собой измеримые множества. Это следует из того, что перечисленные выше операции не выводят за пределы класса измеримых функций, а характеристическими функциями множеств

$$\text{а) } e_1 \setminus e_2, \quad \text{б) } \bigcap_{k=1}^{n} e_k, \quad \text{в) } \bigcap_{k=1}^{\infty} e_k, \quad \text{г) } \bigcup_{k=1}^{n} e_k, \quad \text{д) } \bigcup_{k=1}^{\infty} e_k$$

являются соответственно

$$\text{а) } e_1(x) - e_2(x), \quad \text{б) } \prod_{k=1}^{n} e_k(x) = \inf_{1 \leqslant k \leqslant n} \{e_k(x)\},$$

$$\text{в) } \prod_{k=1}^{\infty} e_k(x) = \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} e_k(x), \quad \text{г) } 1 - \prod_{k=1}^{n} [1 - e_k(x)] = \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \{e_k(x)\},$$

$$\text{д) } \lim_{n \to \infty} \left[\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \{e_k(x)\} \right].$$

Мера $m(e)$ представляет собой „счетно-аддитивную“ функцию множества e; это означает, что если $e_1, e_2, \ldots$ — конечная или счетная система попарно непересекающихся измеримых множеств, то

$$m(e_1 \cup e_2 \cup \ldots) = m(e_1) + m(e_2) + \ldots .$$

В самом деле, характеристической функцией множества $e = \bigcup e_k$ служит $e(x) = \sum e_k(x)$, и так как $e(x)$ является мажорантой как любой функции $e_k(x)$, так и любой частичной суммы $\sum_{1}^{n} e_k(x)$, то, согласно теоремам Лебега и Б. Леви (см. пп. 18, 19), $e(x)$ оказывается суммируемой тогда и только тогда, когда суммируемы все $e_k(x)$ и ряд из интегралов функций $e_k(x)$ сходится; при этом условии ряд $\sum e_k(x)$ можно интегрировать почленно.

Доказанное предложение, очевидно, эквивалентно следующему: *если $e_1, e_2, \ldots$ — возрастающая последовательность измеримых множеств, то*

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} e_k\right) = \lim_{k \to \infty} m(e_k).$$

Точно так же, *если $e_1, e_2, \ldots$ — убывающая последовательность измеримых множеств конечной меры, то*

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} e_k\right) = \lim_{k \to \infty} m(e_k).$$

Последнее предложение следует из теоремы Лебега, если ее применить к характеристическим функциям $e_k(x)$ множеств e_k, которые, убывая, стремятся к характеристической функции пересечения.

Между измеримыми множествами и измеримыми функциями существует связь, играющая основную роль в теории Лебега. Она состоит в том, что если функция $f(x)$ измерима, то, каково бы ни было число c, множества точек, в которых

$$f(x) \leqslant c, \quad f(x) < c, \quad f(x) \geqslant c, \quad f(x) > c,$$

измеримы; обратно, если для некоторой функции $f(x)$ все множества одного из указанных четырех видов измеримы, то функция $f(x)$ измерима. Для наших целей достаточно доказать лишь первую часть этого предложения. Рассмотрим отношение

$$\frac{f(x;\ c+h,\ \infty) - f(x;\ c,\ \infty)}{h},$$

где $f(x;\ c,\ \infty)$ означает функцию $f(x)$, усеченную снизу числом c. Так как числитель, будучи разностью двух измеримых функций, измерим, то измеримы будут и сама дробь и ее предел при $0 < h \to 0$. Но этот предел, очевидно, равен нулю на множестве, где $f(x) > c$, и равен 1 в остальных точках. Таким образом, он совпадает с характеристической функцией множества, на котором $f(x) \leqslant c$, и это последнее оказывается измеримым. Измеримость множеств остальных трех видов получим, взяв отрицательные h, затем взяв $-f$ и $-c$ вместо f и c и, наконец, произведя ту и другую замену одновременно.

§ 2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

23. Полное изменение и производная неопределенного интеграла. Пусть $f(x)$ — суммируемая функция; ее неопределенный интеграл (который, как обычно, задается с точностью до постоянного слагаемого)

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

представляет собой функцию с ограниченным изменением. Это очевидно, если $f(x)$ неотрицательна, так как при этом $F(x)$ ока-