Точно так же, *если* $e_1, e_2, \ldots$ — *убывающая последовательность измеримых множеств конечной меры, то*

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} e_k\right)=\lim_{k\to\infty} m(e_k).$$

Последнее предложение следует из теоремы Лебега, если ее применить к характеристическим функциям $e_k(x)$ множеств e_k, которые, убывая, стремятся к характеристической функции пересечения.

Между измеримыми множествами и измеримыми функциями существует связь, играющая основную роль в теории Лебега. Она состоит в том, что если функция $f(x)$ измерима, то, каково бы ни было число c, множества точек, в которых

$$f(x)\leqslant c, \quad f(x)<c, \quad f(x)\geqslant c, \quad f(x)>c,$$

измеримы; обратно, если для некоторой функции $f(x)$ все множества одного из указанных четырех видов измеримы, то функция $f(x)$ измерима. Для наших целей достаточно доказать лишь первую часть этого предложения. Рассмотрим отношение

$$\frac{f(x;\ c+h,\ \infty)-f(x;\ c,\ \infty)}{h},$$

где $f(x;\ c,\ \infty)$ означает функцию $f(x)$, усеченную снизу числом c. Так как числитель, будучи разностью двух измеримых функций, измерим, то измеримы будут и сама дробь и ее предел при $0<h\to 0$. Но этот предел, очевидно, равен нулю на множестве, где $f(x)>c$, и равен 1 в остальных точках. Таким образом, он совпадает с характеристической функцией множества, на котором $f(x)\leqslant c$, и это последнее оказывается измеримым. Измеримость множеств остальных трех видов получим, взяв отрицательные h, затем взяв $-f$ и $-c$ вместо f и c и, наконец, произведя ту и другую замену одновременно.

§ 2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

23. Полное изменение и производная неопределенного интеграла. Пусть $f(x)$ — суммируемая функция; ее неопределенный интеграл (который, как обычно, задается с точностью до постоянного слагаемого)

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

представляет собой функцию с ограниченным изменением. Это очевидно, если $f(x)$ неотрицательна, так как при этом $F(x)$ оказывается неубывающей. В общем случае для доказательства надо разложить $f(x)$ на положительную и отрицательную части.

Каково полное изменение T функции $F(x)$ на интервале (a, b)?

Возьмем какое-нибудь разбиение интервала (a, b) и рассмотрим ступенчатую функцию $\varepsilon(x)$, принимающую постоянные значения ε_k ($|\varepsilon_k| \leqslant 1$) в частичных интервалах (x_{k-1}, x_k); тогда будем иметь

$$\int_a^b \varepsilon(x) f(x)\, dx = \sum_k \varepsilon_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx = \sum_k \varepsilon_k [F(x_k) - F(x_{k-1})].$$

Последняя сумма не превосходит $\sum_k |F(x_k) - F(x_{k-1})|$ и, следовательно, не превосходит T, но может отличаться от T сколь угодно мало, если максимум длин интервалов (x_{k-1}, x_k) сделать достаточно малым и положить ε_k равными 1, 0 или -1 соответственно при $F(x_k) - F(x_{k-1}) > 0$, $=0$ и < 0. Итак,

$$T = \sup_{|\varepsilon(x)| \leqslant 1} \int_a^b \varepsilon(x) f(x)\, dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Покажем теперь, что в действительности здесь имеет место равенство. В самом деле, пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — последовательность ступенчатых функций, сходящаяся почти всюду к $f(x)$. Положим $\varepsilon_n(x)$ равной функции $n\varphi_n(x)$, усеченной сверху числом 1 и снизу числом -1. При $n \to \infty$ получим $\lim \varepsilon_n(x) = 1$ почти всюду, где $f(x) > 0$, и $\lim \varepsilon_n(x) = -1$ почти всюду, где $f(x) < 0$, т. е. почти всюду

$$\lim \varepsilon_n(x) f(x) = |f(x)|.$$

Так как, с другой стороны,

$$|\varepsilon_n(x) f(x)| \leqslant |f(x)|,$$

то

$$\lim \int_a^b \varepsilon_n(x) f(x)\, dx = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Таким образом, доказана

Теорема. *Неопределенный интеграл $F(x)$ суммируемой функции $f(x)$ представляет собой функцию с ограниченным изменением; при этом ее полное изменение на интервале (a, b) равно*

$$T = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Будучи функцией с ограниченным изменением, $F(x)$ имеет почти всюду производную $F'(x)$. Естественно поставить вопрос, выполняется ли в общем случае соотношение $F'(x) = f(x)$, имеющее место тогда, когда $f(x)$ непрерывна.

Очевидно, достаточно рассмотреть тот случай, когда $f(x)$ принадлежит классу C_1, т. е. представляет собой предел возрастающей последовательности ступенчатых функций $\{\varphi_n(x)\}$. Для неопределенных интегралов $\Phi_n(x)$ функций $\varphi_n(x)$ ответ на поставленный вопрос очевиден; теперь заметим, что $F(x)$ выражается в виде ряда

$$\Phi_1(x)+\sum_1^\infty[\Phi_{k+1}(x)-\Phi_k(x)],$$

и применим теорему Фубини о почленном дифференцировании. Резюмируем полученный результат:

Теорема. *Любая суммируемая функция совпадает почти всюду с производной своего неопределенного интеграла.*

24. Пример монотонной непрерывной функции, производная которой почти всюду равна нулю. Зададим себе следующий вопрос: в какой мере обратимо только что доказанное предложение? Всякая ли функция является неопределенным интегралом своей производной? Или, если ограничиться более поверхностным фактом, определяется ли она своей производной однозначно с точностью до постоянного слагаемого? Разумеется, в отличие от классической постановки вопроса мы предполагаем здесь только, что производная $F'(x)$ существует почти всюду.

Рассмотрим сначала второй вопрос. Мы покажем, что при такой общей постановке на него следует ответить отрицательно; для этого мы построим на интервале $[0, 1]$ *монотонную непрерывную функцию, не постоянную ни в каком интервале и имеющую производную, которая почти всюду равна нулю.*

Выбрав $0<t<1$, зададим по индукции последовательность функций $\{F_n(x)\}$ следующим образом: положим $F_0(x)=x$; пусть $F_n(x)$ определена, непрерывна и линейна на каждом интервале вида (α, β), где $\alpha=k2^{-n}$, $\beta=(k+1)2^{-n}$; тогда $F_{n+1}(x)$ мы зададим так, чтобы $F_{n+1}(x)$ равнялась $F_n(x)$ для $x=\alpha$ и $x=\beta$; в средних точках указанных интервалов, т. е. при $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, положим

$$F_{n+1}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{1-t}{2}F_n(\alpha)+\frac{1+t}{2}F_n(\beta),$$

а в интервалах $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ и $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ будем считать $F_{n+1}(x)$ линейной. Определенные таким образом функции $F_n(x)$, очевидно, возрастают. Далее,

$$0\leqslant F_n(x)\leqslant F_{n+1}(x)\leqslant 1,$$

поэтому последовательность $\{F_n(x)\}$ сходится к некоторой неубывающей функции $F(x)$. Докажем, что $F(x)$ *строго возрастает,* *непрерывна и*

$$F'(x)=0$$

почти всюду.

Пусть x — какая-нибудь точка интервала $[0, 1]$. Возьмем последовательность вложенных интервалов вида (α_n, β_n), где

$$\alpha_n = k2^{-n}, \quad \beta_n = (k+1)2^{-n},$$

окружающих точку x. Мы имеем, очевидно,

$$F_{n+1}(\beta_{n+1}) - F_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \frac{1 \pm t}{2}[F_n(\beta_n) - F_n(\alpha_n)].$$

Так как $F_p(\alpha_p) = F(\alpha_p)$ и $F_p(\beta_p) = F(\beta_p)$, то

$$F(\beta_{n+1}) - F(\alpha_{n+1}) = \frac{1 \pm t}{2}[F(\beta_n) - F(\alpha_n)],$$

откуда получаем

$$F(\beta_n) - F(\alpha_n) = \prod_1^n \frac{1+\varepsilon_k t}{2} \qquad (\varepsilon_k = \pm 1).$$

Отсюда следует, что

$$F(\beta_n) - F(\alpha_n) > 0$$

и

$$F(\beta_n) - F(\alpha_n) \leqslant \left(\frac{1+t}{2}\right)^n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty;$$

таким образом, $F(x)$ — функция непрерывная и строго возрастающая. Далее, производная $F'(x)$ там, где она существует, равна пределу выражения

$$\frac{F(\beta_n) - F(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = \prod_1^n (1 + \varepsilon_k t)$$

при $n \to \infty$; но такой предел либо не определен, либо бесконечен, либо, наконец, равен 0. Следовательно, $F'(x) = 0$ во всех точках, где $F'(x)$ существует, т. е. *почти всюду.*

25. Абсолютно непрерывные функции. Каноническое разложение монотонной функции. Только что построенный пример убеждает нас в том, что функция с ограниченным изменением, даже если она непрерывна, может не быть неопределенным интегралом. Таким образом, класс непрерывных функций с ограниченным изменением шире класса неопределенных интегралов. Какими же характерными признаками выделяются эти последние среди непрерывных функций с ограниченным изменением? Очевидно, что при исследовании этого вопроса достаточно рассмотреть случай конечного интервала интегрирования (a, b).

Мы покажем, что *функция $F(x)$ является неопределенным интегралом тогда и только тогда, когда она абсолютно непрерывна.* Последнее означает, что не только $F(\beta) - F(\alpha)$ становится бесконечно малым одновременно с $\beta-\alpha$, но и любая сумма вида

$$\sum [F(\beta_k)-F(\alpha_k)]$$

становится бесконечно малой одновременно с суммой длин

$$\sum (\beta_k-\alpha_k)$$

конечной или счетной системы непересекающихся интервалов (α_k, β_k). При этом достаточно рассматривать конечные системы интервалов. Заметим, что, в частности, любая функция, удовлетворяющая условию Липшица

$$|F(\beta)-F(\alpha)| \leqslant C(\beta-\alpha),$$

абсолютно непрерывна.

Для того чтобы доказать необходимость высказанного условия, возьмем какую-нибудь суммируемую функцию $f(x)$, $a<x<b$, и рассмотрим ее неопределенный интеграл $F(x)$. Если $f(x)$ ограничена, т. е. $|f(x)| \leqslant C$, то функция $F(x)$, очевидно, удовлетворяет условию Липшица с той же постоянной C. Если же $f(x)$ неограничена, то, каково бы ни было $\varepsilon>0$, функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы ограниченной суммируемой функции $g(x)$ и некоторой функции $h(x)$, такой, что

$$\int_a^b |h(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2};$$

в самом деле, если положить $f_n(x)$ равной $f(x)$ там, где $|f(x)| \leqslant n$, и равной n и $-n$ в тех точках, где соответственно $f(x)>n$ и $f(x)<-n$, то соотношение

$$f(x)=f_n(x)+[f(x)-f_n(x)]$$

при достаточно больших n будет представлять собой требуемое разложение. При этом если $|g(x)| \leqslant C$, то для любой системы непересекающихся интервалов (α_k, β_k) с суммой длин, меньшей $\frac{\varepsilon}{2C}$, будем иметь

$$\left|\sum \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x)\,dx\right| \leqslant \sum \int_{\alpha_k}^{\beta_k} |g(x)|\,dx+\sum \int_{\alpha_k}^{\beta_k} |h(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum C(\beta_k-\alpha_k)+\sum \int_{\alpha_k}^{\beta_k} |h(x)|\,dx \leqslant C\frac{\varepsilon}{2C}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

следовательно, $F(x)$ абсолютно непрерывна.

Обратно, предположим, что $F(x)$ абсолютно непрерывна. Сначала покажем, что условие абсолютной непрерывности можно сформулировать следующим образом: для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для любой системы непересекающихся интервалов

(α_k, β_k), для которой

$$\sum (\beta_k - \alpha_k) < \delta,$$

выполняется неравенство

$$\sum | F(\beta_k) - F(\alpha_k) | < \varepsilon.$$

Достаточность этого условия для абсолютной непрерывности функции $F(x)$ очевидна. Если же допустить, что это условие не выполняется, т. е. если для некоторого $\varepsilon > 0$ существует последовательность систем интервалов, такая, что

$$\sum (\beta_k - \alpha_k) \to 0 \quad \text{и} \quad \sum | F(\beta_k) - F(\alpha_k) | \geqslant \varepsilon,$$

то, разделив каждую из этих систем на две подсистемы, отвечающие положительным и отрицательным разностям $F(\beta_k) - F(\alpha_k)$, и выбрав из них ту, для которой соответствующая сумма больше или равна $\frac{\varepsilon}{2}$, получим новую последовательность систем интервалов, для которой

$$\sum (\beta_k - \alpha_k) \to 0 \quad \text{и} \quad \left| \sum [F(\beta_k) - F(\alpha_k)] \right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

и, таким образом, нарушается свойство абсолютной непрерывности.

Мы докажем, что абсолютно непрерывная функция имеет ограниченное изменение. В самом деле, выберем какое-нибудь $\varepsilon > 0$ и соответствующее ему, согласно свойству абсолютной непрерывности, $\delta > 0$, разобьем интервал (a, b) на произвольные частичные интервалы длины, меньшей $\frac{\delta}{2}$, и рассмотрим выражение

$$\Sigma = \sum | F(x_k) - F(x_{k-1}) |. \tag{5}$$

Слагаемые этой суммы можно разбить на m групп, где

$$m \leqslant \frac{2(b-a)}{\delta} + 1,$$

для каждой из которых сумма длин входящих в нее интервалов (x_{k-1}, x_k) меньше δ, и, следовательно, слагаемые в (5), соответствующие такой группе интервалов, меньше ε. Таким образом, для всех разбиений рассматриваемого вида

$$\Sigma < \varepsilon \left(\frac{2(b-a)}{\delta} + 1 \right).$$

Отсюда следует, что $F(x)$—функция с ограниченным изменением.

Из второй формулировки свойства абсолютной непрерывности следует далее, что и неопределенное полное изменение $T(x)$ функции $F(x)$ имеет ограниченное изменение; это справедливо также для положительного и отрицательного изменений. Поэтому, не нарушая общности, можно предположить, что функция $F(x)$ неубывающая.

Отношение

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

неотрицательно и стремится к $F'(x)$ для всех x, за исключением, может быть, некоторого множества меры нуль. С другой стороны, интеграл этого отношения (как функции от x) на интервале (α, β) равен

$$\frac{1}{h}\int\limits_{\beta}^{\beta+h} F(x)\,dx-\frac{1}{h}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+h} F(x)\,dx,$$

и так как $F(x)$ непрерывна, то это выражение при $h \to 0$ стремится к $F(\beta)-F(\alpha)$. Отсюда, в силу леммы Фату, следует, что $F'(x)$ суммируема и

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} F'(x)\,dx \leqslant F(\beta)-F(\alpha).$$

Неопределенный интеграл функции $F'(x)$ мы обозначим $G(x)$ и рассмотрим разность $F(x)-G(x)$; в силу последнего неравенства, она не убывает. Далее, так как и $F(x)$ и $G(x)$ абсолютно непрерывны, первая по предположению, вторая как неопределенный интеграл, то и разность $F(x)-G(x)$ абсолютно непрерывна.

Итак, мы свели нашу задачу к следующей: *дана неубывающая абсолютно непрерывная функция $F(x)$, причем $F'(x)=0$ почти всюду; требуется доказать, что $F(x)$ тождественно равна постоянной.* В сущности, это было уже нами доказано в п. 13, хотя и при более жестком условии; вместо абсолютной непрерывности там предполагалось выполненным условие Липшица. Последнее было нужно для того, чтобы показать, что образ $F(E)$ множества E меры нуль при преобразовании $y=F(x)$ также имеет меру нуль. Но это верно и при условии, что $F(x)$ абсолютно непрерывна. В самом деле, пусть δ — число, соответствующее, по свойству абсолютной непрерывности, произвольно выбранному $\varepsilon>0$; покроем E системой непересекающихся интервалов с суммой длин $<\delta$; при этом образы таких интервалов покроют $F(E)$ и будут иметь сумму длин $<\varepsilon$. Итак, доказательство, приведенное в п. 13, распространяется на рассматриваемый здесь случай, и мы получаем следующий результат, сформулированный в начале этого пункта:

Теорема[1]). *Для того чтобы функция $F(x)$ представляла собой неопределенный интеграл, необходимо и достаточно, чтобы она была абсолютно непрерывна.*

Укажем одно разложение монотонных функций, а также функций с ограниченным изменением, непосредственно опирающееся на

[1]) Лебег [2].

проведенные здесь рассуждения. Пусть $F(x)$ — неубывающая непрерывная функция. Как мы только что показали, сославшись на лемму Фату, ее производная $F'(x)$ суммируема, и если положить

$$G(x) = \int_a^x F'(t)\,dt,$$

то функция $H(x) = F(x) - G(x)$ окажется неубывающей; $G(x)$ также не убывает, так как $F'(x) \geqslant 0$. Таким образом, доказана

Теорема. *Всякая монотонная непрерывная функция $F(x)$ может быть представлена как сумма двух монотонных непрерывных функций $G(x)$ и $H(x)$, где $G(x)$ абсолютно непрерывна, а $H(x)$ — так называемая „сингулярная составляющая“ функции $F(x)$ — такова, что $H'(x) = 0$ почти всюду.*

Если не предполагать, что $F(x)$ непрерывна, то появится еще третье слагаемое — функция скачков. Все сказанное непосредственно распространяется на произвольные функции с ограниченным изменением.

Вернемся еще раз к определению абсолютной непрерывности с тем, чтобы указать связь этого понятия с понятием *множества изменения нуль* относительно некоторой функции с ограниченным изменением.

Условимся называть полным изменением непрерывной функции с ограниченным изменением $F(x)$ на произвольной системе неперекрывающихся интервалов сумму полных изменений $F(x)$ на всех интервалах рассматриваемой системы. Множество e назовем множеством изменения нуль относительно $F(x)$, если e можно покрыть системой интервалов, на которой полное изменение функции $F(x)$ сколь угодно мало. В том случае, когда $F(x)$ монотонна, это условие, очевидно, эквивалентно тому, что образ множества e при отображении $y = F(x)$ имеет на оси y меру нуль. Можно показать, что это справедливо и в общем случае, но мы не будем на этом останавливаться. Мы не будем также определять понятие полного изменения функции на более общих множествах; отметим только, что в этих вопросах полезна интересная теорема Банаха [1], утверждающая, что полное изменение функции $F(x)$ равно

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(t)\,dt,$$

где $N(t)$ есть число (конечное или бесконечное) решений x уравнения $t = F(x)$.

Заметим еще, что *в определении абсолютной непрерывности требование, чтобы полное изменение функции было мало на системах интервалов с достаточно малой суммой длин, эквивалентно тому, чтобы полное изменение было равно нулю на множествах меры нуль.*

Ясно, что, коль скоро выполнено первое требование, выполняется и второе; остается доказать обратное. Очевидно также, что достаточно рассмотреть случай неубывающей функции $F(x)$. Допустим, что первое требование не выполняется; тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ существуют системы интервалов

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, \ldots$$

с суммами длин, соответственно меньшими

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots,$$

образы которых состоят из интервалов с суммой длин $\geqslant \varepsilon$. Положим

$$\Sigma^{(n)} = \Sigma_n \cup \Sigma_{n+1} \cup \ldots;$$

тогда сумма длин интервалов, образующих $\Sigma^{(n)}$, будет меньше

$$2^{-n} + 2^{-n-1} + \ldots = 2^{-n+1}.$$

Следовательно, пересечение убывающей последовательности множеств $\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(2)}, \ldots$ имеет меру нуль. Применив теперь это построение к образам множеств Σ_n и $\Sigma^{(n)}$, мы обнаружим, что соответствующее пересечение имеет положительную меру, что противоречит второму требованию.

26. Интегрирование по частям и интегрирование с помощью подстановки. Эти классические правила интегрирования распространяются, лишь с некоторыми предосторожностями в формулировках, на интегралы Лебега. Рассмотрим сначала интегрование по частям.

Теорема. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — суммируемые функции на интервале (a, b), а $F(x)$ и $G(x)$ — их неопределенные интегралы. Тогда произведения $F(x)g(x)$ и $G(x)f(x)$ также суммируемы и*

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx + \int_a^b G(x)f(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a). \tag{6}$$

Теорема очевидна в том случае, когда $f(x)$ и $g(x)$ постоянны, а отсюда она непосредственно распространяется на случай ступенчатых $f(x)$ и $g(x)$. Теперь допустим, что f и g положительны и принадлежат классу C_1. Когда равенство (6) будет доказано для таких функций, в общем случае достаточно будет представить f и g в виде $f = f_1 - f_2$ и $g = g_1 - g_2$, где f_1, f_2, g_1, g_2 принадлежат классу C_1, причем, прибавив к ним соответствующие постоянные, мы можем сделать все эти функции положительными. Применив формулу (6) последовательно к четырем парам функций f_i, g_j и объединив полученные результаты, мы получим формулу (6) для функций f и g.

Итак, пусть f, g положительны и принадлежат классу C_1; тогда существуют возрастающие последовательности $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ положительных ступенчатых функций, сходящиеся почти всюду соответственно к f и g; подобные же последовательности $\{\Phi_n\}$ и $\{\Psi_n\}$ существуют и для неопределенных интегралов $F(x)$ и $G(x)$. При дополнительном предположении, что

$$F(a)=G(a)=\Phi_n(a)=\Psi_n(a)=0,$$

запишем формулу (6) для φ_n, ψ_n, Φ_n и Ψ_n вместо f, g, F и G и положим $n\longrightarrow\infty$; требуемый результат получится предельным переходом под знаком интеграла, законным потому, что последовательности $\{\Phi_n\psi_n\}$ и $\{\varphi_n\Psi_n\}$ — возрастающие. Предположение, что $F(a)=G(a)=0$, не нарушает общности вывода, так как вместо $F(x)$ всегда можно взять $F(x)+C$; при этом в формуле (6) справа и слева появится слагаемое $C[G(b)-G(a)]$.

Можно также доказать формулу (6) классическим приемом, основанным на правиле дифференцирования произведения. Одновременно с равенствами $F'(x)=f(x)$ и $G'(x)=g(x)$ почти всюду выполняется равенство

$$[F(x)\,G(x)]'=F(x)\,g(x)+f(x)\,G(x).$$

Согласно п. 25, $F(x)$ и $G(x)$ абсолютно непрерывны; в силу соотношений

$$|F(\beta)\,G(\beta)-F(\alpha)\,G(\alpha)|=|[F(\beta)-F(\alpha)]\,G(\beta)+F(\alpha)\,[G(\beta)-G(\alpha)]|\leqslant$$
$$\leqslant M(|F(\beta)-F(\alpha)|+|G(\beta)-G(\alpha)|),$$

где M — общая верхняя граница $|F(x)|$ и $|G(x)|$ на интервале $(a,\ b)$, и произведение $F(x)\,G(x)$ оказывается абсолютно непрерывным. Поэтому функция $F(x)\,G(x)$ служит неопределенным интегралом своей производной, откуда и вытекает формула (6).

Перейдем теперь к интегрированию с помощью подстановки.

Теорема. *Если $x(t)$ — неубывающая абсолютно непрерывная функция на интервале $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, а $f(x)$ — суммируемая функция на интервале $x(\alpha)=a\leqslant x\leqslant b=x(\beta)$, то функция $f(x(t))\,x'(t)$ суммируема на $(\alpha,\ \beta)$ и*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(x(t))\,x'(t)\,dt. \tag{6a}$$

Для ступенчатых функций $f(x)$ это утверждение проверяется непосредственно.

Если $f(x)$ принадлежит классу C_1, то существует неубывающая последовательность ступенчатых функций $\{\varphi_n(x)\}$, стремящаяся к $f(x)$ всюду, за исключением, может быть, некоторого множества E меры нуль. Так как $x'(t)\geqslant 0$, то функции

$$\varphi_n(x(t))\,x'(t) \tag{6б}$$

также образуют неубывающую последовательность (если пренебречь множеством меры нуль, на котором $x'(t)$ не существует). Эта последовательность стремится к

$$f(x(t))\,x'(t) \tag{6в}$$

всюду, где $x'(t)=0$, а также для всех значений t, для которых $x(t)$ не попадает в множество E. Итак, нам остается рассмотреть множество e тех значений t, для которых $x(t)$ принадлежит множеству E, а $x'(t)$ существует и положительна; покажем, что это множество e имеет меру нуль.

Для этого покроем множество E меры нуль последовательностью интервалов $i_1, i_2, \ldots$ с конечной суммой длин таким образом, чтобы каждая точка множества E попала внутрь бесконечного набора этих интервалов (см. п. 2). Пусть $\psi_n(x)$ — сумма характеристических функций интервалов $i_1, i_2, \ldots, i_n$; эти $\psi_n(x)$ образуют последовательность ступенчатых функций, стремящуюся к ∞ на множестве e. Тогда произведения $\psi_n(x(t))\,x'(t)$ также образуют неубывающую последовательность, стремящуюся к ∞ на множестве e. Последовательность интегралов

$$\int_\alpha^\beta \psi_n(x(t))\,x'(t)\,dt=\int_a^b \psi_n(x)\,dx$$

ограничена, так как сумма длин интервалов i_n конечна, поэтому e представляет собой множество меры нуль.

Итак, функции (6б) стремятся к функции (6в) для всех значений t, кроме, может быть, некоторого множества меры нуль. Так как при этом

$$\int_\alpha^\beta \varphi_n(x(t))\,x'(t)\,dt=\int_a^b \varphi_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx,$$

то, в силу теоремы Б. Леви, предельная функция суммируема и для нее справедлива формула (6а).

Образуя разности, мы распространим этот результат на функции класса C_2.

27. Интеграл как функция множества. Рассмотрим теперь интеграл, взятый по произвольному измеримому множеству e, как функцию этого множества. Интеграл по множеству e является непосредственным обобщением понятия меры; он определяется как интеграл на интервале, содержащем множество e, от функции, равной $f(x)$ в точках множества e и равной 0 вне e, или, иначе говоря, как интеграл по любому интервалу, охватывающему множество e, от функции $f(x)\,e(x)$; значение его называется интегралом функции $f(x)$ по множеству e и обозначается

$$F(e)=\int_e f(x)\,dx.$$

Существование такого интеграла обеспечивается тем, что в произведении $f(x)e(x)$ один множитель суммируем, тогда как другой измерим и ограничен. Вообще говоря, произведение $f(x)e(x)$ может быть измеримо без того, чтобы функция $f(x)$ была измерима на всем ее протяжении или чтобы было измеримо множество e; что касается этого последнего, то достаточно, чтобы была измерима та его часть, на которой $f(x) \neq 0$. Ясно, что если $f(x)$ суммируема на множестве e, то она суммируема и на любом его измеримом подмножестве.

Так как мера множества e есть не что иное, как интеграл от функции, равной 1 на e, то естественно поставить вопрос, присущи ли интегралу, который мы только что определили, установленные выше свойства меры. Ответ на этот вопрос, как легко видеть, может быть сформулирован следующим образом:

Если e_1, e_2, ... — непересекающиеся измеримые множества и если функция $f(x)$ измерима на $e_1 \cup e_2 \cup \ldots$, то

$$F(e_1 \cup e_2 \cup \ldots) = F(e_1) + F(e_2) + \ldots,$$

т. е. $F(e)$ представляет собой счетно-аддитивную функцию множества.

Свойство *абсолютной непрерывности* неопределенного интеграла выступает здесь в следующей обобщенной форме:

Если измеримое множество e изменяется так, что его мера стремится к нулю, то $F(e)$ также стремится к нулю; другими словами, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|F(e)| < \varepsilon$, коль скоро $m(e) < \delta$.

Доказать это можно так же, как тогда, когда e образовано непересекающимися интервалами, представив $f(x)$ в виде суммы двух функций, из которых одна ограничена, а абсолютная величина другой имеет сколь угодно малый интеграл.

§ 3. ПРОСТРАНСТВО L^2 И ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В НЕМ. ПРОСТРАНСТВА L^p

28. Пространство L^2. Сходимость в среднем. Теорема Рисса — Фишера. Рассмотрим измеримые функции $f(x)$, определенные на некотором множестве e конечной или бесконечной меры. Имея в виду дальнейшие приложения, допустим, что $f(x)$ могут принимать комплексные значения. Наконец, мы предположим, что для каждой f суммируем квадрат ее модуля $|f|^2$; в силу неравенства Шварца, сами f суммируемы на всех подмножествах множества e, имеющих конечную меру. Из того же неравенства следует, что произведение любых двух таких функций также суммируемо.