получили всеобщее признание. Предложенное этими авторами доказательство близко к тому, которое изложено здесь, но несколько более громоздко в подробностях; отсылая читателя к статье, упомянутой в примечании, мы ограничимся лишь случаем $p=2$.

Мы можем предположить, что $f=0$, так как в противном случае мы взяли бы f_n-f вместо f_n. Положим для определенности $n_1=1$; пусть n_2—такой номер (или, если угодно, наименьший из таких номеров), для которого $|(f_1, f_{n_2})| \leqslant 1$; такие номера существуют, так как $(f_1, f_n) \to 0$. Если $f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots, f_{n_k}$ уже выбраны, то номер $n_{k+1} > n_k$ мы выберем так, чтобы выполнялись неравенства

$$|(f_{n_1}, f_{n_{k+1}})| \leqslant \frac{1}{k}, \ldots, |(f_{n_k}, f_{n_{k+1}})| \leqslant \frac{1}{k};$$

такой выбор возможен в силу того, что $(f_{n_i}, f_n) \to 0$ $(i=1, 2, \ldots, k;$ $n \to \infty)$. Далее, нормы $\|f_n\|$ ограничены,

$$\|f_n\| \leqslant B,$$

следовательно,

$$\left\|\frac{1}{k}(f_{n_1}+f_{n_2}+\ldots+f_{n_k})\right\|^2 \leqslant \frac{kB^2+2\cdot 1+4\cdot\frac{1}{2}+\ldots+2(k-1)\frac{1}{k-1}}{k^2} <$$

$$< \frac{B^2+2}{k} \to 0,$$

что и требовалось доказать. Коротко можно сказать, что каждый элемент f_{n_k} выбирается таким образом, чтобы он был приблизительно ортогонален ранее выбранным f_{n_i}.

Из доказанной теоремы вытекает следующий важный результат.

Теорема. *Если линейное (или хотя бы выпуклое) множество в L^p замкнуто в смысле сходимости в среднем, то оно замкнуто и в смысле слабой сходимости.*

§ 4. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

39. Определения. Принцип соответствия. Мы ограничимся случаем двух переменных; этого достаточно для выяснения общей картины.

Для построения теории интегрирования нам понадобится шаг за шагом воспроизводить определения и построения, которыми мы пользовались при рассмотрении функций одного переменного; исходным материалом должны служить ступенчатые функции двух переменных, т. е. функции, принимающие постоянные значения на некоторых прямоугольниках (или даже квадратах) со сторонами, параллельными координатным осям. Оперируя с такими прямоугольниками вместо интервалов, мы сможем значительную часть построений воспроизвести без всяких изменений; разумеется, „множества меры нуль“ и понятие „почти всюду“ также будут при этом определяться посредством прямоугольников и их площадей вместо интервалов и длин. Новыми окажутся вопросы, связанные с повторным интегрированием. Нельзя также будет обойти молчанием некоторые трудности, связанные с взаимоотношениями между интегралом и производной.

Между интегралами функций двух переменных, которые могут быть таким образом определены, и интегралами функций одного переменного существует не только аналогия, но и более тесное соответствие, которое во многих случаях позволяет перенести на случай двух переменных теоремы, доказанные для случая одного переменного.

Заметим, что при построении теории интеграла для функций одного переменного можно было бы пользоваться ступенчатыми функциями специального вида, именно такими, точки разрыва которых суть троичные дроби $m3^{-n}$. Иначе эти функции можно описать как линейные комбинации характеристических функций интервалов вида $(m3^{-n}, (m+1)3^{-n})$. Действительно, всякая ступенчатая функция может быть представлена как предел возрастающей последовательности функций такого вида. В плоскости (x, y) аналогичную роль могут играть характеристические функции квадратов вида

$$m3^{-n} \leqslant x < (m+1)3^{-n}, \quad p3^{-n} \leqslant y < (p+1)3^{-n}$$

и их линейные комбинации. Полуоткрытые квадраты рассматриваются только для определенности; в случае одного переменного им соответствовали бы полуоткрытые интервалы $m3^{-n} \leqslant x < (m+1)3^{-n}$. Такого рода соглашение несущественно, так как точки, которые, оперируя с интервалами или квадратами, мы должны были бы считать по нескольку раз, образуют множества меры нуль.

Для ступенчатых функций двух переменных указанного специального вида интеграл выражается так же, как в случае одного переменного, только вместо длин, разумеется, участвуют площади; это обстоятельство наводит на мысль установить взаимно однозначное соответствие между функциями одного переменного и функциями двух переменных, при котором соответствующие друг другу функции имели бы равные интегралы. Для этого предварительно устанавливается взаимно однозначное соответствие, сохраняющее меру, между интервалами и квадратами описанного выше вида. Положив $n=0$, мы разбиваем ось x на интервалы вида $(m, m+1)$ длины 1 и этим интервалам ставим во взаимно однозначное соответствие квадраты со сторонами 1 в плоскости (x, y). Последовательно деля интервалы на девять равных интервалов, а квадраты на девять равных квадратов, мы приводим во взаимно однозначное соответствие интервалы длины 9^{-n} и квадраты со сторонами 3^{-n}, причем так, чтобы соответствующие друг другу интервалы и квадраты при заданном разбиении получались в результате деления интервалов и квадратов, соответствовавших друг другу в предыдущем разбиении. В результате этого построения возникает очевидное соответствие между ступенчатыми функциями одного переменного и двух переменных указанного специального вида, которое, с одной стороны, сохраняет значения интегралов, а с другой стороны, непосредственно распространяется на предельные функции. Одновременно при этом устанавливается „почти" взаимно однозначное соответствие между точками оси x и точками плоскости (x, y), заключенными в соответствующих друг другу интервалах и квадратах; это соответствие нарушается лишь для точек с координатами, выражающимися конечными троичными дробями, т. е. для точек, образующих множество меры нуль. Далее, сопоставляя друг другу множества, состоящие из соответствующих точек, мы замечаем, что любые два множества, соответствующие друг другу, либо оба измеримы, либо оба неизмеримы, причем в первом случае меры их равны. В любом случае внешние меры соответствующих друг другу множеств равны.

Заметим, что для наших целей мы могли бы воспользоваться, например, таким соответствием, которое точке плоскости с координатами

$$x = \ldots a_{-2}a_{-1}a_0,\ a_1a_2\ldots \quad \text{и} \quad y = \ldots b_{-2}b_{-1}b_0,\ b_1b_2\ldots$$

относит на оси x точку

$$x = \ldots a_{-2}b_{-2}a_{-1}b_{-1}a_0b_0,\ a_1b_1a_2b_2\ldots\ .$$

Можно было бы вместо троичных дробей [1]) пользоваться любой другой системой счисления. Можно было бы добиться непрерывного соответствия между точками прямой и плоскости, сопоставляя соседним интервалам соседние же квадраты, как это делается при построении кривой Пеано и аналогичных кривых.

С помощью принципа соответствия большинство введенных выше понятий и установленных результатов непосредственно распространяется на случай двух переменных. Тот же принцип соответствия, лишь несколько видоизмененный, применим к функциям нескольких, даже бесконечно многих, переменных [2]). Очевидные результаты было бы излишне формулировать; мы предпочитаем перейти к новым вопросам. К ним относятся вычисление двойного интеграла с помощью повторного интегрирования и некоторые другие, относительно которых принцип соответствия дает лишь неполные сведения, прежде всего вопросы, связанные с производными.

---

[1]) Мы прибегли к троичным дробям, имея в виду некоторые дальнейшие приложения.

[2]) Лебег [4] (стр. 367), Рисс [6] (стр. 497), Йессен [1].

40. Повторное интегрирование. Теорема Фубини. Установим сначала некоторое соотношение между линейными и плоскими множествами меры нуль.

Согласно определению, плоское множество E меры нуль может быть покрыто конечным или счетным набором квадратов со сколь угодно малой суммой площадей. Или, иначе говоря, так же, как и в линейном случае, E может быть покрыто последовательностью таких квадратов, сумма площадей которых конечна, причем каждая точка множества E содержится одновременно в бесконечной системе квадратов. Так как площади квадратов равны интегралам их характеристических функций $e_n(x, y)$, то эти интегралы образуют сходящийся ряд и, согласно теореме Б. Леви или лемме Б п. 16, поскольку возможность вычисления двойного интеграла повторным интегрированием в случае ступенчатых функций очевидна, ряд интегралов функций $e_n(x, y)$ по переменному y сходится для почти всех значений x. Это означает, что для почти всех x каждая точка множества E с абсциссой x принадлежит бесконечному множеству интервалов на прямой, параллельной оси y, причем сумма длин этих интервалов конечна. Следовательно, такие точки образуют множество меры нуль. Аналогичное заключение, очевидно, справедливо для точек множества E, имеющих фиксированную ординату y.

Перейдем теперь к задаче вычисления двойного интеграла путем повторного интегрирования. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда функция $f(x, y)$ задана в прямоугольнике

$$R=[a<x<b,\ c<y<d]$$

и принадлежит классу C_1. Тогда существует неубывающая последовательность ступенчатых функций $\varphi_n(x, y)$, сходящаяся к $f(x, y)$ во всем прямоугольнике R, за исключением, может быть, некоторого множества E (плоской) меры нуль, и такая, что

$$\iint\limits_R \varphi_n(x, y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d \varphi_n(x, y)\,dy\right)dx \longrightarrow \iint\limits_R f(x, y)\,dx\,dy. \quad (15)$$

Согласно теореме Б. Леви, последовательность функций

$$\Phi_n(x)=\int\limits_c^d \varphi_n(x, y)\,dy$$

сходится для почти всех x. Фиксируем какое-нибудь значение $x=\xi$, при котором последовательность $\{\Phi_n(\xi)\}$ сходится, а точки множества E, имеющие абсциссу ξ, образуют множество линейной меры нуль. При этом

$$\varphi_n(\xi, y)\longrightarrow f(\xi, y)$$

почти всюду относительно y; следовательно, в силу теоремы Б. Леви,

$f(\xi, y)$ представляет собой суммируемую функцию переменного y и

$$\int_c^d \varphi_n(\xi, y)\,dy \to \int_c^d f(\xi, y)\,dy. \tag{16}$$

Такие значения ξ заполняют весь интервал (a, b), за исключением, быть может, некоторого множества меры нуль, поэтому интеграл

$$\int_c^d f(x, y)\,dy \tag{17}$$

имеет смысл для почти всех x; из (15) и (16), опять-таки в силу теоремы Б. Леви, следует, что он представляет собой измеримую функцию переменного x и при этом

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy\right) dx = \iint_R f(x, y)\,dx\,dy.$$

Полученный результат формулируется следующим образом:

Теорема Фубини[1]). *Интеграл суммируемой функции двух переменных может быть вычислен с помощью повторного интегрирования.*

Такой же результат и в силу тех же соображений справедлив и для суммируемых функций большего числа переменных; их можно интегрировать последовательно по каждому переменному в отдельности или по отдельным группам переменных так же, как в классическом анализе.

41. Производные (относительно сети) неотрицательной аддитивной функции прямоугольника. Параллельные переносы сети. Из вопросов, связанных с производными, мы рассмотрим прежде всего дифференцирование аддитивных функций прямоугольника. Напомним читателю, что в случае одного независимого переменного всякая неубывающая функция $f(x)$ определяет некоторую неотрицательную аддитивную функцию интервала $f(\alpha, \beta) = f(\beta) - f(\alpha)$ или некоторое распределение неотрицательной массы и, обратно, распределение неотрицательной массы в интервале (a, b) порождает неубывающую функцию $f(x) = f(a, x)$. Можно было бы определить $f(\alpha, \beta)$ несколько иначе, положив

$$f(\alpha, \beta) = f(\beta - 0) - f(\alpha - 0) \quad \text{или} \quad f(\alpha, \beta) = f(\beta + 0) - f(\alpha + 0).$$

Ясно, что для непрерывных функций и, в частности, для неопределенных интегралов эти различия в определениях не имеют никакого значения и даже в общем случае они не сказываются

[1]) Фубини [2].

на производных, кроме, может быть, их значений в точках разрыва; множество же этих последних не более чем счетно и, следовательно, имеет меру нуль.

В случае двух переменных мы прямо будем отправляться от *функций прямоугольника* $f(R)$, где R означает переменный прямоугольник со сторонами, параллельными осям x и y. Можно было бы, разумеется, сопоставить с такой функцией функцию $f(x, y)$ переменных x и y, поместив одну из вершин прямоугольника R в какую-нибудь фиксированную точку, например в начало координат, а противоположную вершину — в точку (x, y). Но такое построение имеет весьма ограниченный интерес и может служить лишь для того, чтобы выразить окончательные результаты через смешанную вторую производную функции $f(x, y)$. Предположим, что $f(R)$ — аддитивная функция прямоугольника (смысл этого термина очевиден), и займемся вопросом существования производной такой функции. Имея в виду некоторые особенно важные приложения, а также аналогию с монотонными функциями, мы предположим сначала, что $f(R)$, кроме того, *неотрицательна*; в дальнейшем мы перейдем к более широкому классу функций, аналогичных функциям с ограниченным изменением или, говоря точнее, соответствующим функциям интервала.

Границы квадратных клеток, на которые мы условились разбивать плоскость (x, y), образуют прямоугольную сеть, посредством которой мы определим величины, призванные играть роль производных чисел и производной функции $f(R)$; они определяются очевидным образом: производные числа $\overline{D}f(P)$ и $\underline{D}f(P)$, верхнее и нижнее, в точке $P=(x, y)$ *относительно выбранной сети* определяются соответственно как верхний и нижний пределы отношения

$$\frac{f(R)}{|R|}$$

(где $|R|$ обозначает площадь прямоугольника), когда R стягивается к точке P, пробегая последовательность квадратов, служащих клетками наших разбиений. Если $\overline{D}f(P)$ и $\underline{D}f(P)$ совпадают, то их общее значение $Df(P)$ называется производной функции $f(R)$ в точке P.

Принцип соответствия непосредственно обеспечивает *существование производной $Df(P)$ неотрицательной аддитивной функции $f(R)$* почти всюду. Как мы видели, речь идет пока о производной весьма частного вида. Однако мы сейчас покажем, что в действительности эта производная *не зависит* от выбора сети, по крайней мере почти всюду.

Прежде всего мы сравним производную $Df(P)$ с такой же производной $D'f(P)$, но вычисленной после того, как система координат подверглась *параллельному переносу*, и покажем, что

$$D'f(P) = Df(P)$$

почти всюду.

Для этого нам придется повторить, лишь с некоторыми необходимыми изменениями, доказательство (или, точнее говоря, один его этап) существования производной у монотонной функции. Пусть $c < C$ — положительные числа; рассмотрим множество $E_{c,C}$ точек P, в которых

$$Df(P) < c \quad \text{и} \quad D'f(P) > C.$$

В последовательности клеток первой сети, стягивающейся к точке P множества $E_{c,C}$, найдется первая клетка R, на которой

$$\frac{f(R)}{|R|} < c;$$

пусть Σ_1 — система таких клеток, отвечающих всевозможным P из $E_{c,C}$. Пусть Σ_2 — система клеток R второй сети, обладающих следующим свойством: каждая из них служит первой в последовательности клеток, стягивающейся к точке P, на которой

$$\frac{f(R)}{|R|} > C$$

и которая в то же время содержится в некоторой клетке системы Σ_1. При этом, очевидно,

$$C|\Sigma_2| \leqslant V_2 \leqslant V_1 \leqslant c|\Sigma_1|,$$

где $|\Sigma_i|$ означает сумму площадей клеток, образующих систему Σ_i, а V_i — сумму значений функции f на всех таких клетках.

Строя последовательно такие системы $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ клеток и каждый раз выбирая все клетки системы Σ_n внутри предыдущей системы, мы получаем неравенства

$$|\Sigma_{2n}| \leqslant \frac{c}{C}|\Sigma_{2n-1}|$$

и, следовательно,

$$|\Sigma_{2n+1}| \leqslant |\Sigma_{2n}| \leqslant \left(\frac{c}{C}\right)^n |\Sigma_1| \to 0.$$

Мы видим, таким образом, что $E_{c,C}$ имеет меру нуль. Приписав числам c и C всевозможные рациональные значения, такие, что $c < C$, и взяв объединение счетного семейства соответствующих множеств $E_{c,C}$ меры нуль, мы получим в результате множество всех точек, в которых $Df(P) < D'f(P)$, и это множество будет иметь меру нуль. Множество меры нуль будут образовывать также точки, в которых $Df(P) > D'f(P)$. Таким образом, $Df(P) = D'f(P)$ почти всюду, что и требовалось доказать.

42. Функции с ограниченным изменением. Сопряженные сети. Полученный только что результат непосредственно распространяется на аддитивные функции прямоугольника $f(R)$ произвольного знака, но с ограниченным изменением, т. е. на такие функции, для которых при произвольном разбиении прямоугольника R на прямоугольники R_k сумма

$$\sum |f(R_k)| \tag{18}$$

остается ограниченной; верхнюю грань таких сумм мы обозначим

$$Tf(R)$$

и назовем неопределенным полным изменеиием функции $f(R)$. Так же, как в случае одного переменного (см. п. 4), $f(R)$ можно представить в виде разности двух неотрицательных аддитивных функций прямоугольника:

$$f(R) = Tf(R) - [Tf(R) - f(R)].$$

Некоторые другие свойства функций с ограниченным изменением также переносятся иа функции прямоугольника. Одно из них тотчас нам понадобится:

Почти всюду выполняется равенство

$$DTf(P) = |Df(P)|. \tag{19}$$

Это свойство аналогичио тому, которое было установлено в п. 8 и относилось к функциям с ограничениым изменением одного переменного:

$$T'(x) = |f'(x)| \text{ почти всюду.} \tag{19a}$$

Оно доказывается с помощью принципа соответствия, по крайней мере в том случае, когда функция прямоугольника $f(R)$ непрерывна; последиее условие, смысл которого очевиден, выполняется, в частности, тогда, когда $f(R)$ представляет собой неопределенный интеграл какой-нибудь суммируемой функции. При этом условии достаточно заметить, что в определении $Tf(R)$ прямоугольник R, если он принадлежит выбранной сети, можно разбивать на прямоугольники R_k, также принадлежащие этой сети. В общем случае, когда $f(R)$ не предполагается непрерывной, соотношение (19) приходится доказывать прямо, например воспроизведя с соответствующими изменениями доказательство равенства (19a) (см. п. 8). Эти изменения очевидны; так, например, теорема Фубини приобретает теперь такую формулировку: *сходящийся ряд неотрицательных аддитивных функций прямоугольника почти всюду можно дифференцировать почленно относительно заданной сети.*

На соотношении (19) будет основываться следующий этап наших рассмотрений, который представляет собой приложение одного приема, с успехом применявшегося Лебегом в теории рядов Фурье; этот прием мог бы быть изложен и раньше в связи с функциями одного переменного.

Применим равенство (19) к функции

$$g(R;\ \lambda)=f(R)-\lambda|R|,$$

где λ — действительный параметр, и покажем, что *оно справедливо почти всюду для всех значений* λ. Это было бы очевидно, если бы речь шла о счетном множестве значений параметра, так как объединение счетного семейства множеств, каждое меры нуль, на которых равенство (19) нарушается для отдельных значений λ, само имело бы меру нуль. Итак, заставим сначала λ пробегать какое-нибудь счетное всюду плотное множество значений, например множество рациональных чисел r; тогда для $\lambda=r$ почти всюду будет выполняться равенство

$$DTg(P;\ \lambda)=|Dg(P;\ \lambda)|. \tag{20}$$

Для остальных значений λ будем иметь

$$g(R;\ \lambda)=g(R;\ r)+(r-\lambda)|R|,$$

откуда следует, что

$$|Tg(R;\ \lambda)-Tg(R;\ r)|\leqslant|r-\lambda||R|.$$

Заставив r стремиться к λ, мы придем к выводу, что равенство (20) выполняется почти всюду для всех значений λ одновременно. Наконец, фиксировав какую-нибудь точку P_0 и положив $\lambda=Df(P_0)$, получим $Dg(P_0;\ \lambda)=0$ и, следовательно, $DTg(P_0;\ \lambda)=0$. Таким образом, доказана

Теорема. *Если $f(R)$ — аддитивная с ограниченным изменением функция прямоугольника, то неопределенное полное изменение функции прямоугольника*

$$f(R)-Df(P_0)|R|$$

для почти всех точек P_0 имеет производную, обращающуюся в нуль в точке P_0.

Для того чтобы отчетливее уловить смысл этой теоремы, применим ее к одному частному, но наиболее важному случаю, когда $f(R)$ представляет собой интеграл некоторой суммируемой функции $h(P)=h(x,\ y)$. Вспомним предложение, доказанное в п. 23 и состоящее в том, что полное изменение неопределенного интеграла равно интегралу абсолютной величины подынтегральной функции. Доказанная нами теорема утверждает, что *для почти всех точек P_0 интеграл функции $|h(P)-h(P_0)|$, рассматриваемый как функция прямоугольника, имеет производную, обращающуюся в нуль в точке P_0*, и это предложение обобщается на функции прямоугольника, не являющиеся интегралами.

Теперь мы уже можем доказать, что производная $Df(P)$ аддитивной с ограниченным изменением функции прямоугольника $f(R)$ не зависит от выбора сети. Мы уже знаем, что она не изменяется при параллельном переносе сети.

Метод доказательства принадлежит Валле Пуссену и называется *методом сопряженных сетей*[1]).

Сместим нашу сеть один раз на $\frac{1}{2}$ в направлении оси x, другой раз на $\frac{1}{2}$ в направлении оси y и, наконец, на $\frac{1}{2}$ в том и другом направлениях; при этом получатся три новые сети, которые называются сопряженными исходной. Преимущество в одновременном рассмотрении этих четырех сетей вместо одной состоит в следующем. Рассмотрим квадрат R со сторонами длины a, параллельными осям; если

$$\frac{1}{2\cdot 3^{n+1}} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2\cdot 3^n},$$

то R заведомо содержится в клетке со стороной 3^{-n}, принадлежащей одной из четырех сетей, а площадь квадрата R не меньше $\frac{1}{36}$ площади такой клетки. Поэтому отношение $T(f(R)-\lambda|R|)/|R|$ на квадрате R со стороной a не превзойдет такого же отношения, но вычисленного на соответствующей клетке со стороной $\leqslant 6a$, умноженного на 36. Положив $\lambda = Df(P_0)$ и $a \to 0$ в приведенном выше рассуждении, мы придем к выводу, что первое отношение стремится к нулю одновременно со вторым. Итак, мы приходим к следующему результату:

Теорема. *Производная функции $f(R)$ в точке P_0 существует и равна $Df(P_0)$, даже если R стягивается к P_0, пробегая произвольные квадраты со сторонами, параллельными координатным осям.*

Можно было бы пойти еще дальше и заменить квадраты прямоугольниками со сторонами, параллельными координатным осям, лишь бы *отношение их длин не превосходило некоторого фиксированного q*; при этом в доказательстве вместо 36 появился бы множитель $36q$.

43. Аддитивные функции множества. B-измеримые множества. Заметим, не входя в подробности, что от аддитивных функций прямоугольника $f(R)$ мы можем перейти к *аддитивным функциям множества* $f(e)$, так же, как отправляясь от площади прямоугольника, мы вводим меру множества. Представляется почти очевидной возможность заменить в предыдущих рассуждениях $f(R)$ аддитивной функцией множества $f(e)$; в частности, отношение $f(e)$ к мере множества e почти всюду имеет предел $Df(P_0)$, когда e стягивается к точке P_0, пробегая последовательность множеств $\{e_n\}$, такую, что отношение меры e_n к площади наименьшего

---

[1]) Валле Пуссен [2] (стр. 68—70).

квадрата (или круга), содержащего e_n, ограничено снизу некоторым фиксированным числом $d > 0$.

Теперь легко установить соотношение между только что определенной производной и интегралом, так как, по существу, дело обстоит так же, как в случае одного переменного. Вместо того чтобы излагать результаты или формулировать теоремы, мы ограничимся замечанием, что стягивающиеся интервалы заменяются стягивающимися прямоугольниками, которым не разрешается лишь неограниченно сплющиваться. Последнее ограничение, характерное для случая двух переменных, исчезает при переходе к функциям множества; предосторожности, которые приходится принимать при дифференцировании функций множества, одинаковы для линейных и плоских множеств.

Следует еще заметить, что можно было бы с самого начала рассматривать функции множества, минуя функции прямоугольника. Можно было бы, например, ввести аддитивные функции открытого множества, с помощью которых всего удобнее задавать распределения масс. Однако этого понятия, как правило, избегают, видимо, опасаясь неудобств, возникающих при разложении открытого множества на открытые слагаемые. Эти неудобства можно устранить, определив аддитивность посредством равенства

$$f(e_1 \cup e_2) + f(e_1 \cap e_2) = f(e_1) + f(e_2).$$

Другая возможность состоит в том, чтобы отправляться от функций, заданных на B-измеримых множествах. Борель, которому принадлежит это понятие, незадолго до Лебега дал конструктивное определение меры, отправляясь от интервалов и переходя последовательно к множествам все более и более сложным, но не достигнув, однако, общности, присущей лебеговскому определению[1]). Борелевская мера оказывается все-таки достаточной в большинстве вопросов, связанных с интегралом Лебега и его обобщениями; она даже обладает известным преимуществом перед мерой Лебега, состоящим в том, что в некоторых рассуждениях все встречающиеся множества оказываются B-измеримыми.

Согласно одному из определений, класс B-измеримых множеств есть наименьший класс, содержащий все интервалы (или, соответственно, все прямоугольники) и замкнутый относительно образования объединений и пересечений всякого конечного или счетного семейства входящих в него множеств.

Аналогично определяется понятие *B-измеримой функции*. Класс этих функций определяется как наименьший класс, содержащий все непрерывные функции и замкнутый относительно сложения, вычитания и умножения функций, взятых в конечном числе, а также относительно образования пределов последова-

---

[1]) Борель [1]; см. также Лебег [7].

тельностей функций, сходящихся всюду. Иначе говоря, этот класс образован непрерывными функциями, а также функциями, которые могут быть получены последовательными предельными переходами [1]). В частности, любая ступенчатая функция B-измерима. Очевидно, что любая B-измеримая функция измерима в том смысле, как это определено в п. 23.

Обратное неверно; тем не менее справедлива следующая

Теорема. *Для всякой измеримой функции $f(P)$ можно подобрать B-измеримую функцию $g(P)$, отличающуюся от $f(P)$ лишь на множестве меры нуль.*

Рассмотрим для определенности случай одного переменного. Покажем сначала, что всякое множество E меры нуль заключено в некотором B-измеримом множестве E^* также меры нуль. В самом деле, множество E может быть покрыто множеством J_n, являющимся объединением конечного или счетного набора интервалов с суммой длин $< \frac{1}{n}$; все такие J_n при $n = 1, 2, \ldots$ B-измеримы, следовательно, их пересечение

$$E^* = \bigcap_n J_n$$

также B-измеримо, и так как $m(J_n) < \frac{1}{n}$, то $m(E^*) < \frac{1}{n}$, т. е. $m(E^*) = 0$.

Пусть теперь $f(P)$ — какая-нибудь измеримая функция; по определению, существует последовательность $\{f_n(P)\}$ суммируемых функций, сходящаяся к $f(P)$ почти всюду. Каждая $f_n(P)$, в свою очередь, является пределом почти всюду некоторой последовательности ступенчатых функций $\{\varphi_{nk}(P)\}$. Пусть E — объединение всех тех множеств меры нуль, на которых $\{\varphi_{nk}(P)\}$ не сходятся к соответствующим $f_n(P)$; будучи множеством меры нуль, E заключено в некотором B-измеримом множестве E^* меры нуль. Характеристическая функция $e(P)$ множества, дополнительного к E^*, ступенчатые функции, а также их произведения и пределы B-измеримы; поэтому функции

$$f_n(P)\,e(P) = \lim_{k \to \infty} \varphi_{nk}(P)\,e(P)$$

и

$$f(P)\,e(P) = \lim_{n \to \infty} f_n(P)\,e(P)$$

B-измеримы. Последняя же функция отличается от $f(P)$ только на множестве E^* меры нуль.

---

[1]) Классификация функций по числу (конечному или трансфинитному) предельных переходов принадлежит Бэру [1]. Подробно об этом см. Валле Пуссен [1] (гл. II).