§ 5. ДРУГИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

44. L-измеримые множества. В ходе развития теории Лебега предлагались различные определения интеграла, в частности — приведенное выше. Из других определений рассмотрим прежде всего то, которое первоначально было предложено Лебегом; определению суммируемой функции предшествуют определения меры множества и измеримой функции. Во избежание путаницы мы будем здесь говорить о L-мере, L-измеримых множествах и функциях и об L-интеграле. Чтобы не усложнять формулировки и запись, ограничимся случаем *одного переменного*, а основной интервал (a, b) будем считать *конечным*.

В п. 6 мы определили внешнюю меру $m_e(E)$ множества E: это — нижняя грань сумм длин систем интервалов, покрывающих E. При этом безразлично, брать ли открытые интервалы или замкнутые; в последнем случае интервалы можно растянуть на сколь угодно малую долю их первоначальной длины, отчего нижняя грань сумм длин, очевидно, не изменится, а затем перейти от замкнутых интервалов к открытым.

Пусть множество E заключено в конечном интервале (a, b); возьмем дополнительное множество $CE = (a, b) \setminus E$. Тогда будет иметь место неравенство

$$m_e E + m_e CE \geqslant b - a. \tag{21}$$

В самом деле, покроем E и CE системами интервалов с суммами длин, соответственно меньшими $m_e E + \frac{\varepsilon}{2}$ и $m_e CE + \frac{\varepsilon}{2}$; при этом, согласно предыдущему замечанию, все эти интервалы можно выбрать открытыми. Интервал же (a, b), не нарушая общности, можно считать замкнутым. Обе системы интервалов в совокупности покрывают (a, b); тем же свойством обладает, в силу известной теоремы Бореля, некоторое конечное число этих интервалов. Сумма их длин, очевидно, меньше $m_e E + m_e CE + \varepsilon$. Тем более $b - a \leqslant m_e E + m_e CE + \varepsilon$, откуда при $\varepsilon \to 0$ следует неравенство (21).

Условимся говорить, что *множество E L-измеримо и его L-мера mE равна $m_e E$, коль скоро в* (21) *имеет место равенство.* Ясно, что это определение не зависит от выбора интервала (a, b).

Покажем теперь, что L-мера совпадает с мерой, определенной выше как интеграл характеристической функции множества E. Для этого нам понадобится следующая

Лемма. *Если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для функции $f(x)$, заданной на интервале (a, b), существуют суммируемые функции*

$g(x)$ и $h(x)$, такие, что

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x), \quad \int_a^b [h(x) - g(x)]\, dx \leqslant \varepsilon,$$

то $f(x)$ сама суммируема.

Положим $\varepsilon = 2^{-n}$ и возьмем соответствующие пары функций g_n и h_n. Тогда ряд

$$\sum_1^\infty \int_a^b [h_n(x) - g_n(x)]\, dx,$$

мажорируемый рядом $\sum\limits_1^\infty 2^{-n}$, будет сходящимся. Следовательно, будет сходиться почти всюду ряд

$$\sum_1^\infty [h_n(x) - g_n(x)],$$

откуда вытекает, что $h_n - g_n \to 0$ почти всюду и, таким образом, $g^n \to f$ и $h_n \to f$. Принимая во внимание неравенства $g_1 \leqslant f \leqslant h_1$, мы видим, что измеримость f вытекает из первой теоремы п. 20.

Допустим теперь, что множество E L-измеримо, и снова воспользуемся теми системами интервалов — обозначим их Σ_1 и Σ_2, — которыми мы пользовались в доказательстве неравенства (21). Пусть $|\Sigma_1|$ и $|\Sigma_2|$ — суммы длин, а $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ — суммы характеристических функций интервалов, входящих в соответствующие системы. То, что $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ имеют смысл почти всюду, обеспечивается леммой Б п. 16. Далее, функции $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ суммируемы и их интегралы равны соответственно $|\Sigma_1|$ и $|\Sigma_2|$. Так как $\sigma_1(x) \geqslant e(x)$, $\sigma_2(x) \geqslant 1 - e(x)$ и

$$\int_a^b [\sigma_1(x) - (1 - \sigma_1(x))]\, dx = |\Sigma_1| + |\Sigma_2| - (b-a) \leqslant$$
$$\leqslant mE + mCE + \varepsilon - (b-a) \leqslant \varepsilon,$$

то, положив $f(x) = e(x)$, $g(x) = 1 - \sigma_2(x)$, $h(x) = \sigma_1(x)$ и воспользовавшись предыдущей леммой, мы убедимся, что функция $e(x)$ суммируема. Кроме того, ее интеграл заключен между значениями интегралов функций $g(x)$ и $h(x)$, т. е. между

$$b - a - |\Sigma_2| \geqslant b - a - mCE - \frac{\varepsilon}{2} = mE - \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$|\Sigma_1| \leqslant mE + \frac{\varepsilon}{2};$$

так как $\varepsilon > 0$ произвольно мало, то

$$\int_a^b e(x)\, dx = mE.$$

Обратно, предположим, что характеристическая функция $e(x)$ множества E суммируема, и докажем, что при этом множество E L-измеримо. Для этого рассмотрим последовательность ступенчатых функций $\{\varphi_n(x)\}$, сходящуюся к $e(x)$. Можно допустить, что φ_n представляют собой характеристические функции некоторых множеств Σ_n, каждое из которых является объединением конечного числа интервалов. В самом деле, в противном случае достаточно было бы положить $\varphi_n(x)=1$ всюду, где φ_n ранее была $>\frac{1}{2}$, и $\varphi_n(x)=0$ в остальных точках; от этого сходимость последовательности $\{\varphi_n\}$ к $e(x)$ не нарушится. Функцию $e(x)$ можно представить как предел монотонной последовательности функций

$$g_n=\sup(\varphi_n, \varphi_{n+1}, \ldots),$$

являющихся характеристическими функциями объединений $\Sigma^{(n)}$ множеств Σ_n, Σ_{n+1}, ... Любое из $\Sigma^{(n)}$ образовано конечным или счетным набором интервалов, которые можно считать непересекающимися, если в каждом Σ_k выбросить точки, попавшие в Σ_l с меньшими номерами. Сумма длин таких интервалов равна интегралу функции g_n, так что при $n\to\infty$ эти суммы стремятся к интегралу функции $e(x)$. Далее, множества $\Sigma^{(n)}$ покрывают E с точностью до множества меры нуль. Отсюда следует, что

$$m_eE\leqslant\int_a^b e(x)\,dx.$$

Аналогичное рассуждение приводит к неравенству

$$m_eCE\leqslant\int_a^b[1-e(x)]\,dx=b-a-\int_a^b e(x)\,dx.$$

Сопоставляя полученные неравенства с (21), мы придем к соотношению

$$m_eE+m_eCE=b-a,$$

т. е. множество E оказывается L-измеримым. Таким образом, оба определения эквивалентны, и мы не будем в дальнейшем различать первоначально определенную меру и L-меру.

45. L-измеримые функции и L-интеграл. Следующим шагом в теории Лебега является определение *измеримой функции.*

Функция $f(x)$, заданная на конечном интервале (a, b), называется L-измеримой, если, каковы бы ни были числа $A<B$, множество точек, в которых выполняются неравенства

$$A\leqslant f(x)<B,$$

измеримо.

Из известных нам свойств измеримых множеств вытекает возможность заменить высказанное в этом определении условие следующим: каково бы ни было число A, множество, на котором $f(x) \leqslant A$, измеримо. Можно было бы также положить в основу определения любое из неравенств $f > A$, $f \geqslant A$, $f < A$.

Как показано в п. 22, функции, которые мы до сих пор называли измеримыми, обладают упомянутым свойством. Нам остается показать, что, обратно, всякая L-измеримая функция измерима и в смысле нашего первоначального определения, т. е. она либо суммируема, либо служит пределом последовательности суммируемых функций.

Пусть

$$\ldots,\ l_{-2},\ l_{-1},\ l_0,\ l_1,\ l_2,\ \ldots$$

— бесконечная в обе стороны „шкала" с разностями $l_n - l_{n-1} > 0$, ограниченными сверху некоторым δ. Пусть E_n — множество, согласно нашему предположению, измеримое, на котором $l_{n-1} \leqslant f(x) < l_n$. Возьмем функцию $g_N(x)$, положив ее равной l_{n-1} на E_n при $|n| \leqslant N$ и равной нулю во всех остальных точках; такая функция, очевидно, суммируема. Если положить $\delta = 2^{-N}$ и заставить N стремиться к бесконечности, то соответствующая последовательность функций $\{g_N(x)\}$ будет стремиться к $f(x)$.

Таким образом, установлена также эквивалентность обоих определений измеримой функции.

Переходим к построению *L-интеграла*. Возьмем измеримую функцию $f(x)$ и сначала допустим, что она неотрицательна; пусть

$$l_0,\ l_1,\ l_2,\ \ldots$$

— шкала с $l_0 = 0$ и $0 < l_n - l_{n-1} \leqslant \delta$. Предположим, что ряд

$$\sum_1^\infty l_n mE_n \tag{22}$$

сходится; тогда аналогичный ряд должен быть сходящимся при любом другом выборе шкалы. В самом деле, рассмотрим одновременно со шкалой $\{l_n\}$ какую-нибудь другую шкалу $\{\bar{l}_n\}$; пусть $\bar{l}_n - \bar{l}_{n-1} \leqslant \bar{\delta}$, а $\bar{E}_n$ — соответствующие множества. Характеристические функции множеств E_n и $\bar{E}_n$ обозначим соответственно $e_n(x)$ и $\bar{e}_n(x)$. Тогда будем иметь

$$\sum_1^\infty \bar{l}_{n-1}\bar{e}_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \sum_1^\infty l_n e_n(x).$$

Сходимость ряда (22) обеспечивает сходимость почти всюду ряда $\sum l_n e_n(x)$, сумма которого оказывается, таким образом, суммируемой функцией. Отсюда, согласно теореме Лебега (см. п. 19), вытекает почленная интегрируемость ряда $\sum \bar{l}_{n-1}\bar{e}_n(x)$ и, следовательно, сходимость ряда $\sum \bar{l}_{n-1} m\bar{E}_n$; наконец, так как

$$\sum_1^\infty \bar{l}_n m\bar{E}_n = \sum_1^\infty \bar{l}_{n-1} m\bar{E}_n + \sum_1^\infty (\bar{l}_n - \bar{l}_{n-1})\, m\bar{E}_n \leqslant$$

$$\leqslant \sum_1^\infty \bar{l}_{n-1} m\bar{E}_n + \delta(b-a), \tag{23}$$

то сходится и ряд $\sum \bar{l}_n m\bar{E}_n$.

Проведенное здесь рассуждение показывает также, что

$$\sum_1^\infty \bar{l}_{n-1} m\bar{E}_n \leqslant \sum_1^\infty l_n mE_n,$$

т. е. любая „нижняя сумма“ рассматриваемого вида не больше любой „верхней суммы“. Вместе с тем из неравенства (23) следует, что при достаточно мелких шкалах „нижние“ и „верхние суммы“ разнятся сколь угодно мало. Число, служащее верхней гранью „нижних сумм“ и одновременно нижней гранью „верхних сумм“, однозначно определенное, и называется *L-интегралом функции* $f(x)$.

Что касается функции произвольного знака, то для нее можно определить интеграл, представив ее в виде разности двух неотрицательных L-суммируемых функций, например взяв ее положительную и отрицательную части. При этом функция $f(x)$ оказывается суммируемой при условии, что хотя бы один из рядов вида

$$\sum_{-\infty}^{\infty} l_n mE_n \quad (l_n - l_{n-1} \leqslant \delta)$$

сходится абсолютно. В частности, всякая ограниченная измеримая функция L-суммируема.

Непосредственно из определения L-интеграла следует, что L-суммируемая функция суммируема в смысле нашего определения и оба ее интеграла совпадают. Покажем теперь, что суммируемая (в нашем смысле) функция $f(x)$ непременно L-суммируема; при этом можно, очевидно, ограничиться случаем, когда $f(x)$ неотрицательна.

Мы уже знаем, что суммируемая в смысле нашего определения функция L-измерима. Возьмем снова какую-нибудь шкалу $\{l_n\}$, соответствующие множества E_n и их характеристические функции $e_n(x)$. Так как

$$f(x) \leqslant \sum_1^\infty l_n e_n(x) \leqslant f(x) + \delta$$

и функции f и e_n суммируемы, то ряд $\sum l_n e_n(x)$ можно почленно интегрировать и ряд интегралов, т. е. $\sum l_n mE_n$, будет сходиться. Следовательно, $f(x)$ L-суммируема, что и требовалось доказать.

46. Другие определения. Теорема Егорова. Как уже было сказано выше, помимо того определения, которым мы пользовались, существуют и другие, эквивалентные лебеговскому определению. Здесь мы укажем одно из определений, сформулированных Юнгом[1]), к которому наше определение, по существу, очень близко. Оно также основывается на интегрировании монотонных последовательностей, но сформулировать его можно совсем просто, по крайней мере для ограниченных функций, слегка видоизменив определение интеграла Римана, принадлежащее Дарбу. Для заданной функции $f(x)$ рассмотрим нижнюю грань нижних интегралов функций, превосходящих $f(x)$, и верхнюю грань верхних интегралов функций, меньших $f(x)$; если обе эти грани совпадают, то их общее значение называется *интегралом* функции $f(x)$. Для определения интеграла неограниченной функции эта последняя представляется как предел последовательности ограниченных функций.

Другое определение, заслуживающее упоминания, принадлежит одному из авторов этой книги[2]); оно также проще всего формулируется в применении к ограниченным функциям. Это определение основывается на том, что если ограниченная последовательность ступенчатых функций сходится почти всюду, то последовательность их интегралов также сходится; интеграл предельной функции $f(x)$ определяется как предел интегралов, причем доказывается, что различные последовательности, сходящиеся почти всюду к одной и той же функции, приводят к одному и тому же значению интеграла, или что при $f(x) \equiv 0$ последовательность интегралов стремится к нулю. Все это можно доказать с помощью установленных выше теорем об интегрировании монотонных последовательностей, но можно идти и другими путями, которые будут сейчас вкратце описаны.

Отправным пунктом первого пути служит

Теорема Егорова[3]). *Пусть дана сходящаяся последовательность измеримых функций на измеримом множестве E, заключенном в конечном интервале (a, b). Изъятием из множества E некоторой части сколь угодно малой меры можно добиться того, чтобы на оставшемся множестве заданная последовательность сходилась равномерно.*

Эту теорему легко доказать средствами теории меры[4]), но, может быть, стоит показать, как она формулируется и доказывается независимо от теории меры[5]). Сформулируем сначала такой ее частный случай, в котором понятие меры не участвует:

[1]) У. Юнг [1] (в частности, стр. 25—35).
[2]) Рисс [11].
[3]) Егоров [1].
[4]) Сакс [3] (стр. 18).
[5]) Рисс [12].

Пусть дана сходящаяся последовательность непрерывных функций на ограниченном замкнутом множестве E. Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, из E можно изъять такую часть, могущую быть покрытой системой интервалов с суммой длин $< \varepsilon$, что на оставшемся множестве заданная последовательность сходится равномерно.

Множество точек x, в которых при $m, n \geqslant \nu$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{k}, \tag{24}$$

обозначим $E_{\nu, k}$. Эти множества замкнуты. Допустим на минуту, что их дополнения также замкнуты. При фиксированном k множества $E \diagdown E_{\nu, k}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) образуют убывающую последовательность с пустым пересечением; в самом деле, если бы существовала точка x_0, принадлежащая одновременно всем этим множествам, то в такой точке неравенство

$$|f_m(x_0) - f_n(x_0)| > \frac{1}{k}$$

выполнялось бы для сколь угодно больших номеров m и n, т. е. последовательность $\{f_n(x_0)\}$ была бы расходящейся. Но убывающая последовательность замкнутых множеств имеет пустое пересечение только в том случае, когда сами множества, ее образующие, пусты, начиная с некоторого номера. Итак, для некоторого $\nu = \nu(k)$ множество $E \diagdown E_{\nu, k}$ пусто, следовательно, $E_{\nu, k} = E$ и при $m, n \geqslant \nu(k)$ неравенство (24) выполняется во всех точках множества E. Так как k было фиксировано произвольно, то это означает, что последовательность $\{f_n\}$ сходится на множестве E равномерно.

Однако допущение, что множества $E - E_{\nu, k}$ замкнуты, в общем случае не оправдывается. Мы сейчас покажем, что такие разности можно считать замкнутыми, если предварительно изъять из E некоторое подмножество, могущее быть покрытым системой интервалов со сколь угодно малой суммой длин. Пусть (a, b) — открытый интервал, содержащий множество E; возьмем произвольное, сколь угодно малое, положительное число ε. Разность $(a, b) \diagdown E_{\nu, k}$, будучи открытым множеством, представляет собой объединение счетного набора непересекающихся замкнутых интервалов, сумма длин которых конечна. Из этих интервалов выделим конечное число, настолько большое, чтобы сумма длин оставшихся интервалов была меньше $2^{-\nu-k-1}\varepsilon$. Каждый из оставшихся интервалов заменим открытым интервалом, имеющим ту же середину и вдвое большую длину. Систему таких „удлиненных" интервалов обозначим $\Sigma_{\nu, k}$; сумма их длин будет меньше $2^{-\nu-k}\varepsilon$. Пусть $\overline{E}_{\nu, k}$ — та часть множества E, которая попала в конечное число выделенных интервалов; $\overline{E}_{\nu, k}$ представляет собой замкнутое множество, не имеющее общих точек с $E_{\nu,k}$. Наконец, выбросим из E все те точки, которые попали в интервалы, входящие в системы $\Sigma_{\nu,k}$, где $\nu, k = 1, 2, \ldots$; сумма длин всех таких интервалов меньше $\sum\limits_{\nu, k=1}^{\infty} 2^{-k-\nu}\varepsilon = \varepsilon$. Оставшуюся часть множества E обозначим E^*. Это множество замкнуто, так же как его пересечение $\overline{E}^*_{\nu,k}$ с $\overline{E}_{\nu,k}$. Множество $E^*_{\nu,k} = E^* \diagdown \overline{E}^*_{\nu,k}$, будучи пересечением E^* и $E_{\nu,k}$, состоит из тех точек множества E^*, в которых при $m, n \geqslant \nu$ выполняется неравенство (24). Применив к замкнутым множествам $\overline{E}^*_{\nu,k} = E^* \diagdown E^*_{\nu,k}$ приведенное выше рассуждение, мы убедимся в том, что заданная последовательность функций сходится равномерно на E^*.

Прежде чем перейти к общей теореме Егорова, покажем, что из только что доказанного ее частного случая просто вытекает

Теорема Лузина[1]). *Пусть задана измеримая функция $f(x)$ на измеримом множестве E. Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, из E можно изъять такую часть, могущую быть покрытой системой интервалов с суммой длин $< \varepsilon$, что на оставшемся множестве функция $f(x)$ будет непрерывна.*

Достаточно, очевидно, рассмотреть случай, когда множество E ограничено; заключим его в замкнутый интервал $[a, b]$. Продолжим функцию $f(x)$ на весь этот интервал, положив $f(x) = 0$ вне E. Полученная таким образом функция на интервале $[a, b]$ измерима и, следовательно, является пределом почти всюду некоторой последовательности ступенчатых функций $\{\varphi_n(x)\}$. Точки, в которых эта последовательность не сходится к $f(x)$, а также точки разрыва функций $\varphi_n(x)$ образуют множество меры нуль, которое можно заключить в систему открытых интервалов с суммой длин $< \frac{\varepsilon}{2}$. На замкнутом множестве, полученном изъятием из $[a, b]$ этих интервалов, все функции $\varphi_n(x)$ непрерывны и сходятся к $f(x)$ всюду. Следовательно, изъяв дополнительно из этого множества некоторую его часть, могущую быть покрытой системой интервалов с суммой длин $< \frac{\varepsilon}{2}$, мы можем на оставшемся множестве получить равномерную сходимость последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ к $f(x)$; доказательство завершается применением классической теоремы, согласно которой предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций представляет собой непрерывную функцию.

С помощью аналогичного рассуждения можно доказать теорему Егорова в ее общей формулировке. Пусть на измеримом множестве $E \subset [a, b]$ задана сходящаяся почти всюду последователь-

[1]) Лузин [1].

ность измеримых функций $\{f_n(x)\}$. Продолжим $f_n(x)$ на весь интервал $[a, b]$, положив $f_n(x)=0$ вне E. Задав произвольное положительное число ε, заключим сначала в систему интервалов с суммой длин $< \frac{\varepsilon}{4}$ то множество меры нуль, на котором последовательность $\{f_n(x)\}$ не сходится. Далее, удалим из E последовательно такие его части, могущие быть покрытыми системами интервалов с суммами длин $< 2^{-n-1}\varepsilon$, чтобы на оставшихся множествах соответствующие функции $f_n(x)$ были непрерывны. Наконец, воспользовавшись доказанным выше частным случаем теоремы Егорова, мы удалим некоторое подмножество, содержащееся в системе интервалов с суммой длин $< \frac{\varepsilon}{4}$, с тем чтобы на оставшемся множестве последовательность $\{f_n(x)\}$ сходилась равномерно. Сумма длин интервалов, покрывающих все последовательно изъятые подмножества, меньше ε, и теорема, таким образом, доказана.

Теоремы Егорова и Лузина подсказывают еще один возможный подход к понятию интеграла: можно *определить* измеримые функции на интервале как такие функции, которые становятся непрерывными, если выбросить соответствующим образом выбранные интервалы со сколь угодно малой суммой длин; далее, измеримые множества можно определить условием, чтобы были измеримы их характеристические функции. Понятие суммируемой функции и интеграла можно получить, проинтегрировав сначала непрерывные функции на замкнутых множествах и перейдя затем к пределу. Это построение, идея которого принадлежит Борелю, осуществлено Ханом[1]).

Здесь уместно упомянуть о так называемой *сходимости по мере*. Дело в том, что в большинстве приложений вместо теоремы Егорова можно применять следующую, более слабую теорему[2]): *всякая последовательность измеримых функций* $\{f_n(x)\}$, *сходящаяся к функции* $f(x)$ *на измеримом множестве* E, *сходится к* $f(x)$ *по мере, т. е. при любом* $\delta > 0$ *мера множеств, на которых* $|f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta$, *стремится к нулю при* $n \to \infty$.

Эта теорема легко доказывается в рамках общей теории, а из нее, в свою очередь, так же просто вытекает теорема Егорова и еще следующее предложение, с помощью которого многие авторы доказывают теорему Рисса — Фишера: *всякая последовательность, сходящаяся по мере, содержит подпоследовательности, сходящиеся почти всюду.*

Мы не будем проводить эти доказательства. В том порядке изложения, которого мы придерживаемся, интереснее отметить, что *последовательность, „сходящуюся по мере" к функции* $f(x)$,

---

[1]) Борель [1] (стр. 248—250) или [2]; Хан [2].

[2]) Лебег [3].

можно определить, не пользуясь понятием „меры", как такую последовательность, всякая подпоследовательность которой содержит подпоследовательности, сходящиеся к $f(x)$ почти всюду. Мы предоставляем читателю в этом убедиться[1]).

47. Элементарное доказательство теорем Арцела и Осгуда. Вернемся к нашей основной теме. Говоря о различных определениях интеграла, следует дать возможно более простое доказательство того, что если ограниченная последовательность ступенчатых функций $\{\varphi_n(x)\}$ сходится почти всюду, то сходится и последовательность их интегралов. По существу, здесь речь идет о теоремах Арцела и Осгуда, так как незначительное ослабление условий не вызывает почти никаких изменений в доказательствах. Обе эти теоремы и в особенности их обобщение, принадлежащее Лебегу, настолько важны, что мы изложим еще одно их доказательство, совсем элементарное и обладающее преимуществом, присущим многим элементарным доказательствам, а именно, чрезвычайной широтой приложения; оно применимо даже к функциям, заданным на абстрактных множествах. Мы проведем здесь это доказательство[2]) для ступенчатых функций, но оно применимо и в общем случае.

Прежде всего, не нарушая общности, мы можем предположить, что $\varphi_n(x) \geqslant 0$ и $\varphi_n(x) \to 0$ почти всюду. В самом деле, если в этом частном случае мы покажем, что интегралы стремятся к нулю, то в общем случае будем иметь

$$\int_a^b |\varphi_m(x) - \varphi_n(x)|\, dx \to 0 \quad (m, n \to \infty),$$

так как иначе при некоторых $m_k, n_k \to \infty$ функции $\psi_k = |\varphi_{m_k} - \varphi_{n_k}|$ стремились бы к нулю почти всюду, тогда как соотношение $\int_a^b \psi_k(x)\, dx \to 0$ не имело бы места.

В п. 16 (лемма А) было доказано совсем элементарно, что $\int_a^b \varphi_n(x)\, dx \to 0$, если $\varphi_n(x) \to 0$ почти всюду и $\varphi_n(x)$ образуют

[1]) Заметим, что такое определение основано на одной идее, заимствованной из теории абстрактных топологических пространств. В пространстве измеримых функций введем сначала сходимость почти всюду. Далее, назовем $f(x)$ предельным элементом некоторого множества функций, если это последнее содержит последовательность, сходящуюся к $f(x)$. Если мы теперь попытаемся построить понятие сходимости в терминах предельных точек и будем называть $f(x)$ пределом последовательности $\{f_n(n)\}$, когда $f(x)$ служит предельным элементом для всякой подпоследовательности $\{f_{n_k}(x)\} \subset \subset \{f_n(x)\}$, то мы придем не к первоначальному понятию сходимости, а к сходимости по мере.

[2]) См. Рисс [9] и Ландау [1].

убывающую последовательность. Теперь мы должны освободиться от последнего условия. Для сравнения посмотрим сначала, как это делается в теории Лебега. Берется последовательность суммируемых функций

$$f_n(x) = \sup(\varphi_n, \ \varphi_{n+1}, \ \ldots),$$

убывающая и также сходящаяся почти всюду к нулю; в силу теоремы Б. Леви, $\int_a^b f_n(x)\,dx \to 0$, а так как $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant f_n(x)$, то $\int_a^b \varphi_n(x)\,dx \to 0$.

Можно провести это доказательство и не пользуясь интегралом Лебега. Для этого функции $f_n(x)$ нужно заменить ступенчатыми функциями, приближающими их снизу с достаточной точностью. Рассмотрим функции

$$\varphi_m^n(x) = \sup(\varphi_m, \ \varphi_{m+1}, \ \ldots, \ \varphi_n)$$

и обозначим их интегралы I_m^n. При фиксированном m функции φ_m^n возрастают вместе с n, а I_m^n стремятся при этом к некоторому J_m. Неотрицательные числа J_m образуют убывающую последовательность; если $J \geqslant 0$ — ее предел, то, в силу неравенств

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,dx \leqslant I_m^n \leqslant J_m, \tag{25}$$

достаточно будет доказать, что $J = 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало и n_1 — наименьшее значение n, при котором выполняется неравенство $I_1^n > J_1 - \frac{\varepsilon}{2}$; вообще, пусть n_m — наименьшее следующее за n_{m-1} значение n, при котором $I_m^n > J_m - 2^{-m}\varepsilon$. Положим

$$\psi_m(x) = \inf(\varphi_1^{n_1}(x), \ \varphi_2^{n_2}(x), \ \ldots, \ \varphi_m^{n_m}(x)).$$

Тогда будет выполняться неравенство

$$\int_a^b \psi_m(x)\,dx > J_m - (1 - 2^{-m})\,\varepsilon.$$

В самом деле, при $m = 1$ это неравенство очевидно; если теперь предположить, что оно выполняется для $m - 1$, т. е. что

$$\int_a^b \psi_{m-1}(x)\,dx > J_{m-1} - (1 - 2^{-m+1})\,\varepsilon,$$

то, представив ψ_m в виде

$$\psi_m(x) = \inf(\psi_{m-1}(x), \ \varphi_m^{n_m}(x)) =$$
$$= \psi_{m-1}(x) + \varphi_m^{n_m}(x) - \sup(\psi_{m-1}(x), \ \varphi_m^{n_m}(x))$$

и заметив, что $\psi_m(x)$ и $\varphi_m^{nm}(x)$, а следовательно, и $\sup(\psi_{m-1}(x), \varphi_m^{nm}(x))$ не превосходят $\varphi_{m-1}^{nm}(x)$, получим

$$\psi_m(x) \geqslant \psi_{m-1}(x) + \varphi_m^{nm}(x) - \varphi_{m-1}^{nm}(x);$$

интегрируя, получаем требуемое неравенство:

$$\int_a^b \psi_m(x)\,dx \geqslant \int_a^b \psi_{m-1}(x)\,dx + I_m^{nm} - I_{m-1}^{nm} \geqslant$$

$$\geqslant J_{m-1} - (1-2^{-m+1})\,\varepsilon + J_m - 2^{-m}\varepsilon - J_{m-1} = J_m - (1-2^{-m})\,\varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$J_m \leqslant \int_a^b \psi_m(x)\,dx + \varepsilon,$$

и так как ступенчатые функции $\psi_m(x)$ образуют убывающую последовательность, стремящуюся к нулю почти всюду, то, согласно лемме А п. 16, их интегралы также стремятся к нулю; следовательно, $\lim J_m \leqslant \varepsilon$, т. е. $J_m \to 0$, так как ε произвольно. В силу неравенств (25),

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,dx \to 0,$$

что и требовалось доказать.

48. Интегрирование в смысле Лебега как операция, обратная дифференцированию. Рассмотрим, наконец, определение интеграла Лебега, основанное на дифференцировании; аналогичное определение классического интеграла встречается во многих курсах анализа. Такое определение, относящееся, впрочем, лишь к ограниченным функциям и не получившее развития, дано было Лебегом уже в первом издании его книги „Интегрирование и отыскание примитивных функций“: „Ограниченная функция $f(x)$ называется суммируемой, если существует функция $F(x)$, имеющая ограниченные производные числа, для которой $f(x)$ служит производной всюду, за исключением некоторого множества значений x меры нуль. При этом интеграл функции $f(x)$ на интервале (a, b) определяется как $F(b) - F(a)$“. Мы будем пользоваться сходным определением, несколько более общим, которое применимо и к неограниченным функциям.

Заметим здесь, что Данжуа, Хинчин и Перрон[1]) создали чрезвычайно общие теории интегрирования, конечная цель которых состоит в отыскании первообразных по заданным производным. Первые два из упомянутых авторов исходят из понятия интеграла

[1]) Данжуа [2], [3]; Хинчин [1], [2]; Перрон [1].

Лебега, Перрон же определяет интеграл или, точнее говоря, нижний и верхний интегралы функции $f(x)$, рассматривая функции, производные числа которых соответственно меньше или больше заданной функции. Определения, к которым приходят на этом пути, как уже было сказано, являются значительно более общими, чем определение интеграла Лебега. Для некоторых специальных случаев функций это определеиие можно дать совсем просто, используя теорему о существовании производных у монотонных функций и функций ограниченной вариации, доказанную на первых страницах этой книги. Это мы сейчас и сделаем.

Особенно просто это определение в случае неотрицательной $f(x)$: *функция $f(x)\geqslant 0$, заданная на интервале (a, b), называется суммируемой, если существуют функции $F(x)$, для которых $f(x)$ почти всюду служит производной.* Интегралом функции $f(x)$ на интервале (a, b), по определению, будет называться нижняя грань приращений $F(b)-F(a)$ по всем таким функциям $F(x)$. Без труда доказывается, что среди этих последних существует экстремальная фуикция, определеиная с точиостью до постоянного слагаемого, которая играет роль неопределенного интеграла, так как ее приращения минимальны, т. е. представляют собой интегралы, не только на интервале (a, b), но и на всех интервалах, в нем заключенных.

Интегрирование функции, принимающей значения с произвольным знаком, прямо сводится к рассмотренному частному случаю путем представления функции в виде разности двух неотрицательных функций. Соответствующее общее *определение* таково:

Функция $f(x)$ суммируема, если существуют функции с ограниченным изменением $F(x)$, для которых $f(x)$ почти всюду служит производной; неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется та из функций $F(x)$, определенная с точностью до постоянного слагаемого, которая обладает наименьшим полным изменением.

Подробности читатель сможет найти в статье Рисса [19]. Заметим лишь, что, помимо теоремы существования производной у монотонной функции, здесь необходима следующая теорема:

Пусть $g(x)$ — произвольная функция, заданная на интервале (a, b), а $\{G\}$ — множество неубывающих функций $G(x)$, таких, что $G'(x)\geqslant g(x)$ почти всюду. Тогда в множестве $\{G\}$, если оно не пусто, содержится экстремальная функция $G^*(x)$, определенная с точностью до постоянного слагаемого, обладающая тем свойством, что $G^*(d)-G^*(c)\leqslant G(d)-G(c)$ для $a\leqslant c<d\leqslant b$, какова бы ни была функция $G(x)$, принадлежащая множеству $\{G\}$; иначе $G^*(x)$ может быть охарактеризована тем, что все разности вида $G(x)-G^*(x)$ суть неубывающие функции от x.

Все, что было здесь сказано о различных определениях интеграла Лебега, распространяется, с более или менее очевидными изменениями, на функции нескольких переменных[1]).

---

[1]) Бурбаки [1] и Стоун [4] предложили определение интеграла Лебега, которое, так же как и наше, не опирается на теорию меры, но вместо этого использует понятие *верхнего интеграла*, аналогичное понятию внешней меры. Сначала рассматриваются функции $h \geqslant 0$, полунепрерывные снизу; верхний интеграл такой функции h определяется как верхняя грань (конечная или бесконечная) интегралов непрерывных функций g „с компактным носителем" (т. е. равных нулю вне некоторого конечного интервала), удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant g \leqslant h$. Верхний интеграл $N(f)$ произвольной функции $f \geqslant 0$ (конечной или бесконечной) определяется как нижняя грань верхних интегралов функций h, полунепрерывных снизу и удовлетворяющих неравенству $h \geqslant f$; при этом $N(f_1+f_2) \leqslant N(f_1)+N(f_2)$, $N(cf)=cN(f)$ $(c>0)$. Верхний интеграл характеристической функции какого-либо множества e совпадает с внешней мерой этого множества. Для непрерывной функции $f \geqslant 0$ с компактным носителем интеграл $N(f)$ равен интегралу функции f в элементарном смысле. Функция f называется *интегрируемой*, если существует последовательность непрерывных функций $\{g_n\}$ с компактным носителем, такая, что $N(|f-g_n|) \longrightarrow 0$. При этом интегралы функций g_n стремятся к определенному пределу, не зависящему от выбора последовательности $\{g_n\}$; этот предел и называется *интегралом* функции f.