Глава III

ИНТЕГРАЛ СТИЛЬТЬЕСА И ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

49. Интеграл Стильтьеса. Пусть на интервале $a \leqslant x \leqslant b$ заданы непрерывная функция $f(x)$ и неубывающая функция $\alpha(x)$; интеграл Стильтьеса функции f по функции α обозначается

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b f(x)\,d\alpha(x) \tag{1}$$

и определяется как предел сумм

$$\Sigma = \sum_1^n f(\xi_k)\left[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})\right] \tag{2}$$

$$(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k)$$

при $\max(x_k - x_{k-1}) \to 0$. Иначе интеграл (1) можно определить, взяв интеграл (в том смысле, как это было определено в п. 10) многозначной аддитивной функции интервала

$$f(c,\ d) = f(\xi)\left[\alpha(d) - \alpha(c)\right] \quad (c \leqslant \xi \leqslant d)$$

или ее верхний и нижний интегралы, которые в данном случае совпадают, в чем можно убедиться обычным путем.

Вместо того чтобы быть неубывающей, функция $\alpha(x)$ может иметь ограниченное изменение; интеграл (1) можно тогда определить, представив $\alpha(x)$ в виде разности неопределенного положительного и неопределенного отрицательного изменений. Так же непосредственно обобщается интеграл Стильтьеса на случай комплексной непрерывной функции $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ и комплексной функции с ограниченным изменением $\alpha(x) = \alpha_1(x) + i\alpha_2(x)$ (см. п. 15); он определяется как соответствующая линейная комбинация интегралов

$$\int_a^b f_j(x)\,d\alpha_k(x) \quad (j,\ k = 1,\ 2).$$

Интеграл Стильтьеса играет исключительно важную роль в анализе, механике, математической физике и теории вероятностей; в частности, он употребляется в теории криволинейных и кратных интегралов, в теории моментов и в теории потенциала. Сам Стильтьес воспользовался этим понятием в 1894 г., занимаясь непрерывными дробями в связи с так называемой проблемой моментов [1]). Спустя пятнадцать лет, когда интегралом Стильтьеса почти перестали интересоваться, одному из нас удалось привлечь всеобщее внимание к этому понятию, установив тесную связь между ним и линейными функционалами в пространстве непрерывных функций, заданных на некотором конечном интервале.

50. Линейные функционалы в пространстве C. Обозначим буквой C совокупность непрерывных действительных функций, заданных на интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Операция, ставящая в соответствие всякому элементу f из C действительное число Af, называется *линейным функционалом*, если она

1) *аддитивна*: $A(f_1+f_2)=Af_1+Af_2$;
2) *однородна*: $A(cf)=cAf$;
3) *ограничена*: существует постоянная M, такая, что

$$|Af| \leqslant M \cdot \max |f(x)|.$$

Наименьшее из таких чисел M называется *нормой линейного функционала* A и обозначается M_A или $\|A\|$. Если условиться обозначать

$$\|f\| = \max \cdot |f(x)|$$

и называть это число *нормой функции* f, то мы получим полную аналогию с введенными выше линейными функционалами в пространствах L^p.

Впрочем, между теми и другими есть существенное различие. Только что определенные функционалы заданы лишь на непрерывных функциях, и a priori неизвестно, можно ли распространить их на более широкий класс функций. Далее, они, вообще говоря, не могут быть представлены посредством интегралов в том виде, как это было в п. 36; так, например, функционал $Af = f(x_0)$, где x_0 — некоторая фиксированная точка, может быть представлен только посредством интеграла Стильтьеса (1) с функцией $\alpha(x)$, равной 0 при $x < x_0$ и равной 1 при $x > x_0$ (значение $\alpha(x_0)$ может быть задано произвольно).

Для того чтобы рассмотреть во всей общности задачу представления линейного функционала в пространстве C, заметим сначала, что интеграл (1) с фиксированной функцией $\alpha(x)$ с ограниченным изменением определяет линейный функционал такого вида. В самом деле, суммы (2) удовлетворяют неравенству

$$|\Sigma| \leqslant \max |f| \times \textit{полное изменение } \alpha,$$

[1]) Стильтьес [1] (в частности, стр. 68—76).

из которого, перейдя к пределу, получим

$$\left|\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)\right| \leqslant \max|f| \times \textit{полное изменение } \alpha.$$

Таким образом, этот функционал ограничен; его аддитивность и однородность очевидны.

Оставим пока в стороне вопрос, при каких условиях интеграл (1) может быть представлен в виде обычного интеграла от произведения как, например, функционал в пространстве L^2, и займемся доказательством того, что всякий линейный фуикционал в пространстве C выражается интегралом Стильтьеса.

Основная мысль доказательства состоит в том, что функционал A распространяется на более широкий класс функций. Осуществлено это будет примерно таким же способом, каким интеграл, определенный на ступенчатых функциях, переносится на суммируемые функции.

Рассмотрим последовательность непрерывных функций $f_n(x)$, возрастающую и ограниченную и, следовательно, сходящуюся к некоторой ограниченной функции $f(x)$. Последовательность значений Af_n будет при этом также сходиться. В самом деле, частичные суммы ряда

$$|Af_2-Af_1|+|Af_3-Af_2|+\ldots \tag{3}$$

представляют собой значения функционала A на соответствующих частичных суммах ряда

$$\pm[f_2(x)-f_1(x)]\pm[f_3(x)-f_2(x)]\pm\ldots$$

при должном выборе знаков. Но такие суммы по абсолютной величине не превосходят

$$[f_2(x)-f_1(x)]+[f_3(x)-f_2(x)]+\ldots=f(x)-f_1(x)$$

и, следовательно, не превосходят некоторой постоянной B. Итак, все частичные суммы ряда (3) не превосходят BM_A. Отсюда следует, что ряд

$$Af_1+(Af_2-Af_1)+(Af_3-Af_2)+\ldots$$

сходится абсолютно. Поэтому значения Af_n, равные частичным суммам этого ряда, сходятся к определенному пределу Af.

Припишем это число Af функционалу A в качестве значения, соответствующего функции f, которая может и не быть непрерывной. Чтобы оправдать такое соглашение, нужно прежде всего показать, что если две возрастающие последовательности непрерывных функций $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ сходятся к одной и той же функции f, то последовательности $\{Af_n\}$ и $\{Ag_n\}$ также имеют одинаковые пределы. Не ограничивая общности, можно предположить, что обе последовательности возрастают в строгом смысле этого слова, т. е.

$f_n < f_{n+1}$ и $g_n < g_{n+1}$, так как в противном случае мы взяли бы последовательности $\left\{f_n - \frac{1}{n}\right\}$ и $\left\{g_n - \frac{1}{n}\right\}$. Возьмем какой-нибудь элемент f_m с фиксированным номером; тогда для достаточно больших значений n будет выполняться неравенство $f_m < g_n$. В самом деле, если бы это было неверно, то множества точек x, в которых выполняются соответственно неравенства $f_m(x) \geqslant g_1(x)$, $f_m(x) \geqslant g_2(x)$, ..., образовывали бы убывающую последовательность и, будучи замкнутыми, имели бы непустое пересечение; в точке x^*, принадлежащей этому пересечению, выполнялись бы соотношения $f_m(x^*) \geqslant \lim g_n(x^*) = f(x^*)$, которые противоречат неравенству $f_m < f$. Точно так же для любой функции g_m неравенства $g_m < f_n$ будут выполняться при всех достаточно больших n. Можно, следовательно, образовать последовательность $f_{m_1} < g_{m_2} < f_{m_3} < g_{m_4} < \ldots$, стремящуюся к f, причем соответствующие значения функционала A также должны сходиться. Предел этих последних должен совпадать как с пределом Af_n, так и с пределом Ag_n, т. е. Af_n и Ag_n имеют один и тот же предел.

Итак, функционал A определен однозначно на всех ограниченных функциях, являющихся пределами возрастающих последовательностей непрерывных функций. При этом, если f и g — две функции такого типа, то и $f+g$ является функцией такого типа и $A(f+g) = Af + Ag$. Что же касается их разности $f-g$, то она, вообще говоря, не является пределом возрастающей последовательности непрерывных функций. Для $f-g$ положим, по определению,

$$A(f-g) = Af - Ag.$$

Теперь, так же как в случае интеграла Лебега, для того чтобы оправдать это определение, достаточно заметить, что из $f-g = f_1 - g_1$ вытекает равенство $f + g_1 = f_1 + g$, приводящее к соотношениям

$$Af + Ag_1 = A(f+g_1) = A(f_1+g) = Af_1 + Ag,$$

из которых следует, что $Af - Ag = Af_1 - Ag_1$. Таким образом, функционал A оказывается однозначно определенным на функциях типа $f-g$.

Очевидно, что функционал A, продолженный таким образом, остается аддитивным и однородным; покажем, что он остается также ограниченным. Говоря точнее, мы покажем, что

$$|A(f-g)| \leqslant M_A \cdot \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|.$$

Обозначим эту верхнюю грань μ и возьмем возрастающие последовательности непрерывных функций $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$, стремящиеся соответственно к f и g. Возьмем вспомогательные функции h_n, положив

$$h_n(x) = f_n(x) \quad \text{при} \quad |f_n(x) - g_n(x)| \leqslant \mu,$$
$$h_n(x) = g_n(x) + \mu \quad \text{при} \quad f_n(x) - g_n(x) > \mu,$$
$$h_n(x) = g_n(x) - \mu \quad \text{при} \quad f_n(x) - g_n(x) < -\mu.$$

Функции $h_n(x)$, очевидно, непрерывны и образуют возрастающую последовательность, стремящуюся к f. Далее, так как

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |h_n(x) - g_n(x)| \leqslant \mu,$$

то

$$|A(f-g)| = |\lim (Ah_n - Ag_n)| = \lim |A(h_n - g_n)| \leqslant M_A \mu,$$

что и требовалось доказать.

Нам нет нужды подробно изучать класс функций, на который мы распространили функционал A. Достаточно заметить, что этот класс охватывает все непрерывные функции и некоторые разрывные, о которых речь будет идти ниже, и обладает тем свойством, что одновременно с любыми своими элементами $f_1, f_2, \ldots, f_n$ он содержит все их линейные комбинации. Пусть $f_{c,d}$ — характеристическая функция замкнутого интервала $c \leqslant x \leqslant d$[1]). Она принадлежит рассматриваемому классу, так как является пределом убывающей последовательности непрерывных функций, равных нулю вне интервалов $\left(c - \frac{1}{n}, d + \frac{1}{n}\right)$, равных 1 на (c, d) и линейных на остальных двух интервалах.

Имея характеристические функции $f_{c,d}$, мы можем прежде всего задать функцию $\alpha(x)$, о которой говорится в нашем утверждении. Положим $\alpha(a) = 0$, а при $a < x \leqslant b$

$$\alpha(x) = Af_{a,x}.$$

Покажем, что $\alpha(x)$ представляет собой функцию *с ограниченным изменением* и что ее полное изменение не превосходит M_A. Действительно, возьмем какое-нибудь разбиение интервала (a, b) и рассмотрим сумму

$$\sum_1^n |\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})|.$$

Эта сумма равна, очевидно, значению функционала A, отвечающему функции

$$f(x) = \varepsilon_1 f_{a, x_1}(x) + \sum_2^n \varepsilon_k [f_{a, x_k}(x) - f_{a, x_{k-1}}(x)],$$

где $\varepsilon_k = \operatorname{sgn}[\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})]$. Будучи линейной комбинацией функ-

[1]) В частности, $f_{c,c}$ представляет собой функцию, равную 1 в точке c и равную нулю во всех других точках.

ций f_{a,x_k}, $f(x)$ принадлежит рассматриваемому классу. Ее абсолютная величина не превосходит 1, поэтому

$$\sum_1^n |\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})| = Af \leqslant M_A.$$

Верхняя грань таких сумм, т. е. полное изменение функции $\alpha(x)$, также не превосходит M_A.

Пусть теперь $f(x)$ — какая-нибудь непрерывная функция. Возьмем разбиение интервала (a, b), выберем в каждом частичном интервале $I_k=(x_{k-1}, x_k)$ точку ξ_k и определим функцию $\varphi(x)$ следующим образом: $\varphi(a)=f(\xi_1)$, а на каждом интервале $x_{k-1} < x \leqslant x_k$ она постоянна и равна $f(\xi_k)$. Функцию $\varphi(x)$ можно, очевидно, записать в виде

$$\varphi(x) = f(\xi_1) f_{a,x_1}(x) + \sum_2^n f(\xi_k)\left[f_{a,x_k}(x) - f_{a,x_{k-1}}(x)\right],$$

откуда следует, что

$$A\varphi = f(\xi_1)\alpha(x_1) + \sum_2^n f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})]$$

и, так как $\alpha(x_0)=\alpha(a)=0$,

$$A\varphi = \sum_1^n f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})].$$

В правой части последнего равенства стоит сумма (2), пределом которой служит интеграл (1). Если ω — наибольшее из колебаний функции $f(x)$ на интервалах I_k, то $|f(x)-\varphi(x)| \leqslant \omega$, откуда вытекает неравенство

$$|Af - A\varphi| = |A(f-\varphi)| \leqslant \omega M_A.$$

При $\max(x_k - x_{k-1}) \to 0$ будем иметь $\omega \to 0$ и, следовательно, $A\varphi \to Af$. Таким образом, Af служит пределом выражения (2) и Af совпадает с интегралом (1), что и требовалось доказать. Отсюда следует, в частности, что норма функционала A не превосходит полного изменения функции $\alpha(x)$, а так как выше было установлено противоположное неравенство, то

полное изменение $\alpha = M_A$.

Итак, доказана следующая

Теорема. *Интеграл Стильтьеса*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$$

при фиксированной функции $\alpha(x)$ с ограниченным изменением определяет некоторый линейный функционал в пространстве C не-

прерывных функций и, обратно, всякий линейный функционал в пространстве C может быть представлен в виде такого интеграла.

Эта теорема справедлива и в пространстве *комплексных* непрерывных функций с тем же определением нормы $\|f\| = \max|f(x)|$. Разумеется, в этом случае линейный функционал A и соответствующая функция с ограниченным изменением $\alpha(x)$ могут принимать комплексные значения, и в самом определении линейного функционала нужно требовать, чтобы равенство $A(cf) = cAf$ выполнялось для любых комплексных чисел c. В доказательстве теоремы вместо знаков $\pm$ пришлось бы в этом случае оперировать с соответствующими комплексными множителями, модули которых равны 1.

51. Единственность производящей функции. Несколько более подробное исследование показывает, что линейный функционал A определяет функцию $\alpha(x)$ в ее точках непрерывности однозначно с точностью до постоянного слагаемого. Действительно, вопрос о единственности функции $\alpha(x)$ прямо сводится к следующему: *каковы те функции с ограниченным изменением $\alpha(x)$, для которых*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = 0$$

при любом выборе непрерывной функции $f(x)$?

Чтобы ответить на этот вопрос, возьмем какую-нибудь точку непрерывности d функции $\alpha(x)$, лежащую внутри интервала (a, b), и выберем в качестве $f(x)$ непрерывную функцию, равную 1 в интервале (a, d), равную нулю в интервале $\left(d+\frac{1}{n},\ b\right)$ и линейную между d и $d+\frac{1}{n}$. Наш интеграл разобьется на три слагаемых, соответствующих интервалам $a \leqslant x \leqslant d$, $d \leqslant x \leqslant d+\frac{1}{n}$ и $d+\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant b$; из этих трех слагаемых первое равно $\alpha(d)-\alpha(a)$, третье равно нулю, а второе по абсолютной величине не превосходит полного изменения функции $\alpha(x)$ на соответствующем интервале $d \leqslant x \leqslant d+\frac{1}{n}$ и, следовательно, стремится к нулю вместе с $\frac{1}{n}$. Таким образом, $\alpha(d)-\alpha(a) = 0$, т. е. $\alpha(d) = \alpha(a)$ в любой точке d внутри интервала (a, b), в которой $\alpha(x)$ непрерывна. Положив $f(x) \equiv 1$, мы обнаружим, что $\alpha(b) = \alpha(a)$, даже если b не является точкой непрерывности.

Таким образом, *если интеграл $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$ равен нулю, какова бы ни была непрерывная функция $f(x)$, то функция $\alpha(x)$ прини-*

мает постоянное значение, совпадающее с $\alpha(a)$ *и* $\alpha(b)$, *во всех своих точках непрерывности.*

Высказанное условие вместе с тем и достаточно для того, чтобы такой интеграл обращался в нуль, так как точки разрыва функции $\alpha(x)$ образуют счетное множество, следовательно, точки непрерывности расположены на интервале (a, b) всюду плотно, и интеграл можно получить как предел сумм (2), в которых все x_k попадают в точки непрерывности.

Итак, полученный результат может быть сформулирован следующим образом:

Теорема. *Для того чтобы интеграл*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$$

обращался в нуль при любом выборе элемента $f(x)$ *пространства* C, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $\alpha(x)$ *была постоянна на каком-либо множестве, всюду плотном на интервале* (a, b) *и содержащем концы этого интервала.*

Что касается точек разрыва, то в них удобно полагать $\alpha(x)$ равной либо $\alpha(x \pm 0)$, либо среднему арифметическому этих пределов; во всех этих случаях и вообще *тогда, когда* $\alpha(x)$ *всюду заключено между* $\alpha(x-0)$ *и* $\alpha(x+0)$, *полное изменение функции* $\alpha(x)$ *равно норме* M_A *соответствующего функционала* A.

В самом деле, это верно при условии, что производящая функция выбрана так, как указано в предыдущем пункте, а в силу доказанного свойства единственности,— и при любой $\alpha(x)$, порождающей данный функционал.

52. Продолжение линейного функционала. Займемся теперь одной смежной задачей, аналогичной той, которая была решена выше для случая пространства L^2. Предположим, что линейный функционал задан лишь на некотором подмножестве E (действительного) пространства C. Можно ли продолжить его на все пространство C так, чтобы получить линейный функционал A с нормой $M_A \leqslant M$, где M — некоторая заданная постоянная?

Очевидное необходимое условие состоит в том, что для всех линейных комбинаций элементов f_k из E должно выполняться неравенство

$$\left|\sum_1^n c_k A f_k\right| \leqslant M \left\|\sum_1^n c_k f_k\right\|. \tag{4}$$

Мы покажем, что это условие является достаточным, причем норма M_A оказывается равной нижней грани чисел M, при которых неравенство (4) выполняется. Для этого мы воспользуемся одной идеей, принадлежащей Хелли (см. его заметку [1]), которая применима также к линейным функционалам в пространствах L^p и даже, как показали Хан и Банах [1]), в пространствах гораздо более общего вида. Для упрощения записи положим $M=1$, что не нарушит общности рассуждений.

Прежде всего определим функционал A на множестве линейных комбинаций элементов, принадлежащих E: если $g=\sum_1^n c_k f_k$, где f_k — элементы множества E, то

$$Ag=\sum_1^n c_k A f_k.$$

Это определение не зависит от представления элемента g, т. е. если $\sum_1^n c_k f_k=\sum_1^n c'_k f_k$, то

$$\sum_1^n c_k A f_k=\sum_1^n c'_k A f_k,$$

или, иначе говоря, если $\sum_1^n c''_k f_k=0$ (где $c''_k=c_k-c'_k$), то

$$\sum_1^n c''_k A f_k=0.$$

В такой форме это утверждение прямо следует из условия (4).

Эти линейные комбинации g образуют некоторое линейное многообразие E', и функционал A, продолженный указанным образом на E', оказывается, очевидно, аддитивным, однородным и, в силу условия (4), ограниченным, причем соответствующая постоянная M равна 1.

Определим теперь функционал A вне множества E'.

Пусть g_1 и g_2 — какие-либо два элемента из E', Ag_1 и Ag_2 — соответствующие значения функционала A, а f — произвольный элемент пространства C, не принадлежащий множеству E'. Так как

$$Ag_1-Ag_2=A(g_1-g_2)\leqslant\|g_1-g_2\|\leqslant\|g_1-f\|+\|g_2-f\|,$$

то

$$Ag_1-\|g_1-f\|\leqslant Ag_2+\|g_2-f\|,$$

и мы видим, что при фиксированном f множества чисел вида

$$Ag-\|f-g\| \quad \text{и} \quad Ag+\|f-g\|$$

при всевозможных g из E' таковы, что первое лежит целиком левее второго, и потому найдется по меньшей мере одно число, „разделяющее“ оба эти множества. Положим Af равным одному

[1]) Хан [3] (в частности, стр. 217); Банах [1] и [3] (гл. IV, § 2). См. также М. Рисс [1].

из этих чисел; тогда для любого элемента g из E' будем иметь

$$Ag - \|f-g\| \leqslant Af \leqslant Ag + \|f-g\|.$$

Взяв $-g$ вместо g (что допустимо, так как E' представляет собой линейное множество), получим неравенство

$$|Af + Ag| \leqslant \|f+g\|. \tag{5}$$

Для элементов вида $cf+g$ определим значения функционала A посредством равенства

$$A(cf+g) = cAf + Ag.$$

При этом должно выполняться неравенство

$$|A(cf+g)| \leqslant \|cf+g\|;$$

в самом деле, при $c=0$ это неравенство есть не что иное, как условие (4), а при $c \neq 0$ оно следует из неравенства (5), если вместо g взять $\frac{1}{c}g$:

$$|A(cf+g)| = |cAf + Ag| = |c|\left|Af + A\frac{g}{c}\right| \leqslant |c|\left\|f+\frac{g}{c}\right\| = \|cf+g\|.$$

Итак, условие (4) выполняется также на линейном множестве E'', образованном линейными комбинациями элемента f и всевозможных элементов g из E'; аддитивность и однородность функционала A на E'' очевидна.

Теперь остается в качестве f взять последовательно такие функции (например, $1, x, x^2, \ldots$), линейные комбинации которых совместно с элементами множества E всюду плотны в C в смысле равномерной сходимости. Функционал A будет определен на всем этом множестве (с тем же значением $M=1$); на все пространство он распространяется с помощью очевидного предельного перехода.

Итак, доказана следующая

Теорема. *Для того чтобы функционал A, определенный на некотором множестве E в пространстве C, мог быть продолжен на все пространство C как линейный функционал с нормой $\leqslant M$, необходимо и достаточно, чтобы для любой линейной комбинации $\sum_1^n c_k f_k$ элементов из E выполнялось неравенство*

$$\left|\sum_1^n c_k A f_k\right| \leqslant M \left\|\sum_1^n c_k f_k\right\|.$$

Эта теорема справедлива также в пространстве *комплексных* непрерывных функций. Условие (4) формулируется в этом случае для любых комплексных коэффициентов c_k. Необходимость его очевидна, достаточность же может быть доказана путем сведения к действительному случаю следующим образом[1]).

---

[1]) См. Боненблюст и Собчик [1]; Сухомлинов [1].

Функционал A продолжается сначала на линейное множество E', образованное всевозможными линейными комбинациями элементов из E с комплексными коэффициентами; делается это так же, как в действительном случае. На множестве E' функционал A однороден, причем за знак A выносится в рассматриваемом случае любой комплексный множитель; в частности, $A(ig)=iAg$, где g — произвольный элемент множества E'. Действительную часть числа Ag обозначим A_1g; функционал A_1 также будет удовлетворять условию (4), если множителям c_k придавать лишь *действительные* значения. Так же, как в действительном случае, функционал A_1, принимающий лишь действительные значения, продолжается на все пространство $C_{\text{компл.}}$. Будучи так продолжен, функционал A_1 оказывается аддитивным, однородным (относительно умножения на *действительные* числа) и ограниченным при том же значении M. Покажем теперь, что

$$Bf=A_1f-iA_1(if)$$

служит искомым продолжением функционала A.

Для этого надо показать, что функционал B *аддитивен, однороден* относительно умножения на *комплексные* числа, ограничен, причем его норма не превосходит M, и, наконец, что он совпадает с A на множестве E'. Аддитивность прямо следует из аддитивности функционала A_1. Доказательство однородности требует некоторого подсчета. Пусть $c=a+ib$ — любое комплексное число; тогда

$$\begin{aligned}B(cf)=A_1(af+bif)-iA_1(aif-bf)=aA_1f+bA_1(if)-iaA_1(if)+\\+ibA_1f=(a+ib)(A_1f-iA_1(if))=cBf;\end{aligned}$$

при этом мы воспользовались аддитивностью функционала A_1 и его однородностью относительно умножения на действительные числа. Чтобы показать, что функционал B ограничен, положим для произвольного фиксированного элемента f

$$Bf=re^{it}\quad (r\geqslant 0),$$

откуда будем иметь

$$|Bf|=e^{-it}Bf=B(e^{-it}f)=A_1(e^{-it}f)\leqslant M\|e^{-it}f\|=M\|f\|.$$

(Третье равенство в этой цепочке оправдывается тем, что $B(e^{-it}f)$, будучи равно r, представляет собой действительное число.) Наконец, для того чтобы показать, что $Bg=Ag$ для любого элемента g из E', заметим, что $-A_1(ig)$, по определению, равно действительной части числа $-A(ig)=-iAg$ и, следовательно, мнимой части Ag; таким образом,

$$Ag=A_1g-iA_1(ig),$$

и доказательство на этом заканчивается.

53. Теорема о приближении. Проблема моментов. Отметим одно интересное следствие предыдущей теоремы. Возьмем в качестве E множество, состоящее из какого-либо множества E_0 в пространстве C и произвольного элемента f_0, не принадлежащего E_0. Пусть A — линейный функционал, равный нулю на множестве E_0 и такой, что $Af_0 = 1$. Так как линейные комбинации элементов из E записываются с точностью до постоянного множителя в виде $f_0 - g$, где g — линейная комбинация элементов из E_0, то условие (4) примет в этом случае вид

$$1 \leqslant M_A \| f_0 - g \|.$$

Пусть d — нижняя грань значений $\| f_0 - g \|$, иначе говоря, „расстояние" от f_0 до линейного многообразия, натянутого на E_0; тогда, в силу предыдущего неравенства, справедливого для всех g указанного вида, $M_A \geqslant \frac{1}{d}$. Итак, установлена

Теорема[1]). *Пусть в пространстве C даны множество E_0 и некоторый элемент f. Для того чтобы f мог быть равномерно приближен с точностью до d линейными комбинациями элементов из E_0, необходимо и достаточно, чтобы всякий линейный функционал A, равный нулю на E_0 и такой, что $Af = 1$, имел норму $\geqslant \frac{1}{d}$. В частности, для того чтобы любой элемент f пространства C мог быть с любой степенью точности равномерно приближен такими линейными комбинациями, необходимо и достаточно, чтобы единственным функционалом, равным нулю на множестве E_0, был функционал, тождественно равный нулю; иначе это условие можно сформулировать, сказав, что не существует функции $\alpha(x)$ с ограниченным изменением, для которой интеграл*

$$\int_a^b g(x)\, d\alpha(x)$$

был бы отличен от нуля при каком-нибудь g из пространства C, но равнялся бы нулю при любом g из E_0.

Теорема, установленная в предыдущем пункте, дает также решение следующей задачи: найти функцию $\alpha(x)$ с ограниченным изменением, заданную на интервале (a, b), некоторые „моменты" которой

$$\mu_n = \int_a^b f_n(x)\, d\alpha(x) \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

имеют наперед заданные значения; $f_n(x)$ представляют собой заданные непрерывные функции. В частности, при $f_n(x) = x^n$ мы

[1]) Рисс [4], [4а].

имеем моменты распределения масс или зарядов в том смысле, как они определяются в физике.

Если множество заданных $f_n(x)$ обозначить E, то задача сведется к отысканию ограниченного линейного функционала A в пространстве C непрерывных функций на интервале (a, b), принимающего на E заданные значения μ_n. Учитывая, что норма функционала A равна полному изменению производящей функции $\alpha(x)$, мы приходим к следующему результату:

Теорема. *Для того чтобы рассматриваемая „проблема моментов" допускала в качестве решения функцию $\alpha(x)$ с полным изменением, не превосходящим M, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} c_k\mu_k\right| \leqslant M\cdot\max_x\left|\sum_{k=0}^{n} c_k f_k(x)\right|,$$

каковы бы ни были целое число n и числа c_k (действительные или комплексные в зависимости от того, действительны или комплексны рассматриваемые функции и моменты).

В действительном случае это условие выполняется, в частности, тогда, когда одна из функций — пусть это будет $f_0(x)$ — равна 1 и сама проблема — *положительного типа*, т. е. $\sum c_k\mu_k \geqslant 0$, коль скоро $\sum c_k f_k(x) \geqslant 0$. В самом деле, в этом случае для произвольной линейной комбинации $h(x) = \sum c_k f_k(x)$

$$\|h\| f_0(x) \pm h(x) \geqslant 0$$

и, следовательно,

$$\|h\|\mu_0 \pm \sum c_k\mu_k \geqslant 0,$$

откуда вытекает, что

$$\left|\sum c_k\mu_k\right| \leqslant \mu_0\|h\|.$$

Кроме того, в этом случае решение $\alpha(x)$ — *неубывающее*, что следует, с одной стороны, из соотношения

$$\mu_0 = \int_a^b f_0(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b d\alpha(x),$$

а с другой стороны, из того, что полное изменение функции $\alpha(x)$ не превосходит μ_0.

Рассмотрим в качестве примера *тригонометрическую проблему моментов* [1])

$$\mu_n = \int_0^{2\pi} e^{inx}\,d\alpha(x) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

[1]) Рисс [4а]; Герглотц [1].

где $\mu_{-n}=\overline{\mu}_n$, или эквивалентную ей „действительную" проблему

$$x_n=\frac{1}{2}(\mu_n+\mu_{-n})=\int_0^{2\pi}\cos nx\,d\alpha(x)\qquad(n=0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

$$\sigma_n=\frac{1}{2i}(\mu_n-\mu_{-n})=\int_0^{2\pi}\sin nx\,d\alpha(x)\qquad(n=1,\,2,\,\ldots).$$

Для того чтобы эта проблема имела неубывающее решение $\alpha(x)$, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\mu_n\}$ $(n=0,\,\pm 1,\,\ldots)$ была *положительно определенной*, т. е. чтобы при любом целом N и при любых комплексных ρ_n выполнялось неравенство

$$\sum_{m,\,n=-N}^{N}\mu_{n-m}\rho_n\overline{\rho}_m\geqslant 0. \tag{6}$$

В самом деле, такая двойная сумма равна

$$\int_0^{2\pi}\sum_{m,\,n=-N}^{N}e^{i(n-m)x}\rho_n\overline{\rho}_m\,d\alpha(x)=\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=-N}^{N}e^{inx}\rho_n\right|^2 d\alpha(x)\geqslant 0.$$

Условие (6) также и достаточно. В самом деле, при выполнении условия (6) мы имеем проблему положительного типа, т. е., каков бы ни был положительный тригонометрический многочлен

$$t(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}\geqslant 0,$$

непременно выполняется неравенство

$$\sum_{k=-n}^{n}c_k\mu_k\geqslant 0.$$

Чтобы это обнаружить, можно воспользоваться леммой Фейера и Рисса [1]), которая утверждает, что *всякий тригонометрический многочлен* $t(x)\geqslant 0$ *может быть представлен в виде квадрата модуля некоторого другого тригонометрического многочлена* $q(x)$ *с комплексными, вообще говоря, коэффициентами:*

$$t(x)=|q(x)|^2=\left|\sum_j\rho_je^{ijx}\right|^2=\sum_{j,\,k}\rho_j\overline{\rho}_ke^{i(j-k)x}.$$

---

[1]) См. Фейер [1]. Если действительную и мнимую части многочлена $q(x)$ обозначим $u(x)$ и $v(x)$, то получим представление $q(x)$ в виде суммы квадратов двух *действительных* многочленов

$$t(x)=u^2(x)+v^2(x);$$

Из этого представления вытекает, что

$$At=\sum_{j,k}\rho_j\bar{\rho}_k\mu_{j-k}$$

и, в силу (6),

$$At\geqslant 0.$$

Упомянутую здесь лемму достаточно доказать для многочленов, положительных в строгом смысле слова, так как в общем случае можно к $t(x)$ прибавить $\varepsilon>0$, а затем перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$. Итак, пусть

$$t(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}>0.$$

Заметим сначала, что $c_k=\bar{c}_{-k}$ и все c_n можно считать отличными от нуля. Многочлен

$$P(z)=c_{-n}+c_{-n+1}z+\ldots+c_nz^{2n}$$

удовлетворяет, очевидно, соотношению

$$P(z)=z^{2n}\overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}. \tag{7}$$

Далее, так как

$$e^{-inx}P(e^{ix})=t(x),$$

то $P(z)$ не может иметь нулей на окружности $|z|=1$. Нули, лежащие внутри и вне единичной окружности, обозначим соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и $\beta_1, \beta_2\ldots$. Кратности их пусть будут соответственно $r_1, r_2\ldots$ и $s_1, s_2, \ldots$. Тогда справедливо разложение

$$P(z)=c\prod_k(z-\alpha_k)^{r_k}z^S\prod_j\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\beta_j}\right)^{s_j},$$

где $S=\sum s_j$. Соотношение (7) показывает, что если β — какой-нибудь нуль, лежащий вне единичной окружности, то $\alpha=\frac{1}{\bar{\beta}}$ представляет собой нуль, лежащий внутри этой окружности, причем той же кратности, и наоборот. Следовательно, все нули можно занумеровать так, чтобы выполнялось равенство $\beta_k=\frac{1}{\bar{\alpha}_k}$; при этом $r_k=s_k$ и

$$S=\sum s_k=\sum r_k=\frac{1}{2}\sum(s_k+r_k)=n.$$

Таким образом,

$$t(x)=e^{-inx}P(e^{ix})=c\prod_k(e^{ix}-\alpha_k)^{r_k}\prod_k(e^{-ix}-\bar{\alpha}_k)^{r_k}.$$

Множитель c при этом положителен, и

$$q(x)=\sqrt{c}\prod_k (e^{ix}-\alpha_k)^{r_k}$$

является искомым многочленом.

54. Интегрирование по частям. Вторая теорема о среднем. Среди правил, которым подчиняется интеграл Стильтьеса, в большинстве своем аиалогичных классическим правилам и справедливых также для интеграла Лебега, есть некоторые, заслуживающие особого упомииания. Таковы, в частности, формула интегрирования по частям и некоторые ее следствия.

Формула эта записывается так:

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)+\int_a^b \alpha(x)\,df(x)=[f(x)\,\alpha(x)]_a^b.$$

Интересна она тем, что для ее доказательства достаточно предположить существование хотя бы одного из интегралов в левой части. При этом предположении она вытекает из тождества

$$\sum_0^n \alpha(\xi_i)\,[f(x_{i+1})-f(x_i)]=[\alpha(x)\,f(x)]_a^b-\sum_0^{n+1} f(x_i)\,[\alpha(\xi_i)-\alpha(\xi_{i-1})],$$

где $\xi_{-1}=x_0=a$ и $\xi_{n+1}=x_{n+1}=b$.

В частности, если $f(x)$ непрерывна, а $\alpha(x)$ имеет ограниченное изменение, то прн этом оказывается обеспеченным существование интеграла функции $\alpha(x)$ по $f(x)$. Рассмотрим еще более частный случай, когда $\alpha(x)$ *монотонная*, для определенности неубывающая функция, а вместо $f(x)$ (относнтельно которой достаточно предположить, что она суммируема в смысле Лебега) возьмем ее неопределенный интеграл

$$F(x)=\int_a^x f(\xi)\,d\xi.$$

Заметив, что значение интеграла

$$\int_a^b F(x)\,d\alpha(x)$$

заключено между наибольшим и наименьшим значениями функции $F(x)$, помноженными на $\alpha(b)-\alpha(a)$, мы сможем записать этот иитеграл в виде

$$F(\xi)\,[\alpha(b)-\alpha(a)]=[\alpha(b)-\alpha(a)]\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

С другой стороны, как будет показано ниже (п. 57), даже при более слабых предположениях

$$\int_a^b \alpha(x)\,dF(x)=\int_a^b \alpha(x) f(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$\int_a^b \alpha(x) f(x)\,dx=\alpha(b)\int_a^b f(x)\,dx-[\alpha(b)-\alpha(a)]\int_a^\xi f(x)\,dx,$$

откуда вытекает, что

$$\int_a^b \alpha(x) f(x)\,dx=\alpha(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+\alpha(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Эта формула выражает *вторую теорему о среднем.*

55. Последовательиости фуикционалов. Приведем еще одно следствие правила интегрирования по частям, в котором, впрочем, это правило играет лишь второстепенную роль. Рассмотрим последовательность линейных функционалов $\{A_n\}$ или, что эквивалентно, последовательность соответствующих им функций с ограниченым изменением $\{\alpha_n(x)\}$; допустим, что $\alpha_n(a)=0$. При каких условиях последовательность $A_n f$ для любой непрерывной функции $f(x)$ сходится к функционалу Af с заданной производящей функцией $\alpha(x)$?

Одно из необходимых условий устанавливается слово в слово так же, как и в случае пространства L^2; оно состоит в том, что нормы M_{A_n} должиы быть ограничены.

Это условие, очевидно, и достаточно, если известно, что соотношение $A_n f\to Af$ имеет место на некотором полном множестве в пространстве C, т. е. иа множестве функций, линейиые комбинации которых всюду плотиы в C в смысле равномерной сходимости. В самом деле, пусть f — произвольный элемент пространства C; фиксируем какое-нибудь $\varepsilon>0$ и выберем такую линейную комбинацию $g=\sum_1^m c_k f_k$ элементов упомянутого множества, для которой $\|f-g\|<\varepsilon$. Так как, согласио предположению, при $n\to\infty$

$$A_n g=\sum_{k=1}^m c_k A_n f_k\to\sum_{k=1}^n c_k A f_k=Ag,$$

то для достаточно больших n будет выполняться неравенство $|Ag-A_n g|<\varepsilon$. Тогда, если B — верхняя грань норм функционалов A_n, то

$$|Af-A_n f|\leqslant|A(f-g)|+|Ag-A_n g|+|A_n(g-f)|\leqslant M_A\varepsilon+\varepsilon+B\varepsilon,$$

и наше утверждение доказано.

Для того чтобы наше условие выразить достаточно просто в терминах производящих функций $\alpha_n(x)$ и $\alpha(x)$, следует выбрать специальным образом полное множество. В качестве такового возьмем множество, состоящее из функции, тождественно равной 1, и положительных частей функций $\xi - x$, где параметр ξ может пробегать интервал (a, b), т. е. из функций $f(x; \xi)$, равных $\xi - x$ при $x \leqslant \xi$ и равных 0 при $x > \xi$. Это множество действительно является полным, так как всякая непрерывная кусочно-линейная функция (т. е. такая, график которой представляет собой ломаную линию) является линейной комбинацией функций $f(x; \xi)$, а любая непрерывная на (a, b) функция может быть равномерно приближена кусочно-линейными функциями. Условие сходимости функционалов на этом множестве запишется в виде

$$\int_a^b d\alpha_n(x) \to \int_a^b d\alpha(x), \quad \int_a^\xi (\xi - x)\, d\alpha_n(x) \to \int_a^\xi (\xi - x)\, d\alpha(x);$$

первое из этих соотношений означает, что $\alpha_n(b) \to \alpha(b)$, а второе, после интегрирования по частям, принимает вид

$$\int_a^\xi \alpha_n(x)\, dx \to \int_a^\xi \alpha(x)\, dx.$$

Итак, мы получили ответ на поставленный вопрос:

Теорема. *Пусть A_n и A — линейные функционалы в пространстве непрерывных функций, заданных на интервале $a \leqslant x \leqslant b$, а $\alpha_n(x)$ и $\alpha(x)$ — их производящие функции, причем $\alpha_n(a) = \alpha(a) = 0$. Для того чтобы при любом выборе непрерывной функции $f(x)$ последовательность $A_n f$ сходилась к Af, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\int_a^\xi \alpha_n(x)\, dx \to \int_a^\xi \alpha(x)\, dx \quad (a < \xi \leqslant b), \tag{8}$$

$$\alpha_n(b) \to \alpha(b)$$

и нормы функционалов A_n были ограничены[1]).

Что касается условия (8), то, как легко видеть, достаточно потребовать, чтобы оно выполнялось для некоторого множества значений ξ, всюду плотного на интервале (a, b).

Эта теорема упрощается в том случае, когда все функционалы A_n положительны, т. е. когда все функции $\alpha_n(x)$ неубывающие:

Теорема[2]). *В том случае, когда $\alpha_n(x)$ — неубывающие функции, вместо условия (8) в предыдущей теореме можно требовать,*

[1]) Рисс [3].

[2]) Карамата [1].

чтобы $\alpha_n(x)$ стремились к функции $\alpha(x)$ во всех точках непрерывности этой последней; можно также требовать, чтобы такая сходимость имела место на каком-нибудь множестве, всюду плотном на интервале (a, b).

В самом деле, так как функции α_n неубывающие, то, какова бы ни была точка непрерывности ξ функции $\alpha(x)$, при $x < \xi < x'$, где x и x' принадлежат выделенному всюду плотному множеству, будем иметь

$$\alpha(x) = \lim \alpha_n(x) \leqslant \lim\inf \alpha_n(\xi) \leqslant \lim\sup \alpha_n(\xi) \leqslant \lim \alpha_n(x') = \alpha(x').$$

Заставив x и x' стремиться к ξ, получим $\alpha_n(\xi) \to \alpha(\xi)$. Так как точки, в которых такая сходимость не обеспечена, образуют счетное множество, и $a_n(x) \leqslant \alpha_n(b) \to \alpha(b)$, т. е. функции $\alpha_n(x)$ равномерно ограничены, то справедливо соотношение (8).

Обратно, если функции $\alpha_n(x)$ не убывают, то

$$\frac{1}{h}\int_{\xi-h}^{\xi} \alpha_n(x)\,dx \leqslant \alpha_n(\xi) \leqslant \frac{1}{k}\int_{\xi}^{\xi+k} \alpha_n(x)\,dx \qquad (h,\ k > 0),$$

откуда, предположив, что выполнено условие (8), и перейдя к пределу, получим

$$\frac{1}{h}\int_{\xi-h}^{\xi} \alpha_n(x)\,dx \leqslant \lim\inf \alpha_n(\xi) \leqslant \lim\sup \alpha_n(\xi) \leqslant \frac{1}{k}\int_{\xi}^{\xi+k} \alpha_n(x)\,dx.$$

Если $\alpha(x)$ непрерывна в точке ξ, то крайние члены этих неравенств при $h, k \to 0$ стремятся к $\alpha(\xi)$; следовательно, $\lim \alpha_n(\xi)$ существует и равен $\alpha(\xi)$, что и требовалось доказать.

§ 2. ОБОБЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛА СТИЛЬТЬЕСА

56. Интегралы Стильтьеса — Римана и Стильтьеса — Лебега. Если ставить своей задачей обобщение понятия интеграла Стильтьеса, то можно выбирать между несколькими направлениями.

Во-первых, можно поставить вопрос, применимо ли определение интеграла (1) как предела сумм (2) не только к непрерывным функциям $f(x)$, но и к каким-либо другим, предполагая по-прежнему, что $\alpha(x)$ есть функция с ограниченным изменением. Ответ, к которому можно прийти с помощью тех же соображений, как и в случае интеграла Римана, состоит в том, что если интеграл в указанном смысле существует, то точки разрыва функции $f(x)$ образуют множество, на котором изменение функции $\alpha(x)$ равно нулю; это означает, что точки разрыва f могут быть покрыты конечным или счетным набором интервалов, на которых сумма полных изменений $\alpha(x)$ сколь угодно мала. В том случае, когда $f(x)$ ограничена, указанное условие и достаточно для существования интеграла (1).