*чтобы $\alpha_n(x)$ стремились к функции $\alpha(x)$ во всех точках непрерывности этой последней; можно также требовать, чтобы такая сходимость имела место на каком-нибудь множестве, всюду плотном на интервале $(a, b)$.*

В самом деле, так как функции $\alpha_n$ неубывающие, то, какова бы ни была точка непрерывности $\xi$ функции $\alpha(x)$, при $x < \xi < x'$, где $x$ и $x'$ принадлежат выделенному всюду плотному множеству, будем иметь

$$\alpha(x) = \lim \alpha_n(x) \leqslant \lim\inf \alpha_n(\xi) \leqslant \lim\sup \alpha_n(\xi) \leqslant \lim \alpha_n(x') = \alpha(x').$$

Заставив $x$ и $x'$ стремиться к $\xi$, получим $\alpha_n(\xi) \to \alpha(\xi)$. Так как точки, в которых такая сходимость не обеспечена, образуют счетное множество, и $a_n(x) \leqslant \alpha_n(b) \to \alpha(b)$, т. е. функции $\alpha_n(x)$ равномерно ограничены, то справедливо соотношение (8).

Обратно, если функции $\alpha_n(x)$ не убывают, то

$$\frac{1}{h}\int\limits_{\xi-h}^{\xi} \alpha_n(x)\,dx \leqslant \alpha_n(\xi) \leqslant \frac{1}{k}\int\limits_{\xi}^{\xi+k} \alpha_n(x)\,dx \qquad (h,\ k > 0),$$

откуда, предположив, что выполнено условие (8), и перейдя к пределу, получим

$$\frac{1}{h}\int\limits_{\xi-h}^{\xi} \alpha_n(x)\,dx \leqslant \lim\inf \alpha_n(\xi) \leqslant \lim\sup \alpha_n(\xi) \leqslant \frac{1}{k}\int\limits_{\xi}^{\xi+k} \alpha_n(x)\,dx.$$

Если $\alpha(x)$ непрерывна в точке $\xi$, то крайние члены этих неравенств при $h,\ k \to 0$ стремятся к $\alpha(\xi)$; следовательно, $\lim \alpha_n(\xi)$ существует и равен $\alpha(\xi)$, что и требовалось доказать.

## § 2. ОБОБЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛА СТИЛЬТЬЕСА

**56. Интегралы Стильтьеса — Римана и Стильтьеса — Лебега.** Если ставить своей задачей обобщение понятия интеграла Стильтьеса, то можно выбирать между несколькими направлениями.

Во-первых, можно поставить вопрос, применимо ли определение интеграла (1) как предела сумм (2) не только к непрерывным функциям $f(x)$, но и к каким-либо другим, предполагая по-прежнему, что $\alpha(x)$ есть функция с ограниченным изменением. Ответ, к которому можно прийти с помощью тех же соображений, как и в случае интеграла Римана, состоит в том, что если интеграл в указанном смысле существует, то точки разрыва функции $f(x)$ образуют множество, на котором изменение функции $\alpha(x)$ равно нулю; это означает, что точки разрыва $f$ могут быть покрыты конечным или счетным набором интервалов, на которых сумма полных изменений $\alpha(x)$ сколь угодно мала. В том случае, когда $f(x)$ ограничена, указанное условие и достаточно для существования интеграла (1).

Идя далее, можно попытаться видоизменить само определение интеграла так, чтобы сделать его применимым к более широкому классу функций, например, запретив помещать точки деления в точках разрыва функции $\alpha(x)$ или потребовав, чтобы все $\xi_k$ попадали непременно в точки непрерывности функции $f(x)$. Влияние такого рода соглашений можно показать на следующем примере: пусть $\alpha(x)$ равна 0 при $x < x_0$, равна 1 при $x > x_0$, а в самой точке $x_0$ она пока не определена; пусть, далее, $f(x_0)=1$ и $f(x)=0$ для всех остальных значений $x$. Тогда, если среди точек деления нет $x_0$, то $\Sigma$ равна 0 или 1 в зависимости от выбора точек $\xi_k$; если же одна из точек деления попадает в $x_0$, то значение $\Sigma$ зависит еще от выбора значения $\alpha(x_0)$. Если же запретить $x_k$ и $\xi_k$ попадать в точку $x_0$, то $\Sigma=0$ и интеграл (1) получает определенное значение. Многочисленные видоизменения определения интеграла Стильтьеса именно в этом направлении предлагались различными авторами. Эти определения исследуются и сравниваются в работе Гильдебрандта [1], с которой мы рекомендуем читателю ознакомиться.

Другой путь подсказывают результаты п. 50, устанавливающие связь интеграла Стильтьеса с линейными функционалами: можно заменить интеграл соответствующим функционалом и продолжить этот последний за пределы пространства $C$. Такой путь имеет, в частности, то преимущество, что избавляет нас от необходимости заботиться о значениях функции $\alpha(x)$ в ее точках разрыва. Так, в рассмотренном выше примере $Af=f(x_0)$, как бы ни была определена $\alpha(x)$ в точке $x_0$; это очевидно тогда, когда мы ограничиваемся непрерывными $f(x)$. В случае разрывной функции $f(x)$, фигурирующей в примере, если мы будем аппроксимировать ее убывающей последовательностью непрерывных функций, мы опять-таки придем к значению $Af=f(x_0)$. Вообще, продолжая функционал методом монотонных последовательностей, мы избежим осложнений, связанных с разрывами функции $\alpha(x)$. Точнее говоря, если две функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ с ограниченным изменением совпадают или разнятся только на постоянное слагаемое в точках $a$ и $b$, а также на некотором всюду плотном множестве, то, в очевидных обозначениях, $Af=Bf$; это равенство выполняется прежде всего в пространстве $C$, а также для продолжений обоих функционалов.

Продолжение функционала $A$ осуществляется методом монотонных последовательностей так, как это было проделано в п. 50 в рассмотренной там частной задаче и подробно проведено при построении интеграла Лебега. Возникающие теперь особенности не создают дополнительных трудностей. Первая особенность состоит в том, что в случае интеграла Лебега исходным пунктом служили ступенчатые функции, а здесь — непрерывные. Вторая особенность, заставившая нас в п. 50 жонглировать знаками $+$

и —, обусловлена тем, что мы не ограничиваемся рассмотрением положительных функционалов, т. е. таких, для которых $Af \geqslant 0$ при $f \geqslant 0$. Этого затруднения можно, впрочем, избежать, представив производящую функцию $\alpha(x)$ в виде разности двух неубывающих функций $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$: $\alpha(x)=\alpha_1(x)-\alpha_2(x)$, что вызовет разложение соответствующего функционала $A=A_1-A_2$, где $A_1$ и $A_2$ — положительные линейные функционалы.

Наконец, последняя особенность: для той цели, которая ставилась в п. 50, нам не нужно было продолжать функционал на неограниченные функции. Если же стремиться к тому, чтобы с самого начала охватить интегрированием также некоторые неограниченные функции, нужно, так же как при построении интеграла Лебега, вместо ограниченных возрастающих последовательностей $\{f_n\}$ рассматривать возрастающие последовательности, для которых ограничены $\{A_1 f_n\}$ и $\{A_2 f_n\}$.

Разумеется, роль множеств меры нуль будут теперь играть множества, на которых изменения функций $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ равны нулю; такие множества характеризуются тем, что на них возрастающие последовательности $\{f_n\}$ могут стремиться к бесконечности, тогда как $A_1 f_n$ и $A_2 f_n$ остаются ограниченными.

Из всех возможных представлений $\alpha(x)$ в виде разности монотонных функций выберем для определенности каноническое представление $\alpha(x)=p(x)-n(x)$, где $p(x)$ — неопределенное положительное изменение функции $\alpha(x)$, а $n(x)$ — ее неопределенное отрицательное изменение; соответственно этому функционал $A$ будет представлен в виде разности двух положительных функционалов $A=P-N$. На тех множествах, на которых обращаются в нуль изменения $p(x)$ и $n(x)$, будут равны нулю изменения как самой функции $\alpha(x)$, так и ее неопределенного полного изменения.

Существенно новые вопросы, возникающие при этом, связаны с соотношениями между различными типами интегралов, например между интегралом Лебега и интегралом Стильтьеса или его обобщением, так называемым интегралом Стильтьеса — Лебега, или же между двумя интегралами последнего типа с различными функциями $\alpha(x)$. К рассмотрению этих вопросов мы и переходим.

**57. Сведение интеграла Стильтьеса — Лебега к интегралу Лебега.** Рассмотрим теперь обобщение понятия интеграла Стильтьеса, указанное Лебегом[1]). В основе его лежит следующая мысль. Предположим сначала, для того чтобы избежать некоторых второстепенных трудностей, что функция $\alpha(x)$ непрерывна и возрастает в строгом смысле слова; тогда для нее будет существовать обратная функция $x(\alpha)$ того же типа и, какова бы ни

[1]) Лебег [4] или [2] (2-е изд.).

была непрерывная функция $f(x)$, будет иметь место равенство

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)=\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(x(\alpha))\,d\alpha. \qquad (9)$$

В самом деле, если выбрать $x_k-x_{k-1}$ достаточно малыми, так чтобы мало разнились соответствующие $\alpha_k=\alpha(x_k)$, и обозначить $\beta_k=\alpha(\xi_k)$, то равные друг другу суммы

$$\sum_1^n f(\xi_k)[\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})],\qquad \sum_1^n f(x(\beta_k))[\alpha_k-\alpha_{k-1}] \qquad (10)$$

будут сколь угодно близки к соответствующим интегралам. В том случае, когда $\alpha(x)$ хотя и не убывает, но имеет разрывы или постоянна вдоль некоторых интервалов, $x(\alpha)$ следует определить как решение уравнения $\alpha(x)=\alpha$, причем и $\alpha(x)$ и $x(\alpha)$ в их точках разрыва мы условимся считать многозначными; так, значению $x$ пусть соответствуют все значения, заключенные между $\alpha(x-0)$ и $\alpha(x+0)$ [полагаем дополнительно $\alpha(a-0)=\alpha(a)$, $\alpha(b+0)=\alpha(b)$]. При этом условии суммы (10), по-прежнему равные, также можно сделать сколь угодно близкими к интегралам (9).

Равенство (9) распространяется методом продолжения на функции $f(x)$, суммируемые относительно $\alpha(x)$, т. е. на такие, для которых $f(x(\alpha))$ суммируема в обычном смысле. Лебег воспользовался этим равенством для того, чтобы *определить* интеграл Стильтьеса: правая часть равенства (9) служит определением его левой части.

Если $\alpha(x)$ имеет ограниченное изменение, не будучи монотонной, то можно прибегнуть к обычному представлению $\alpha(x)$ в виде разности двух монотонных функций, но можно получить тот же результат простой заменой переменного, воспользовавшись неопределенным полным изменением $\tau(x)$ функции $\alpha(x)$ и функцией $x(\tau)$, обратной $\tau(x)$. Рассмотрим функцию $\alpha(x(\tau))$; устраним неопределенность, возникающую из-за разрывов $\alpha(x)$ и $\tau(x)$, пополнив графики этих функций прямолинейными отрезками, отвечающими значениям $\tau(x-0)$, $\tau(x)$ и $\tau(x)$, $\tau(x+0)$. Эти отрезки будут составлять с осью $\tau$ углы $\pm\frac{\pi}{4}$. Функция $\alpha(x(\tau))$, так определенная, будет не только непрерывной и имеющей ограниченное изменение, но даже будет удовлетворять условию Липшица, так как ее приращения по абсолютной величине не превосходят абсолютной величины приращений аргумента. Поэтому она равна интегралу от своей производной

$$\varepsilon(\tau)=[\alpha(x(\tau))]',$$

причем последняя существует почти всюду. Все это следует из того легко проверяемого факта, что неопределенное полное изменение функции $\alpha(x(\tau))$ с точностью до постоянного слагаемого совпадает с $\tau$; кроме того, как мы знаем (см. п. 8), функция с ограниченным изменением и ее неопределенное полное изменение почти всюду имеют производные, равные по абсолютной величине, так что $|\varepsilon(\tau)| = \tau' = 1$.

Для любых двух точек непрерывности $x_1$ и $x_2$ функции $\alpha(x)$ будем иметь равенство

$$\alpha(x_2) - \alpha(x_1) = \alpha(x(\tau_2)) - \alpha(x(\tau_1)) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \varepsilon(\tau)\, d\tau,$$

где $\tau_1 = \tau(x_1)$, $\tau_2 = \tau(x_2)$; отсюда получаем соотношение

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \int_A^B f(x(\tau))\, \varepsilon(\tau)\, d\tau \quad [A = \tau(a),\ B = \tau(b)] \tag{11}$$

сначала для ступенчатых функций $f(x)$, разрывы которых попадают в точки непрерывности $\alpha(x)$, а затем равномерным предельным переходом распространяем его на все непрерывные функции $f(x)$. А так как, с другой стороны,

$$\int_a^b f(x)\, d\tau(x) = \int_A^B f(x(\tau))\, d\tau,$$

то для неопределенного положительного и неопределенного отрицательного изменений $p(x) = \frac{1}{2}[\tau(x) + \alpha(x)]$ и $n(x) = \frac{1}{2}[\tau(x) - \alpha(x)]$ будем иметь

$$\int_a^b f(x)\, dp(x) = \int_A^B f(x(\tau))\, \frac{1+\varepsilon(\tau)}{2}\, d\tau = \int_{e^+} f(x(\tau))\, d\tau,$$

$$\int_a^b f(x)\, dn(x) = \int_A^B f(x(\tau))\, \frac{1-\varepsilon(\tau)}{2}\, d\tau = \int_{e^-} f(x(\tau))\, d\tau,$$

где $e^+$ и $e^-$ означают множества, на которых $\varepsilon(\tau)$ равна соответственно 1 и $-1$.

Три последние формулы методом монотонных последовательностей распространяются на всевозможные функции $f(x)$, суммируемые одновременно относительно $p(x)$ и $n(x)$, или, что одно и то же, суммируемые относительно $\tau(x) = p(x) + n(x)$, и мы видим, что это как раз те функции, для которых $f(x(\tau))$ суммируемы в обычном смысле на интервале $(A, B)$. Вычитая одну из двух последних формул из другой, мы снова приходим к формуле (11).

Итак, функция $f(x)$ *суммируема относительно* $\alpha(x)$ *тогда и только тогда, когда* $f(x(\tau))$ *суммируема в обычном смысле; при* *этом имеет место равенство* (11). Следовательно, как заметил Лебег, посредством правой части равенства (11) можно определять его левую часть[1]).

**58. Соотношение между двумя интегралами Стильтьеса — Лебега.** С помощью рассуждения, подобного тому, которым мы воспользовались в предыдущем пункте, можно получить соотношение

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_{\beta(a)}^{\beta(b)} f(x(\beta))\,[\alpha(x(\beta))]'\,d\beta, \qquad (12)$$

аналогичным образом интерпретируемое, в котором $\beta(x)$ — *неубывающая функция, относительно которой* $\alpha(x)$ *предполагается абсолютно непрерывной*; последнее означает, что для любой системы неперекрывающихся интервалов $(a_k, b_k)$, для которой сумма

$$\sum [\beta(b_k) - \beta(a_k)]$$

достаточно мала, сумма

$$\sum |\alpha(b_k) - \alpha(a_k)|,$$

в свою очередь, сколь угодно мала.

Особенно интересен частный случай, когда $\beta(x) = x$ и $\alpha(x)$ *абсолютно непрерывна в обычном смысле; тогда*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\,\alpha'(x)\,dx.$$

Заметим, что эта формула охватывает, в частности, правило *интегрирования с помощью подстановки*, доказанное нами для интеграла Лебега в п. 26. В самом деле, пусть $\alpha(\alpha)$ — возрастающая абсолютно непрерывная функция, а $h(\alpha)$ — произвольная

[1]) Заметим, что интеграл Хеллингера, т. е, интеграл функции интервала

$$\frac{[f(\beta) - f(\alpha)]^2}{g(\beta) - g(\alpha)}$$

или несколько более общей функции

$$\frac{|f(\beta) - f(\alpha)|^p}{|g(\beta) - g(\alpha)|^{p-1}},$$

где $g(x)$ означает некоторую возрастающую функцию, таким же образом сводится к интегралу Лебега. В частном случае, когда $g(x) = x$, это сведение вытекает из соображений, развитых в п. 36: соответствующий интеграл Хеллингера существует тогда и только тогда, когда $f(x)$ является неопределенным интегралом некоторой функции $\varphi(x)$, принадлежащей $L^p$; при этом сам интеграл равен $\int_a^b |\varphi|^p\,dx$. Обобщение на случай произвольной возрастающей $g(x)$ принадлежит Хану [1] (для $p=2$) и Радону [1] (для $p > 1$).

функция, определенная и суммируемая на интервале $A=\alpha(a)\leqslant \leqslant\alpha\leqslant\alpha(b)=B$. Положив $f(x)=h(\alpha(x))$, получим $f(x(\alpha))=h(\alpha)$ и, в силу соотношения (9),

$$\int_A^B h(\alpha)\,d\alpha=\int_A^B f(x(\alpha))\,d\alpha=\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)=$$
$$=\int_a^b f(x)\,\alpha'(x)\,dx=\int_a^b h(\alpha(x))\,\alpha'(x)\,dx.$$

Возвратимся к формуле (12). Функция $[\alpha(x(\beta))]'$, определенная почти всюду (относительно $\beta$), сохраняет постоянное значение на любом интервале, на котором постоянна $x(\beta)$, так как на таких интервалах функция $\alpha(x(\beta))$ линейна. Следовательно, $[\alpha(x(\beta))]'$ может рассматриваться как функция от $x(\beta)$,

$$[\alpha(x(\beta))]'=g(x(\beta));$$

отсюда, в силу (9) и (12), следует, что

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)=\int_a^b f(x)\,g(x)\,d\beta(x). \tag{13}$$

В частности, взяв в качестве $f(x)$ характеристическую функцию интервала $(a, \xi)$, получим соотношение

$$\alpha(\xi)=\int_a^\xi (gx)\,d\beta(x). \tag{14}$$

Мы видим, таким образом, что *функция* $\alpha(x)$, *абсолютно непрерывная относительно некоторой неубывающей функции* $\beta(x)$, *представляет собой неопределенный интеграл некоторой функции* $g(x)$, *суммируемой относительно* $\beta(x)$. *Обратно, всякий неопределенный интеграл такого вида абсолютно непрерывен относительно* $\beta(x)$; доказывается это совершенно так же, как в случае обыкновенного интеграла (см. п. 25).

Заметим, что если известно заранее, что функция $\alpha(x)$ имеет вид (14), то равенство (13) можно получить проще, даже тогда, когда $\beta(x)$ не монотонна, а лишь имеет ограниченное изменение. Прежде всего, представив $\beta(x)$ в виде разности неопределенного положительного и неопределенного отрицательного изменений, а $g(x)$ — в виде разности ее положительной и отрицательной частей, мы сведем доказательство к случаю, когда $\beta(x)$ не убывает, а $g(x)$ неотрицательна. При этом равенство (13), очевидное для ступенчатых $f(x)$, распространяется на произвольные функции $f(x)$, суммируемые относительно $\beta(x)$, посредством рассуждения, которым мы воспользовались в п. 26 для вывода правила интегрирования с помощью подстановки.

Приведем в заключение одно предложение, относящееся к *сложным функциям*. Предположим, что функция $g(x)$ суммируема относительно некоторой неубывающей функции $\beta(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Пусть $e_y(x)$ — характеристическая функция множества тех точек $x$, в которых $g(x) \leqslant y$; положим

$$\alpha(y) = \int_a^b e_y(x)\, d\beta(x).$$

Функция $\alpha(y)$, очевидно, неубывающая и определена она на всей оси $y$. Возьмем, наконец, какую-нибудь функцию $f(y)$, суммируемую относительно $\alpha(y)$, $-\infty < y < \infty$, и покажем, что в высказанных предположениях *сложная функция $f(g(x))$ суммируема относительно $\beta(x)$ и при этом*

$$\int_a^b f(g(x))\, d\beta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, d\alpha(y). \tag{15}$$

Равенство (15) очевидно в том случае, когда $f(y)$ — характеристическая функция какого-нибудь интервала $c < y \leqslant d$, так как тогда $f(g(x)) = e_d(x) - e_c(x)$. Отсюда вытекает его справедливость для ступенчатых $f(y)$. Наконец, посредством многократно употреблявшегося приема равенство (15) продолжается на любые суммируемые относительно $\alpha(y)$ функции.

**59. Функции нескольких переменных. Прямые определения.** Относительно обобщения полученных результатов на функции нескольких переменных нам остается сказать лишь немногое. Методы, которыми мы пользовались для той же цели в случае интеграла Лебега, применимы и в случае интеграла Стильтьеса — Лебега, и читатель сможет поэтому сам сформулировать соответствующие результаты и попытаться их доказать. Мы позволим себе не останавливаться на подробностях, а лишь отметить некоторые необходимые изменения, которые, так сказать, не бросаются в глаза.

Остановимся прежде всего на линейных функционалах и их представлении с помощью интеграла Стильтьеса. В первые дни возникновения этой теории случай нескольких переменных казался гораздо более трудным, чем случай одного переменного. Объяснялось это, по-видимому, тем, что область определения функции нескольких переменных не распадается, вообще говоря, на конечное число прямоугольников. Но это осложнение исчезло с того момента, когда вместо функций прямоугольника были введены функции множества[1]).

[1]) См., в частности, Радон [1] или же Стоун [2] (стр. 198—221), Сакс [2] (гл. III), [3].

Допустим для определенности, что речь идет о непрерывных функциях, определенных на некотором замкнутом ограниченном множестве $E$; при этом, не нарушая общности, можно предположить, что множество $E$ заключено в единичном квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Рассмотрим линейный функционал $A$, определенный на таких функциях. Пусть $A'$ — функционал, определенный на функциях $f(x, y)$ (заданных и непрерывных на всем единичном квадрате) таким образом, что $A'f$ равно значению функционала $A$, соответствующему функции $f(x, y)$, если рассматривать ее лишь на множестве $E$. Сведя задачу к случаю единичного квадрата, мы получим возможность почти слово в слово применить метод, использованный в п. 50; при этом появится функция $\alpha(x, y)$ двух переменных с ограниченным изменением[1]), такая, что

$$A'f = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, d\alpha(x, y),$$

где интеграл справа определяется как предел сумм

$$\sum_{i,k=1}^{m,n} f(\xi_i, \eta_k)[\alpha(x_i, y_k) - \alpha(x_{i-1}, y_k) - \alpha(x_i, y_{k-1}) + \alpha(x_{i-1}, y_{k-1})]$$
$$(x_0 = y_0 = 0,\ x_m = y_n = 1,\ x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i,\ y_{k-1} \leqslant \eta_k \leqslant y_k).$$

Сама функция $\alpha(x, y)$ равна значению функционала $A$ или, точнее, его продолжения, соответствующему характеристической функции прямоугольника, ограниченного абсциссами 0, $x$ и ординатами 0, $y$, или, что эквивалентно, характеристической функции части множества $E$, попавшей в указанный прямоугольник. Можно также сказать, что она равна массе, несомой этим подмножеством, причем распределение масс отвечает выбранному функционалу. Следует, впрочем, оговориться, что носителями масс оказываются не только такие множества, но и все те, характеристические функции которых входят в область определения рассматриваемого функционала, в частности любые замкнутые подмножества множества $E$. В самом деле, пусть $e$ — какое-нибудь замкнутое множество; положим, что $f_n(x, y)$ равна положительной части функции $1 - n \cdot d(x, y)$, где $d(x, y)$ означает расстояние от точки $(x, y)$ до множества $e$. Непрерывные функции $f_n(x, y)$ образуют убывающую последовательность, сходящуюся к харак-

[1]) Соответствующее определение формулируется очевидным образом. Нужно только вместо функции интервала, упоминающейся в определении полного измерения функции $\varphi(x)$ одного переменного, ввести функцию прямоугольника

$$\alpha(R) = |\alpha(x_2, y_2) - \alpha(x_2, y_1) - \alpha(x_1, y_2) + \alpha(x_1, y_1)|,$$

где $R$ — прямоугольник с вершинами $(x_1, y_1)$, $(x_1, y_2)$, $(x_2, y_1)$, $(x_2, y_2)$.

теристической функции множества $e$; следовательно, значение $A$, соответствующее этой характеристической функции, определено и равно пределу $Af_n$. Может быть, небезынтересно заметить, что для определения интеграла Стильтьеса непрерывной функции двух и большего числа переменных нет надобности в *точных* разбиениях области интегрирования. Предположим, что функционал $A$ — положительного типа, т. е. что

$$\alpha(x, y) - \alpha(x', y) - \alpha(x, y') + \alpha(x', y') \geqslant 0$$

при $x \geqslant x'$, $y \geqslant y'$; это не нарушит общности рассуждений, так как произвольный функционал может быть выражен через положительные так же, как в случае одного переменного. Верхний и нижний интегралы положительной функции $f(x, y)$ могут быть определены следующим образом. Образуем сумму

$$\sum_1^n m_k A e_k(x, y),$$

где $e_k(x, y)$ — характеристические функции замкнутых подмножеств $e_k$ множества $E$, не пересекающихся, но не обязательно исчерпывающих множество $E$; $m_k$ означает наименьшее значение $f(x, y)$ на $e_k$. Нижним интегралом функции $f(x, y)$ на множестве $E$ назовем верхнюю грань таких сумм. Верхний интеграл мы можем определить как нижнюю грань аналогичных сумм, содержащих вместо $m_k$ наибольшие значения $M_k$, потребовав от множеств $e_k$, чтобы они исчерпывали множество $E$, и в то же время допустив возможность их пересечения. В том случае, когда $f(x, y)$ непрерывна, оба эти интеграла заведомо совпадают, и их общее значение представляет собой искомый интеграл.

**60. Определение, основанное на принципе соответствия.** Можно также свести интеграл Стильтьеса и даже интеграл Стильтьеса—Лебега функции любого числа переменных к интегралу Лебега функции одного переменного с помощью того же самого принципа соответствия, каким мы пользовались в теории лебеговского интеграла, соблюдая, однако, в данном случае известную осторожность. Будем для большей наглядности говорить о распределении положительных масс на множестве $E$. Рассмотрим массу, расположенную левее прямой $x = x'$; варьируя $x'$, мы получим функцию от $x'$, неубывающую и, следовательно, непрерывную всюду, кроме некоторого счетного множества значений $x_1$; $x_2, \ldots$, в которых наша функция претерпевает скачки. То же можно сказать о массах, расположенных ниже прямой $y = y'$. Чтобы избежать затруднений, связанных с точками разрыва, выберем прямоугольную сеть в плоскости $(x, y)$ таким образом, чтобы линии разбиения не прошли через точки разрыва $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ указанных функций. Так, например, если размеры клеток задать равными $2^{-n}$, то границы их должны пересекать оси координат в точках вида $x_0+m2^{-n}$ и $y_0+m2^{-n}$ $(m=\ldots,-1,\ 0,\ 1,\ldots;\ n=1,\ 2,\ldots)$, причем $x_0$ и $y_0$ надо выбрать так, чтобы значения $x_0+m2^{-n}$ не совпали ни с одним из чисел $x_1,\ x_2,\ \ldots$, а $y_0+m2^{-n}$ ни с одним из $y_1,\ y_2,\ \ldots$. Это можно сделать, так как, например, разности вида $x_k-m2^{-n}$ образуют счетное множество и, следовательно, не покрывают всей оси $x$; в качестве $x_0$ можно взять любую точку, отличную от всех таких разностей. То же можно сказать относительно $y_0$.

После того, как эти предосторожности будут приняты, границы соответствующих клеток не будут нести положительной массы, и их можно будет безболезненно исключить из рассмотрения. Установим теперь соответствие между точками множества $E$ и точками интервала так, чтобы массе соответствовала длина интервала. Осуществляется это так же, как в п. 39, с той разницей, что здесь мы оперируем с двоичной системой, тогда как раньше, имея в виду построение сопряженных сетей, мы пользовались системой троичной. Другое различие, на этот раз существенное, состоит в том, что интервал, соответствующий клетке в плоскости, должен иметь длину, равную не площади клетки, а массе, несомой ею, или, если угодно, частью множества $E$, попавшей в эту клетку. Легко видеть, что если пренебречь, с одной стороны, некоторым множеством меры нуль на числовой прямой, а с другой стороны, некоторым множеством с массой, равной нулю, на плоскости, то построенное соответствие будет взаимно однозначным, причем всякому подмножеству $e$ множества $E$, измеримому относительно $\alpha(x,\ y)$, будет соответствовать множество, линейная мера которого равна массе, несомой множеством $e$. Однако в плоскости могут оказаться особые точки $(x_0,\ y_0)$, несущие положительные массы; при этом если функция $f(x,\ y)$ равна единице в такой точке и нулю во всех остальных точках, то значение функционала $A$, соответствующее этой функции, отлично от нуля. В рассматриваемом случае интервалы, соответствующие последовательности клеток, стягивающейся к $(x_0,\ y_0)$, образуют последовательность, хотя и убывающую, но стягивающуюся не к точке, а к некоторому интервалу положительной длины, равной массе, сосредоточенной в $(x_0,\ y_0)$; этот интервал соответствует точке $(x_0,\ y_0)$ так же, как в случае монотонной функции, претерпевающей скачок.

Имея отображение множества $E$ на интервал, мы можем теперь любой функции $f(x,\ y)$ поставить в соответствие функцию $f(t)$, положив $f(t)=f(x,\ y)$ в точке $t$, соответствующей $(x,\ y)$. Такое соответствие, очевидно, сохраняет как интегрируемость, так и значения интегралов, и это обстоятельство позволяет непосредственно перенести свойства интеграла Лебега на интеграл Стильтьеса—Лебега функции нескольких переменных.