§ 3. ИНТЕГРАЛ ДАНИЕЛЯ

61. Положительные линейные функционалы. Принцип соответствия позволяет без большого ущерба нарушить строение множеств и отказаться от непрерывности. В связи с этим возникает вопрос, нельзя ли вовсе избавиться от множеств геометрической природы и интегрировать функции, заданные прямо на абстрактных множествах?

Это проделал в 1915 г. Фреше [1], основатель теории абстрактных топологических пространств, обобщив соответствующим образом метод Лебега, и несколько позднее Даниель [1], воспользовавшийся идеей продолжения линейных функционалов. Идеи Фреше были развиты многими авторами, главным образом в работах по теории вероятностей и в смежных областях[1]). Оставив их в стороне, мы рассмотрим здесь более близкое к нашим методам построение, принадлежащее Даниелю.

Пусть E — произвольное или, как принято говорить, абстрактное множество элементов x. Обозначим C_0 какой-нибудь класс функций $\varphi(x)$, содержащий вместе с любыми входящими в него функциями $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ все их линейные комбинации, а также вместе с любой $\varphi(x)$ ее абсолютную величину $|\varphi(x)|$. Одновременно с $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ классу C_0 будут тогда принадлежать

$$\inf(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{1}{2}|\varphi_1 - \varphi_2|$$

и

$$\sup(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{1}{2}|\varphi_1 - \varphi_2|,$$

а также

$$\varphi^+ = \sup(\varphi, 0) = \frac{1}{2}(\varphi + |\varphi|)$$

и

$$\varphi^- = \sup(-\varphi, 0) = \frac{1}{2}(|\varphi| - \varphi) = (-\varphi)^+.$$

Чтобы не усложнять построение, предположим еще, что класс C_0 содержит функцию $\varphi_0(x) \equiv 1$; если это условие нарушается, то роль единицы может играть любая функция, положительная на всем множестве E или хотя бы на тех его подмножествах, которые нас в данный момент интересуют.

Рассмотрим функционал $A\varphi$, играющий роль интеграла функции φ. Предполагается, что он *аддитивен* и *однороден*:

$$A(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 A\varphi_1 + c_2 A\varphi_2.$$

До тех пор, пока не будет оговорено противное, мы будем, кроме

---

[1]) См., в частности, Никодим [1]; Хан [3]; Колмогоров [1], [2]; Сакс [2], [3]; Банах (заметка II в книге Сакса [3]); Каратеодори [1]; Веккен [3].

того, предполагать, что

$$A\varphi \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \varphi(x) \geqslant 0,$$

откуда следует более общее соотношение:

$$A\varphi \geqslant A\psi \quad \text{при} \quad \varphi(x) \geqslant \psi(x);$$

функционал A, обладающий перечисленными свойствами, мы будем кратко называть *положительным линейным функционалом*.

Для того, чтобы воспроизвести в этих условиях наше построение интеграла Лебега с функциями класса C_0, заменяющими ступенчатые функции, нам понадобится чем-то заменить наши основные леммы А и Б; из них первая, как мы помним, утверждает, что $A\varphi_n \to 0$, когда $\varphi_n(x)$, убывая, стремятся почти всюду к нулю; вторая же утверждает, что возрастающая последовательность φ_n почти всюду имеет конечный предел, коль скоро $A\varphi_n$ ограничены.

Мы еще не сказали, что теперь означает „почти всюду", т. е. что следует понимать под множествами меры нуль. Эти последние мы введем, *определив* их как такие множества, на которых возрастающая последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ может расходиться, в то время как $\{A\varphi_n\}$ остается ограниченной. Это определение заменит собой лемму Б. Что касается самого определения множеств меры нуль, то читатель сможет придать ему более привычную форму.

Лемму А заменит, по крайней мере частично, следующее

Условие А. *Если $\varphi_n(x)$, убывая, всюду стремятся к нулю, то $A\varphi_n \to 0$.*

Покажем, что это условие можно ослабить, потребовав лишь, чтобы $\varphi_n(x) \to 0$ выполнялось почти всюду. В самом деле, допустим, что $\varphi_n(x) \to 0$ для всех x, кроме, может быть, некоторого множества e_0 меры нуль: выберем такую возрастающую последовательность $\{\psi_n(x)\}$, чтобы она расходилась на множестве e_0, в то время как последовательность $\{A\psi_n\}$ остается ограниченной. Взяв вместо ψ_n функции $\psi_n - \psi_1$ и снабдив их, если нужно, некоторыми постоянными множителями, мы можем добиться того, чтобы выполнялись условия

$$\psi_n(x) \geqslant 0, \quad A\psi_n < \varepsilon \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

В этих предположениях $(\varphi_n - \psi_n)^+$ стремятся к нулю всюду, следовательно,

$$A(\varphi_n - \psi_n)^+ \to 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$A\varphi_n = A(\varphi_n - \psi_n) + A\psi_n \leqslant A(\varphi_n - \psi_n) + \varepsilon \leqslant A(\varphi_n - \psi_n)^+ + \varepsilon \to \varepsilon,$$

и так как ε произвольно, то $A\varphi_n \to 0$, что и требовалось доказать.

Располагая определением множеств меры нуль и условием А, полностью заменяющими леммы А и Б п. 16, мы можем теперь построить теорию, вполне аналогичную теории интеграла Лебега.

Мы получим теоремы, аналогичные тем, которые были доказаны в пп. 18—22, за одним только исключением: доказательство теоремы о сложных функциях (п. 20) основывалось на том, что, подставив в непрерывную функцию одного или нескольких переменных вместо ее аргументов произвольные ступенчатые функции, мы получим снова ступенчатую функцию. В случае же класса C_0 это предложение, вообще говоря, неверно. Однако это затруднение можно обойти, если заметить, что всякая непрерывная функция $g(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ служит пределом последовательности функций $\varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_r)$, каждая из которых получается из линейных функций $c_0+c_1u_1+\ldots+c_ru_r$ применением в конечном числе операций взятия sup и inf. Если не пользоваться этой теоремой, то вопрос о суммируемости квадрата суммируемой функции решается следующим образом: f^2 можно представить в виде

$$f^2=\sup(2\lambda|f|-\lambda^2),$$

где λ пробегает положительную полуось; в самом деле,

$$f^2-2\lambda|f|+\lambda^2=(|f|-\lambda)^2\geqslant 0,$$

причем, коль скоро x фиксировано, равенство достигается при $\lambda=|f(x)|$. Очевидно, для λ достаточно ограничиться какой-нибудь счетной всюду плотной последовательностью значений $\{\lambda_n\}$, например всевозможными рациональными значениями. Следовательно, f^2 представляет собой предел возрастающей последовательности функций

$$g_n=\sup_{m=1, 2, \ldots, n}(2\lambda_m|f|-\lambda_m^2)$$

и, согласно общей теории, все g_n суммируемы, равно как и предел f^2, если только этот последний обладает суммируемой мажорантой или, в частности, если f^2 ограничена; в любом случае f^2 оказывается измеримой.

Этого достаточно для того, чтобы перенести на рассматриваемый общий случай основные факты, относящиеся к функциональному пространству L^2[1]). В частности, переносится теорема п. 30, утверждающая, что всякий линейный функционал в L^2 представляется в виде (f, g); этой теоремой, именно в таком общем случае, мы воспользуемся ниже.

62. Функционалы произвольного знака. Теперь мы устраним ограничение, состоящее в том, что функционал A *положителен*. Вместо этого мы предположим, что функционал A, по-прежнему *аддитивный* и *однородный*, имеет *положительную мажоранту*, т. е. что существует положительный линейный функционал B,

---

[1]) То же можно сделать применительно к пространству L^p, но на этом мы не будем останавливаться.

такой, что $Af \leqslant Bf$, какова бы ни была функция $f(x) \geqslant 0$. До конца настоящей главы именно такие функционалы A мы будем называть *линейными функционалами*.

Функционал A такого типа имеет наименьшую положительную мажоранту P, для которой выполняется неравенство $Pf \leqslant Bf$ при любой $f(x) \geqslant 0$ и при любой другой мажоранте B. Функционал P строится следующим образом: для $f(x) \geqslant 0$ значение Pf определяется как верхняя грань значений Af_1, где f_1 означает произвольную функцию, удовлетворяющую неравенствам $0 \leqslant f_1(x) \leqslant \leqslant f(x)$. При этом $Pf \geqslant A0 = 0$; для Pf, Pg и $P(f+g)$, где $g(x) \geqslant 0$, можно получить неравенства

$$0 \leqslant f_1 \leqslant f, \quad 0 \leqslant g_1 \leqslant g, \quad Af_1 \geqslant Pf - \varepsilon, \quad Ag_1 \geqslant Pg - \varepsilon,$$

откуда следует, что

$$P(f+g) \geqslant A(f_1+g_1) = Af_1 + Ag_1 \geqslant Pf + Pg - 2\varepsilon,$$

и так как $\varepsilon > 0$ произвольно мало, то

$$P(f+g) \geqslant Pf + Pg.$$

С другой стороны, пусть $0 \leqslant h(x) \leqslant f(x) + g(x)$, где функция $h(x)$ выбраиа так, чтобы выполнялось неравенство $Ah \geqslant P(f+g) - \varepsilon$. Положив

$$f_1 = \inf(f, h), \quad g_1 = h - f_1,$$

будем иметь

$$g_1 = h - \inf(f, h) = h - f - h + \sup(f, h) \leqslant h - f - h + f + g = g;$$

отсюда вытекает, что

$$P(f+g) - \varepsilon \leqslant Ah = Af_1 + Ag_1 \leqslant Pf + Pg,$$

и так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$P(f+g) \leqslant Pf + Pg.$$

Итак, $P(f+g) = Pf + Pg$, но пока только для неотрицательных функций. Кроме того, если $f(x) \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$, то $P(cf) = cPf$. Распространяя функционал P на функции f произвольного знака обычным способом, т. е. применяя P отдельно к положительной и отрицательной частям функции f, мы получим в результате положительный линейный функционал. При этом неравенства $Af \leqslant Pf \leqslant Bf$ для $f(x) \geqslant 0$ вытекают прямо из построения функционала P.

Условимся называть P *положительной частью* функционала A. Так как каждой положительной мажоранте B функционала A соответствует некоторая положительная мажоранта функционала $-A$, а именно $B - A$, и наоборот, то $N = P - A$ будет служить наименьшей положительной мажорантой функционала $-A$; N будем называть *отрицательной частью* функционала A. Сумма $2P - A$ функционалов P и N может быть определена независимо как наименьшая общая положительная мажоранта для A и $-A$; ее естественно назвать *модулем* функционала A и обозначить $|A|$.

Легко видеть, что в случае обычного интеграла Стильтьеса по некоторой функции $\alpha(x)$ с ограниченным изменением Pf и Nf выражаются как интегралы функции соответственно по неопределенному положительному и неопределенному отрицательному изменениям функции $\alpha(x)$.

Итак, мы снова пришли к положительным функционалам. Однако нам нужно еще выяснить, что сталось с нашими леммами А и Б или, точнее говоря, с определением множеств меры нуль и с гипотезой А, заменившей в рассматриваемом случае лемму А.

Проще всего определить множества меры нуль так, как это было сделано выше, лишь заменив функционал A его модулем $|A|$. Что же касается условия А, то мы его сохраним, причем покажем, что коль скоро оно оправдывается в применении к функционалу A, то оно верно как для P, так и для N, а следовательно, и для $|A|$. Надо здесь оговориться, что все сказанное до сих пор, поскольку оно относилось к P, было верно лишь для функций исходного класса C_0. В самом деле, не обеспечив себя леммами А и Б или тем, что их заменяет, мы не можем продолжить функционал P. Теперь, когда этот пункт выяснен, мы можем обычным способом продолжить P и N, а вместе с ними и функционал A.

Продолжая обозначать элементы множества C_0 латинскими буквами, возьмем какую-нибудь убывающую последовательность $\{f_n(x)\}$, всюду стремящуюся к нулю. При этом $Af_n \to 0$, согласно условию А. Мы покажем, следуя Даниелю, что и $Pf_n \to 0$.

Выберем g_n, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant g_n \leqslant f_n$ и

$$Ag_n \geqslant Pf_n - 2^{-n}\varepsilon, \tag{16}$$

и положим

$$h_1 = g_1, \quad h_n = \inf(g_1, g_2, \ldots, g_n) = \inf(h_{n-1}, g_n).$$

Так как h_n образуют убывающую последовательность, стремящуюся к нулю, то $Ah_n \to 0$; покажем, что

$$Pf_n \leqslant Ah_n + (2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-n})\varepsilon < Ah_n + \varepsilon. \tag{17}$$

В силу (16), оценка (17) верна для $n = 1$; допустим, что она верна для некоторого n. Так как

$$0 \leqslant h_n \leqslant f_n, \qquad 0 \leqslant g_{n+1} \leqslant f_{n+1} \leqslant f_n,$$

то

$$0 \leqslant \sup(h_n, g_{n+1}) \leqslant f_n,$$

следовательно,

$$A(\sup(h_n, g_{n+1})) \leqslant Pf_n.$$

Так как

$$h_{n+1} = \inf(h_n, g_{n+1}) = h_n + g_{n+1} - \sup(h_n, g_{n+1}),$$

то, в силу (16) и (17),

$$\begin{aligned} Ah_{n+1} &= Ah_n + Ag_{n+1} - A(\sup(h_n, g_{n+1})) \geqslant \\ &\geqslant Ah_n + Pf_{n+1} - 2^{-n-1}\varepsilon - Pf_n \geqslant \\ &\geqslant Pf_{n+1} - 2^{-n-1}\varepsilon - (2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-n})\varepsilon \geqslant Pf_{n+1} - \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е. (17) выполняется для значения $n+1$. Наконец, так как $Ah_n \to 0$, то из (17) следует, что $\limsup Pf_n \leqslant \varepsilon$. Но $\varepsilon > 0$ произвольно и $Pf_n \geqslant 0$, поэтому $Pf_n \to 0$, что и требовалось доказать.

Далее функционал A и его продолжение исследуются так же, как это делалось в случае интеграла Лебега или интеграла Стильтьеса—Лебега; новые вопросы возникают только в связи с понятием производной.

63. Производная одного линейного функционала относительно другого. Понятие производной кажется неприменимым, когда идет речь о функциях, заданных на абстрактном множестве. Однако можно поставить вопрос об обращении операции интегрирования: найти функцию, неопределенный интеграл которой задан. Что же касается неопределенного интеграла, то он существует и в нашем общем случае, только он представляет собой не функцию точки, а функцию множества $F(e)$, определенную на всевозможных измеримых подмножествах e множества E, т. е. на подмножествах, обладающих суммируемыми характеристическими функциями $e(x)$; $F(e)$ равна интегралу функции $f(x)$ по множеству e или, иначе говоря, интегралу произведения $e(x)f(x)$ по всему множеству E. Задача состоит в выяснении условий, при которых функция множества $F(e)$ представляет собой такой интеграл, и в отыскании функции $f(x)$, интегралом которой является $F(e)$. Эти условия вполне аналогичны соответствующим условиям для случая интеграла Лебега; что же касается отыскания $f(x)$, то за неимением дифференцирования придется прибегнуть к другим методам. Один из таких методов состоит в построении линий уровня функций $f(x)$, точнее говоря, множеств, на которых $f(x)$ превосходит (разумеется, лишь почти всюду) заданные постоянные числа[1]). Другой метод сводит задачу к некоторой весьма близкой задаче. Предоставив читателю самому сопоставить обе эти задачи, мы займемся только второй из них[2]).

Задача эта связана с формулой (13) и по существу состоит в замене переменного интегрирования. На языке функционалов она формулируется следующим образом. *Даны два линейных по-*

---

[1]) См. Радон [1] (в частности, стр. 1342—1351); Даниель [3]; Никодим [1] в частности, стр. 127—130).

[2]) См. И. Нейман [9].

ложительных функционала A и B, определенные первоначально на множестве C_0 и затем продолженные так, как это было описано выше; существует ли функция $g(x)$, такая, что

$$Af = B(gf) \tag{18}$$

для всех тех функций $f(x)$, измеримых относительно A и B, для которых Af или $B(gf)$ имеет смысл?

Рассмотрим сначала частный случай, когда B является *мажорантой* функционала A, т. е. $Af \leqslant Bf$ для любой функции $f(x) \geqslant 0$. Заметим, что достаточно требовать выполнения последнего условия для функций, принадлежащих классу C_0, так как оно, очевидно, сохраняется при продолжении обоих функционалов и, кроме того, функции, суммируемые относительно B, суммируемы также относительно A. Итак, пространство функций, суммируемых вместе со своими квадратами относительно B, обозначим L_B^2 и рассмотрим A как функционал в этом пространстве. В силу неравенства

$$|Af|^2 \leqslant (A1)(Af^2) \leqslant (A1)(Bf^2),$$

являющегося очевидным обобщением неравенства Шварца, функционал A ограничен и, согласно теореме п. 30, которая также обобщается на случай пространства L_B^2, существует функция g, принадлежащая L_B^2 и удовлетворяющая соотношению (18) при любом выборе элемента f из L_B^2. Далее $g(x) \geqslant 0$ почти всюду; в самом деле, в противном случае, взяв в качестве f отрицательную часть g^- функции g, мы получили бы, согласно (18), неравенство

$$Ag^- = B(gg^-) = B(-(g^-)^2) = -B(g^-)^2 < 0,$$

противоречащее предположению, что A — положительный функционал. Взяв $B - A$ вместо A и $1 - g$ вместо g, мы получим таким же способом неравенства $1 - g \geqslant 0$, $g \leqslant 1$, также выполняющиеся почти всюду. Такая функция $g(x)$, определенная однозначно с точностью до множеств меры нуль относительно B, дает нам решение нашей задачи, хотя только для функций $f(x)$ пространства L_B^2. Для того чтобы перейти к произвольным функциям $f(x)$, измеримым относительно B (и, следовательно, измеримым относительно A), заметим прежде всего, что достаточно рассмотреть только неотрицательные функции, так как произвольную $f(x)$ можно выразить через ее положительную и отрицательную части. Итак, возьмем какую-нибудь суммируемую функцию $f(x) \geqslant 0$ и положим $f_n(x) = \inf(f(x), n)$; так как $f_n(x)$ принадлежат L_B^2 и ограничены, то

$$Af_n = B(gf_n).$$

Функции f_n и gf_n образуют возрастающие последовательности, стремящиеся всюду соответственно к f и gf, поэтому можно перейти к пределу под знаком функционала, и мы придем к равенству (18).

Если рассмотреть теперь произвольные положительные линейные функционалы A и B, заданные первоначально на C_0, то полученный результат можно будет применить к функционалам A и $C=A+B$. Мы придем к выводу, что при соответствующем выборе функции h для всех $f(x)$, измеримых одновременно относительно A и B, а следовательно, и относительно C, выполняются равенства

$$Af=C(hf) \tag{19}$$

и

$$Bf=C((1-h)f); \tag{20}$$

таким образом, коль скоро имеют смысл их левые части, то имеют смысл и правые части, и наоборот. Заменив в (20) f функцией $\frac{h}{1-h}f$, получим

$$B\left(\frac{h}{1-h}f\right)=C(hf);$$

отсюда, согласно (19), следует, что

$$Af=B\left(\frac{h}{1-h}f\right).$$

Таким образом, решением нашей задачи служит функция

$$g(x)=\frac{h(x)}{1-h(x)}.$$

Впрочем, такое решение в лучшем случае может быть названо лишь формальным, так как множитель $g(x)$ обращается в бесконечность в тех точках, где $h(x)=1$; так, например, в предельном случае, когда $B=0$ и $C=A$, будет $h(x)=1$ почти всюду относительно C и можно считать, что $h(x)\equiv 1$.

Возьмем в (19) и (20) в качестве $f(x)$ характеристическую функцию $e_1(x)$ множества e_1 точек, в которых $h(x)=1$. Так как $h(x)e_1(x)\equiv e_1(x)$, то

$$Ae_1=Ce_1, \quad Be_1=0,$$

т. е. множество e_1 имеет меру нуль относительно B. С другой стороны, для того чтобы функция $\frac{h}{1-h}f$ могла играть роль f, необходимо, чтобы эта функция была измерима и, в частности, почти всюду конечна также относительно C, а следовательно, и относительно A. Отсюда вытекает, что e_1 должно быть меры нуль относительно A. Только при таком условии наша задача оказывается действительно решенной. Выполнение же этого условия проще всего обеспечить, потребовав, чтобы функционал A был абсолютно непрерывен относительно функционала B. Это означает, что все множества меры нуль относительно функционала B

являются также множествами меры нуль относительно функционала A, или, иначе говоря, из условий $f(x) \geqslant 0$, $Bf = 0$ следует, что $Af = 0$. В этом предположении всякая функция, измеримая относительно B, измерима также относительно A и C. Итак, мы пришли к следующей теореме:

Теорема: *Пусть A и B — два линейных положительных функционала общего вида, рассмотренного в п. 61, первоначально определенных на одном и том же множестве C_0 и удовлетворяющих условию А. Пусть, далее, A абсолютно непрерывен относительно B, т. е. любая суммируемая относительно B функция $f(x) \geqslant 0$, такая, что $Bf = 0$, суммируема также относительно A и для нее $Af = 0$. Тогда существует функция $g(x) \geqslant 0$, измеримая относительно B, такая, что*

$$Af = B(gf)$$

для всех измеримых относительно A и B функций $f(x)$, для которых хотя бы одна из частей этого равенства имеет смысл.

В частном случае, когда B является мажорантой функционала A, т. е. $Af \leqslant Bf$ для любой функции $f(x) \geqslant 0$ из множества C_0, имеют место неравенства $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$.

Отметим одно следствие этой теоремы:

Пусть B — положительный линейный функционал, удовлетворяющий условию А, и пусть A — линейный функционал в пространстве функций, суммируемых относительно B, т. е. Af определено для любого элемента из L_B, причем выполняются условия аддитивности, однородности и ограниченности; последнее в данном случае означает, что

$$|Af| \leqslant M \cdot B|f|, \tag{21}$$

где M — постоянный числовой множитель. Тогда существует функция $g(x)$, измеримая относительно B и не превосходящая M по абсолютной величине, такая, что

$$Af = B(gf) \tag{22}$$

для любого элемента f пространства L_B.

Чтобы в этом убедиться, достаточно применить доказанную теорему к положительной и отрицательной частям функционала A; в силу условия (21), для них обеих, деленных на M, функционал B служит мажорантой. В частном случае пространства L^1 функций, суммируемых в обычном смысле, представление функционала A в виде (22) было установлено в п. 36.