Глава IV

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

64. Понятие интегрального уравнения. Общая теория интегральных уравнений создана только в нынешнем столетии. Однако математики XIX века сталкивались иногда с частными случаями таких уравнений. Примером может служить задача обращения интеграла

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(y)\,dy,$$

весьма важная для некоторых вопросов математической физики; решение ее получил Фурье в 1811 г. в виде

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} g(x)\,dx.$$

В 1823 г. Абель, занимаясь обобщением задачи о таутохроне, пришел к уравнению

$$g(x)=\int_a^x \frac{f(y)}{(x-y)^{\alpha}}\,dy \qquad (0<\alpha<1,\ g(a)=0)$$

и нашел его решение[1])

$$f(y)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_a^y \frac{g'(x)}{(y-x)^{1-\alpha}}\,dx.$$

Это уравнение Абеля послужило предметом многочисленных позднейших исследований. Оно принадлежит классу интегральных уравнений вида

$$\int_a^x H(x,\ y) f(y)\,dy=g(x), \tag{1}$$

называемых теперь уравнениями Вольтерра. $H(x,\ y)$ и $g(x)$ являются заданными функциями, $f(x)$ — искомой. В том случае, когда $H(x,\ y)$ имеет непрерывную частную производную $H_x(x,\ y)$, уравнение (1) может быть сведено к уравнению

$$f(x)\,H(x,\ x)+\int_a^x H_x(x,\ y) f(y)\,dy=g'(x),$$

---

[1]) Абель [1], [2].

а если, кроме того, $H(x, x) \neq 0$, то к уравнению

$$f(x) + \int_a^x K(x, y) f(y)\, dy = g_1(x), \tag{2}$$

где

$$K(x, y) = \frac{H_x(x, y)}{H(x, x)} \quad \text{и} \quad g_1(x) = \frac{g'(x)}{H(x, x)}.$$

К интегральным уравнениям приводят, вообще говоря, линейные дифференциальные уравнения с начальными или краевыми условиями. Этим еще в 1837 г. воспользовался Лиувилль [1] в своих исследованиях в области линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Пусть, например, рассматривается уравнение

$$f''(x) + [\rho^2 - \sigma(x)] f(x) = 0$$

с начальными условиями $f(a) = 1$, $f'(a) = 0$. Так как решение уравнения

$$f''(x) + \rho^2 f(x) = g(x),$$

удовлетворяющее тем же начальным условиям, может быть представлено в виде

$$f(x) = \cos \rho (x - a) + \frac{1}{\rho} \int_a^x g(y) \sin \rho (x - y)\, dy,$$

то соответствующее решение исходного уравнения должно удовлетворять интегральному уравнению

$$f(x) - \frac{1}{\rho} \int_a^x \sigma(y) \sin \rho (x - y) f(y)\, dy = \cos \rho (x - a)$$

вида (2).

Уравнения вида (1) и (2), впервые рассмотренные Вольтерра [1] и Леру [1], представляют собой частные случаи интегральных уравнений

$$\int_a^b K(x, y) f(y)\, dy = g(x), \tag{1'}$$

$$f(x) - \int_a^b K(x, y) f(y)\, d(y) = g(x), \tag{2'}$$

в которых пределы интегрирования постоянны. Эти частные случаи соответствуют функциям $K(x, y)$, обращающимся в нуль при $x < y$. Функция $K(x, y)$ называется *ядром* уравнения.

В дальнейшем мы займемся интегральными уравнениями *второго рода*, т. е. уравнениями вида (2'). Их называют также уравнениями Фредгольма в честь этого выдающегося шведского ученого, впервые (в 1900 г.) разработавшего полную теорию таких уравнений[1]).

Основные результаты теории интегральных уравнений могут быть распространены на гораздо более общие функциональные уравнения. Пока мы лишь упомянем о некоторых возможных обобщениях: вместо интервала (a, b) в качестве области интегрирования можно взять произвольную область D в пространстве любого числа измерений, ограниченную или неограниченную, например какую-нибудь кривую или поверхность. Роль x и y будут тогда играть точки области D, по которой производится интегрирование. Вместо обычного интеграла можно брать интеграл Стильтьеса относительно некоторого распределения положительных масс и даже произвольный функционал типа, рассмотренного в п. 61.

65. Ограниченные ядра. Сначала рассмотрим уравнение

$$f(x)-\int_a^b K(x, y) f(y)\, dy=g(x), \tag{3}$$

в котором ядро $K(x, y)$ ограничено и непрерывно всюду, кроме линии $y=x$ (разрывы на прямой $y=x$ допускаются с целью охватить случай вольтерровских ядер, непрерывных в треугольнике $a \leqslant y \leqslant x \leqslant b$ и равных нулю вне его). Известная функция $g(x)$ предполагается суммируемой.

Какова бы ни была суммируемая функция $h(x)$, интеграл

$$\int_a^b K(x, y) h(y)\, dy$$

имеет смысл и представляет собой непрерывную функцию переменного x, которую мы условимся обозначать $Kh(x)$ или просто Kh. Запишем наше уравнение в виде

$$f=g+Kf$$

и попытаемся решить его методом последовательных приближений, взяв в качестве нулевого приближения функцию $f_0(x)=0$. Получим последовательность

$$f_1=g, \quad f_2=g+Kf_1=g+Kg, \quad f_3=g+Kf_2=g+Kg+K^2g, \quad \ldots$$
$$\ldots, \ f_n=g+Kf_{n-1}=g+Kg+\ldots+K^{n-1}g, \ \ldots,$$

где „итерации“ $K^n g$ определяются рекуррентными формулами

$$K^1g=Kg, \quad K^ng=K(K^{n-1}g) \text{ при } n \geqslant 2.$$

[1]) Фредгольм [1], [2].

Ряд

$$g+Kg+K^2g+\ldots+K^ng+\ldots \tag{4}$$

носит название *ряда Неймана*[1]).

Если ряд (4) *сходится равномерно, то его сумма f представляет собой решение уравнения* (3).

В самом деле, в случае равномерной сходимости ряд (4) можно интегрировать почленно, поэтому

$$Kf=K(g+Kg+K^2g+\ldots)=Kg+K(Kg)+K(K^2g)+\ldots=$$
$$=Kg+K^2g+K^3g+\ldots=f-g.$$

Равномерная сходимость ряда (4) заведомо имеет место, если

$$M=\max|K(x,\ y)|<\frac{1}{b-a}, \tag{5}$$

так как при этом ряд (4), начиная со второго члена, мажорируется сходящимся рядом

$$AM+AM^2(b-a)+AM^3(b-a)^2+\ldots+AM^n(b-a)^{n-1}+\ldots,$$

где

$$A=\int_a^b|g(x)|\,dx.$$

Впрочем, для равномерной сходимости ряда Неймана условие (5) далеко не необходимо. Приведем два примера:

1) Пусть $K(x,\ y)=\alpha(x)\beta(y)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — любые непрерывные функции, подчиненные единственному условию, что

$$\int_a^b \alpha(x)\beta(x)\,dx=0.$$

Тогда

$$Kg(x)=\int_a^b \alpha(x)\beta(y)g(y)\,dy=c\alpha(x)\qquad\left(c=\int_a^b \beta(y)g(y)\,dy\right),$$

$$K^2g(x)=\int_a^b \alpha(x)\beta(y)c\alpha(y)\,dy=c\alpha(x)\int_a^b \beta(y)\alpha(y)\,dy=0,$$

$$K^3g=K(K^2g)=0,\quad K^4g=K(K^3g)=0,\ \ldots;$$

таким образом, все члены ряда (4), начиная с третьего, равны нулю, и уравнение (3) имеет решение

$$f(x)=g(x)+Kg(x).$$

[1]) К. Нейман впервые строго доказал сходимость последовательных приближений в случае уравнения, к которому сводится задача Дирихле в теории потенциала (см. К. Нейман [1]). Аналогичное разложение встречается в упомянутой выше статье Лиувилля.

2) *Ядро Вольтерра* определяется условием:

$$K(x, y) = 0 \text{ при } a \leqslant x < y \leqslant b.$$

Сохраняя прежние обозначения

$$M = \max |K(x, y)|, \quad A = \int_a^b |g(x)|\,dx,$$

получаем

$$|Kg(x)| = \left|\int_a^x K(x, y)\,g(y)\,dy\right| \leqslant AM,$$

$$|K^2g(x)| = \left|\int_a^x K(x, y)\,[Kg(y)]\,dy\right| \leqslant \int_a^x M\cdot AM\,dy = AM^2(x-a),$$

$$|K^3g(x)| = \left|\int_a^x K(x, y)\,[K^2g(y)]\,dy\right| \leqslant \int_a^x M\cdot AM^2(y-a)\,dy =$$

$$= AM^3\frac{(x-a)^2}{2}$$

и, вообще,

$$|K^ng(x)| \leqslant AM^n\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Итак, ряд (4), начиная со второго члена, мажорируется рядом

$$AM + AM^2(b-a) + AM^3\frac{(b-a)^2}{2} + \ldots + AM^n\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots,$$

сходящимся при любом M. Следовательно, он сходится равномерно и дает решение уравнения.

66. Ядра с суммируемым квадратом. Линейные операторы в пространстве $\boldsymbol{L}^2$. Условие (5), как заметил Шмидт [2], может быть заменено более слабым условием

$$\int_a^b\int_a^b |K(x, y)|^2\,dx\,dy < 1. \tag{6}$$

Что же касается условия непрерывности, то от него вовсе можно отказаться; достаточно потребовать, чтобы квадрат ядра $K(x, y)$ был суммируем, т. е. чтобы само ядро принадлежало (комплексному) пространству L^2, соответствующему области интегрирования $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$. Это пространство условимся обозначать $\boldsymbol{L}^2$, сохранив обозначение L^2 для соответствующего пространства функций одного переменного x, заданных на интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Скалярное произведение и норма в пространстве L^2 будут обозначаться символами

$$(\,,\,) \text{ и } \|\;\|,$$

а в пространстве L^2 — символами

$$(,)\ \text{и}\ |\ |.$$

Ослабив таким образом предположения относительно ядра, мы вынуждены будем, напротив, наложить дополнительное ограничение на функцию $g(x)$: теперь мы будем предполагать суммируемой не только саму функцию, но и ее квадрат, т. е. мы потребуем, чтобы $g(x)$ принадлежала пространству L^2.

Итак, пусть $K(x, y)$ является элементом пространства L^2. Из теоремы Фубини о повторных интегралах (см. п. 40) следует, что интеграл

$$\int_a^b |K(x, y)|^2 dy$$

существует для почти всех x и

$$\int_a^b \left[\int_a^b |K(x, y)|^2 dy\right] dx = \int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx\, dy = |K|^2.$$

Следовательно, функция

$$k(x) = \left(\int_a^b |K(x, y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

принадлежит пространству L^2 и $\|k\| = |K|$.

Пусть $h(x)$ — какой-нибудь элемент пространства L^2. Для всех значений x, для которых $k(x)$ имеет определенное конечное значение, интеграл

$$\int_a^b K(x, y)\, h(y)\, dy$$

имеет смысл и представляет собой функцию, также принадлежащую L^2; обозначим ее $Kh(x)$. Справедливость высказанных относительно $Kh(x)$ утверждений вытекает из неравенств

$$\left|\int_a^b K(x, y)\, h(y)\, dy\right|^2 \leqslant \int_a^b |K(x, y)|^2 dy \cdot \int_a^b |h(y)|^2 dy = k^2(x)\, \|h\|^2, \quad (7)$$

$$\|Kh\|^2 = \int_a^b \left|\int_a^b K(x, y)\, h(y)\, dy\right|^2 dx \leqslant \int_a^b k^2(x)\, dx \cdot \|h\|^2 = |K|^2\, \|h\|^2.$$

Ядро $K(x, y)$, принадлежащее пространству L^2, порождает, таким образом, некоторый *оператор*, преобразующий пространство L^2 в себя:

$$h(x) \rightarrow Kh(x);$$

при этом, очевидно, $K(h_1 + h_2) = Kh_1 + Kh_2$, $K(ch) = cKh$ и, как мы только что показали, $\|Kh\| \leqslant |K|\, \|h\|$.

Вообще оператор T, переводящий элементы h пространства L^2 в элементы Th того же пространства, называется *линейным*, если он

1) *аддитивен*: $T(h_1+h_2)=Th_1+Th_2$,
2) *однороден*: $T(ch)=cTh$,
3) *ограничен*: существует постоянная M, такая, что

$$\|Th\|\leqslant M\|h\|.$$

Наименьшее из таких чисел M называется *нормой* оператора T и обозначается $\|T\|$.

Всякий линейный оператор *непрерывен* в том смысле, что если последовательность элементов $\{h_n\}$ пространства L^2 сходится в среднем к элементу h, то последовательность $\{Th_n\}$ сходится в среднем к Th; в самом деле,

$$\|Th_n-Th\|=\|T(h_n-h)\|\leqslant\|T\|\|h_n-h\|\to 0.$$

Обратно, всякий оператор T, аддитивный, однородный и непрерывный, вместе с тем ограничен, т. е. является *линейным* оператором. В самом деле, если бы он не был ограничен, то существовала бы последовательность $\{h_n\}$, для которой $\|Th_n\|>n\|h_n\|$; положив

$$g_n=\frac{1}{n\|h_n\|}h_n$$

мы получили бы

$$\|g_n\|=\frac{1}{n}\to 0 \text{ и } \|Tg_n\|>1,$$

что противоречит непрерывности оператора.

Ниже, в гл. VIII, нам понадобится обобщить понятие линейного оператора так, чтобы охватить им *неограниченные* операторы, но до тех пор мы будем придерживаться сформулированного здесь определения.

Для линейных операторов очевидным образом определяются действия сложения и умножения:

$$(cT)h=cTh,\quad (T_1+T_2)h=T_1h+T_2h,\quad (T_1T_2)h=T_1(T_2h);$$

легко видеть, что при этом

$$\|cT\|=|c|\|T\|,\quad \|T_1+T_2\|\leqslant\|T_1\|+\|T_2\|,\quad \|T_1T_2\|\leqslant\|T_1\|\|T_2\|;$$

в частности, для степеней оператора $T^2=TT$, $T^3=T(T^2)$, ... выполняются неравенства

$$\|T^2\|\leqslant\|T\|^2,\quad \|T^3\|\leqslant\|T\|^3,\ \ldots,\ \|T^n\|\leqslant\|T\|^n,\ \ldots .$$

Сходимость последовательности операторов $\{T_n\}$ к оператору T может быть определена по-разному. Если выполняется одно из следующих соотношений:

а) каково бы ни было f, T_nf сходится к Tf *слабо*;

б) каково бы ни было f, $T_n f$ сходится к Tf *сильно* (*т. е. в среднем*);

в) $\|T_n - T\| \to 0$,

то в соответствии с этим говорят, что последовательность $\{T_n\}$ а) *сходится слабо*, б) *сходится сильно* (*или просто сходится*), в) *сходится по норме*.

Сильная сходимость, очевидно, влечет за собой слабую.

Если $\{T_n\}$ сходится к T *по норме*, то, каков бы ни был элемент f,

$$\|T_n f - Tf\| = \|(T_n - T) f\| \leqslant \|T_n - T\| \|f\| \to 0,$$

т. е. $T_n f$ сильно сходится к Tf. Эта сходимость равномерна относительно f на любом ограниченном множестве в пространстве L^2, т. е. на таком множестве, элементы которого имеют равномерно ограниченные нормы. Поэтому сходимость по норме называется также *равномерной сходимостью*. Для равномерной сходимости справедлив критерий Коши: последовательность $\{T_n\}$ сходится равномерно тогда и только тогда, когда $\|T_n - T_m\| \to 0$ при m, $n \to \infty$.

После того, как мы ввели эти понятия, чрезвычайно важные для всего дальнейшего, вернемся к линейному оператору K в пространстве L^2, порожденному ядром $K(x, y)$, которое принадлежит L^2.

В силу (7),

$$\|K\| \leqslant |K|, \tag{8}$$

где, разумеется, $|K|$ означает норму функции $K(x, y)$ как элемента пространства L^2, а $\|K\|$ — норму оператора K в пространстве L^2. Из условия (6) следует, что

$$\|K\| < 1. \tag{9}$$

Какова бы ни была заданная функция $g(x)$, принадлежащая пространству L^2, ряд Неймана

$$g + Kg + K^2 g + \ldots \tag{10}$$

сходится в среднем, так как, в силу (9),

$$\|K^m g + K^{m+1} g + \ldots + K^n g\| \leqslant (\|K\|^m + \|K\|^{m+1} + \ldots + \|K\|^n) \|g\| \to 0$$

при m, $n \to \infty$. Пусть f — сумма этого ряда (в смысле сходимости в среднем); f является элементом пространства L^2 и для него

$$\|f\| \leqslant (1 + \|K\| + \|K\|^2 + \ldots) \|g\| = (1 - \|K\|)^{-1} \|g\|. \tag{11}$$

Так как оператор K непрерывен, то Kf можно вычислить путем почленного применения K к ряду (10). Мы получим таким образом

$$Kf = Kg + K^2 g + K^3 g + \ldots = f - g,$$

а это означает, что f служит решением интегрального уравнения

$$f - Kf = g.$$

Ряд (10) сходится также в обычном смысле, по крайней мере почти всюду, так как, в силу неравенства (7),

$$|K^n g(x)| \leqslant k(x) \| K^{n-1} g \| \leqslant k(x) \| K \|^{n-1} \| g \|.$$

Сумма этого ряда в обычном смысле должна почти всюду совпадать с его суммой в среднем $f(x)$.

Таким образом доказана следующая

Теорема. *Если ядро $K(x, y)$ удовлетворяет условию* (6), *то интегральное уравнение*

$$f - Kf = g$$

имеет решение f, принадлежащее L^2, какова бы ни была заданная функция g, принадлежащая L^2. Это решение представляется как сумма в среднем, а почти всюду даже как сумма в обычном смысле, ряда Неймана (10). *Вместо условия* (6) *можно потребовать, чтобы ядро $K(x, y)$ принадлежало пространству L^2 и оператор K удовлетворял условию* (9).

Если условия этой теоремы выполнены, то решение *единственно.* В самом деле, если $f_1 - Kf_1 = g$ и $f_2 - Kf_2 = g$, то $(f_1 - f_2) - K(f_1 - f_2) = 0$, откуда вытекает, что

$$\| f_1 - f_2 \| = \| K(f_1 - f_2) \| \leqslant \| K \| \| f_1 - f_2 \|.$$

Так как $\| K \| < 1$, то $\| f_1 - f_2 \| = 0$, следовательно, $f_1(x) = f_2(x)$ почти всюду.

67. Обратный оператор. Регулярные и особые точки. Пусть I — тождественный оператор в L^2, т. е. такой, который переводит любой элемент пространства L^2 в себя, а O — оператор, переводящий все элементы пространства L^2 в нуль. Тогда наше интегральное уравнение может быть записано в виде

$$(I - K) f = g.$$

Предполагая, что условие (9) выполняется, поставим в соответствие функции g решение f нашего уравнения. Мы получим таким образом в пространстве L^2 оператор $f = Rg$; оператор R, будучи аддитивным, однородным и, в силу (11), ограниченным, является линейным. Каково бы ни было g, $(I - K) Rg = (I - K) f = g$, следовательно,

$$(I - K) R = I. \tag{12}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что

$$(I - K) R (I - K) h = (I - K) h$$

при любом h из L^2; таким образом, уравнение $(I - K)\varphi = (I - K) h$ имеет единственное решение $\varphi = h$, так что $R(I - K) h = h$ и, следовательно,

$$R(I-K)=I. \tag{13}$$

Оператор R, удовлетворяющий равенствам (12) и (13), называется *обратным* по отношению к оператору $I-K$ и обозначается

$$R=(I-K)^{-1}.$$

Вообще линейный оператор S называется обратным по отношению к линейному оператору T и обозначается T^{-1}, если

$$TS=I \text{ и } ST=I.$$

Ниже, в гл. VIII, понятие обратного оператора будет обобщено в том же направлении, что и понятие линейного оператора.

Очевидно, что если операторы T_1 и T_2 имеют обратные, то это же верио и относительно их произведения, причем

$$(T_1T_2)^{-1}=T_2^{-1}T_1^{-1}.$$

Если обратный оператор существует, то он определяется *единственным* образом. Более того, если оператор T имеет „правый обратный" S_1 и „левый обратный" S_2, то эти последние непременно совпадают. В самом деле, если

$$TS_1=I \text{ и } S_2T=I,$$

то

$$S_1=IS_1=(S_2T)S_1=S_2(TS_1)=S_2I=S_2.$$

Существование одного лишь „правого обратного" оператора не обеспечивает еще, вообще говоря, существования „левого обратного", а тем самым и просто обратного. Но если известно, что оператор T переводит *различные* элементы в *различные* же элементы, т. е. если из $Tf_1=Tf_2$ следует $f_1=f_2$, то равенство $TS=I$ влечет за собой равенство $ST=I$ так же, как из (12) следовало (13).

Мы видели, что всякий линейный оператор вида $I-K$, где $\|K\|<1$, имеет обратный, выражающийся в виде ряда Неймана:

$$(I-K)^{-1}=I+K+K^2+\ldots+K^n+\ldots,$$

причем этот ряд сходится даже по норме; в самом деле,

$$\|(I-K)^{-1}-(I+K+K^2+\ldots+K^{n-1})\|\leqslant\sum_{m=n}^{\infty}\|K\|^m=$$
$$=\|K\|^n(I-\|K\|)^{-1}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

Разумеется, $(I-K)^{-1}$ может существовать и тогда, когда $\|K\|\geqslant 1$, что можно видеть на примерах, приведенных в конце п. 65.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение того же вида, но содержащее комплексный параметр λ:

$$(I-\lambda K)f=g.$$

Значение λ называется *регулярным*, если существует $(I-\lambda K)^{-1}$; в этом случае положим

$$(I-\lambda K)^{-1}=I+\lambda K_\lambda. \tag{14}$$

Это равенство однозначно определяет линейный оператор K_λ при любом регулярном λ, за исключением $\lambda=0$; мы полагаем, по определению, $K_0=K$, что, как мы увидим ниже, является продолжением K_λ по непрерывности. K_λ называется *резольвентным оператором*. Значения λ, не являющиеся регулярными, называются *особыми*.

Применив полученные нами результаты к оператору λK, мы придем к заключению, что *все значения* λ, *такие*, что $|\lambda|<\frac{1}{\|K\|}$, *регулярны и для этих значений*

$$(I-\lambda K)^{-1}=I+\lambda K+\lambda^2K^2+\ldots \tag{15}$$

в смысле сходимости операторов по норме.

По самому определению, оператор K_λ удовлетворяет уравнениям

$$(I+\lambda K_\lambda)(I-\lambda K)=(I-\lambda K)(I+\lambda K_\lambda)=I,$$

эквивалентным при $\lambda\neq 0$ уравнениям

$$\lambda K_\lambda K=\lambda KK_\lambda=K_\lambda-K; \tag{16}$$

эти последние удовлетворяются, очевидно, и при $\lambda=0$.

Пусть λ и μ — какие-нибудь два регулярных значения. Из уравнений (16), записанных для значений λ и μ, получим

$$(\lambda K_\lambda K)\,\mu K_\mu=(K_\lambda-K)\,\mu K_\mu,\qquad \lambda K_\lambda(\mu KK_\mu)=\lambda K_\lambda(K_\mu-K).$$

Так как левые части равны, то

$$\mu K_\lambda K_\mu-\mu KK_\mu=\lambda K_\lambda K_\mu-\lambda K_\lambda K,$$

откуда, в силу (16), следует, что

$$(\lambda-\mu)\,K_\lambda K_\mu=\lambda K_\lambda K-\mu KK_\mu=(K_\lambda-K)-(K_\mu-K)=K_\lambda-K_\mu$$

и

$$K_\lambda K_\mu=\frac{K_\lambda-K_\mu}{\lambda-\mu}. \tag{17}$$

Правая часть (17) симметрична относительно λ и μ, поэтому

$$K_\lambda K_\mu=K_\mu K_\lambda,$$

т. е. операторы K_λ и K_μ *перестановочны.*

Покажем, что регулярные точки образуют *открытое* множество. Точнее говоря, *если* μ — *регулярное значение, то все* λ, *удовлетворяющие неравенству*

$$|\lambda-\mu|<\frac{1}{\|K_\mu\|},$$

также регулярны, причем

$$K_\lambda = K_\mu + (\lambda-\mu) K_\mu^2 + (\lambda-\mu)^2 K_\mu^3 + \ldots$$

в смысле сходимости по норме.

Заметим, что, согласно выбору λ, значение $\lambda-\mu$ регулярно по отношению к оператору K_μ и отвечающий ему оператор, который можно обозначить $(K_\mu)_{\lambda-\mu}$, представляется указанным рядом. Остается только показать, что $(K_\mu)_{\lambda-\mu} = K_\lambda$, т. е. что

$$\lambda (K_\mu)_{\lambda-\mu} K = \lambda K (K_\mu)_{\lambda-\mu} = (K_\mu)_{\lambda-\mu} - K.$$

Так как, очевидно, $(K_\mu)_{-\mu} = K$, то, взяв в этом равенстве K_μ вместо K и $\lambda-\mu$, $-\mu$, вместо λ, μ, мы получим с помощью (17) требуемое соотношение.

Полученное для K_λ разложение показывает, между прочим, что норма оператора K_λ представляет собой непрерывную функцию переменного λ в любой регулярной точке μ. В самом деле,

$$|\|K_\lambda\| - \|K_\mu\|| \leqslant \|K_\lambda - K_\mu\| \leqslant |\lambda-\mu| \|K_\mu\|^2 + |\lambda-\mu|^2 \|K_\mu\|^3 + \ldots =$$
$$= |\lambda-\mu| \frac{\|K_\mu\|^2}{1-|\lambda-\mu| \|K_\mu\|} \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to \mu.$$

Обратно, пусть $\{\lambda_n\}$ — какая-нибудь последовательность регулярных точек, сходящаяся к некоторому λ^*; предположим, что нормы $\|K_{\lambda_n}\|$ ограничены, $\|K_{\lambda_n}\| \leqslant M$, и покажем, что тогда точка λ^* также регулярна. Действительно, из (17) вытекает, что

$$\|K_{\lambda_n} - K_{\lambda_m}\| \leqslant |\lambda_n - \lambda_m| \|K_{\lambda_n}\| \|K_{\lambda_m}\| \leqslant |\lambda_n - \lambda_m| M^2 \to 0$$

при m, $n \to \infty$. Таким образом, K_{λ_n} удовлетворяют критерию Коши в смысле сходимости по норме, следовательно, K_{λ_n} сходятся по норме к некоторому оператору K^*. Равенства (16), записанные для $\lambda = \lambda_n$, в пределе дадут

$$\lambda^* K^* K = \lambda^* K K^* = K^* - K,$$

откуда следует, что λ^* — регулярная точка и $K^* = K_{\lambda^*}$.

Подытожим полученные выводы:

Теорема. *Резольвентный оператор K_λ представляет собой аналитическую функцию переменного λ в любой регулярной (относительно K) точке μ. Функция K_λ не может быть продолжена аналитически за пределы множества регулярных точек: при приближении к любой особой точке норма оператора K_λ неограниченно возрастает.*

Этим предложением и оправдываются названия „регулярные" и „особые" точки.

Можно было бы продолжить изучение особых точек, рассмотрев соответствующие главные части разложений аналитической функции K_λ, построив аналог теории вычетов и сведя тем самым изучение ядер общего вида к случаю ядер конечного ранга[1]). Мы займемся этим в гл. XI.

68. Итерированные ядра. Резольвента. Мы показали в п. 66, что любая функция $K(x, y)$ из пространства $\boldsymbol{L}^2$ порождает в пространстве L^2 линейный оператор K с нормой $\|K\|$, не превосходящей норму $|K|$ функции $K(x, y)$ как элемента пространства $\boldsymbol{L}^2$. Но затем мы занимались самими операторами, не обращаясь к ядрам, которыми они порождены. Такой метод имеет то преимущество, что позволяет непосредственно обобщать получаемые результаты на более общие функциональные уравнения, в которых линейный оператор не является интегральным оператором описанного типа.

Теперь же мы выясним, какие действия над ядрами отвечают действиям над соответствующими операторами.

Ясно, что *если операторы F и G порождены ядрами $F(x, y)$ и $G(x, y)$, принадлежащими пространству $\boldsymbol{L}^2$, то операторы cF и $F+G$ порождаются ядрами $cF(x, y)$ и $F(x, y)+G(x, y)$*. Покажем, что *оператор $H=FG$ порождается ядром*

$$H(x, y)=\int_a^b F(x, z)\,G(z, y)\,dz,$$

причем это последнее принадлежит $\boldsymbol{L}^2$ и норма его удовлетворяет неравенству

$$|H| \leqslant |F|\,|G|.$$

В самом деле, $F(x, z)$ и $G(z, y)$ как функции от z измеримы и суммируемы в квадрате при любых фиксированных значениях x и y, за исключением, может быть, некоторых множеств e_F и e_G линейной меры нуль. Следовательно, $H(x, y)$ определена во всех точках (x, y) плоскости, для которых x не попадает в множество e_F, а y — в множество e_G, т. е. $H(x, y)$ определена почти для всех точек квадрата $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$. Исключив указанные для x и y значения, мы получим, в силу неравенства Шварца,

$$|H(x, y)|^2 \leqslant \int_a^b |F(x, z)|^2\,dz \cdot \int_a^b |G(z, y)|^2\,dz;$$

интегрируя по области $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$ и извлекая квадратные корни, придем к неравенству $|H| \leqslant |F|\,|G|$. Для произвольного h из L^2 функции Hh и $F(Gh)$ определяются интегралами

$$\int_a^b \left(\int_a^b F(x, z)\,G(z, y)\,dz\right) h(y)\,dy, \qquad \int_a^b F(x, z)\left(\int_a^b G(z, y)\,h(y)\,dy\right) dz;$$

[1]) Рисс [7] (стр. 113—121).

покажем, что эти интегралы существуют и совпадают для почти всех x, в частности для x, не принадлежащих множеству e_F. В силу теоремы Фубини, достаточно убедиться в том, что при любом таком значении $x=x_0$ функция $F(x_0, z)G(z, y)h(y)$ суммируема в области $a \leqslant z \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$. А это прямо следует из того, что $G(x, y)$ и $F(x_0, x)h(y)$ принадлежат пространству L_2.

Далее, из неравенства (8) п. 66 вытекает, что *если последовательность ядер сходится в среднем, то соответствующие операторы сходятся по норме.* В самом деле, если $F_n(x, y) \longrightarrow F(x, y)$ в среднем, то

$$\|F_n-F\| \leqslant |F_n-F| \longrightarrow 0.$$

Из сказанного выше следует, что если оператор K порожден ядром $K(x, y)$, то операторы K^2, K^3, ... порождаются так называемыми *итерированными ядрами* $K^{(2)}(x, y)$, $K^{(3)}(x, y)$, ..., которые определяются следующим образом:

$$K^{(1)}(x, y)=K(x, y)$$

и

$$K^{(n)}(x, y)=\int_a^b K(x, z)K^{(n-1)}(z, y)\,dz \quad (n=2, 3, \ldots).$$

Нормы итерированных ядер подчиняются неравенствам

$$|K^{(2)}| \leqslant |K||K|=|K|^2, \quad |K^{(3)}| \leqslant |K||K^{(2)}| \leqslant |K|^3, \ \ldots,$$
$$|K^{(n)}| \leqslant |K|^n, \ \ldots .$$

Рассмотрим ряд

$$K(x, y)+\lambda K^{(2)}(x, y)+\lambda^2 K^{(3)}(x, y)+\ldots, \tag{18}$$

где λ — комплексный параметр. Этот ряд мажорируется по норме $|\ |$ числовым рядом

$$|K|+|\lambda||K|^2+|\lambda|^2|K|^3+\ldots .$$

Поэтому при любом λ, удовлетворяющем неравенству

$$|\lambda|<\frac{1}{|K|}, \tag{19}$$

ряд (18) сходится в среднем и его сумма (в смысле сходимости в среднем) $K_\lambda(x, y)$ также является элементом пространства L^2. Порождаемый ею оператор K_λ тождествен оператору, определенному в предыдущем пункте; в самом деле, сходимость в среднем ряда (18) влечет за собой сходимость по норме соответствующих операторов, следовательно,

$$K_\lambda=K+\lambda K^2+\lambda^2 K^3+\ldots,$$

и наше утверждение получается из сравнения этого ряда с формулами (14) и (15).

При условии (19) ряд (18) сходится к $K_\lambda(x, y)$ не только в среднем, но и в обычном смысле, по крайней мере почти всюду; это вытекает из следующего неравенства, справедливого для $n > 2$:

$$|K^{(n)}(s, t)| = \left| \int_a^b \int_a^b K(s, x) K^{(n-2)}(x, y) K(y, t)\, dx\, dy \right| = \\ = |(K^{(n-2)}, H_{st})| \leqslant |K|^{n-2} |H_{st}|,$$

где $H_{st}(x, y)$ означает функцию $\overline{K(s, x) K(y, t)}$, принадлежащую пространству L^2 для почти всех пар значений s и t.

Итак, *значения* λ, *удовлетворяющие неравенству* (19), *регулярны относительно оператора* K, *и соответствующий резольвентный оператор также является оператором интегрального типа, т. е. порождается некоторым ядром* $K_\lambda(x, y)$, *принадлежащим пространству* L^2; *это ядро представляет собой сумму в среднем и — почти всюду — сумму в обычном смысле ряда* (18).

Условие (19) достаточно, но не необходимо для того, чтобы ряд (18) сходился в среднем. В примерах, приведенных в конце п. 65, ряды (18) сходятся в среднем (и даже равномерно) при любом значении λ. В случае ядра вида $K(x, y) = \alpha(x)\beta(y)$, где

$$\int_a^b \alpha(x) \beta(x)\, dx = 0,$$

это очевидно, так как соответствующие итерированные ядра все обращаются в нуль. В случае ядра $K(x, y)$ *типа Вольтерра*, удовлетворяющего неравенству $|K(x, y)| \leqslant M$, все итерированные ядра также вольтерровские и подчиняются неравенствам

$$|K^{(n)}(x, y)| \leqslant M^n \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (a \leqslant y \leqslant x \leqslant b),$$

в чем можно убедиться методом индукции. Ряд (18) при этом мажорируется сходящимся рядом с общим членом

$$|\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

В этих примерах все (комплексные) значения λ регулярны по отношению к K и резольвентный оператор K_λ порождается ядром $K_\lambda(x, y)$ — суммой ряда (18).

Но может случиться, что для некоторого оператора K значение λ регулярно, т. е. K_λ существует, тогда как ряд (18) расходится, и возникает вопрос, является ли в этом случае K_λ оператором интегрального типа или нет. Умножив справа обе части соотношения (14) на K и воспользовавшись уравнением (16), получим для K_λ такое выражение:

$$K_\lambda = (I - \lambda K)^{-1} K,$$

а в п. 69 будет доказана следующая

Лемма. *Всякий оператор, который можно представить в виде произведения TK, где K—оператор интегрального типа, также является оператором интегрального типа.*

Отсюда будет следовать, что *для любого регулярного λ резольвентный оператор K_λ порождается некоторым ядром $K_\lambda(x, y)$, называемым резольвентным ядром или резольвентой.*

Доказательство приведенной здесь леммы будет основано на одной теореме о приближении, весьма важной для всего дальнейшего.

Уместно заметить, что в пространстве L^2 существуют линейные операторы, не являющиеся операторами интегрального типа; таков, например, тождественный оператор I. В самом деле, если бы I порождался некоторым ядром $I(x, y)$, то для любых f и g из L^2 выполнялось бы равенство

$$\int_a^b \int_a^b I(x, y) f(y) \overline{g(x)}\, dy\, dx = (If, g) = (f, g).$$

Взяв в качестве f и g характеристические функции каких-нибудь двух непересекающихся интервалов, мы получили бы $(f, g) = 0$. При этом левая часть обратилась бы в интеграл функции $I(x, y)$ по прямоугольнику со сторонами, параллельными координатным осям, не пересекающемуся с прямой $y = x$. Так как все такие интегралы равны нулю, то $I(x, y) = 0$ почти всюду, что невозможно.

69. Приближение произвольного ядра ядрами конечного ранга. Особенно простой класс линейных операторов в пространстве L^2 образуют так называемые операторы *конечного ранга.* Это—операторы, которые могут быть представлены в виде

$$Kf = \sum_{i=1}^{r} (f, \psi_i) \varphi_i,$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ и $\psi_1, \ldots, \psi_r$—заданные элементы пространства L^2. Все они—операторы интегрального типа; соответствующие им ядра, очевидно, принадлежащие L^2, имеют вид

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x) \overline{\psi_i(y)}$$

и также называются ядрами *конечного ранга.*

Следующая теорема позволяет использовать ядра конечного ранга для изучения произвольных ядер.

Теорема. *Всякое ядро $K(x, y)$, принадлежащее L^2, может быть с любой степенью точности приближено в смысле метрики пространства L^2, т. е. в среднем, ядрами конечного ранга.*

Действительно, известно, что двойной ряд Фурье функции $K(x, y)$ с суммируемым квадратом сходится в среднем к этой функции; остается только рассмотреть частичные суммы этого ряда Фурье.

Эту теорему можно доказать и не прибегая к теории рядов Фурье.

Пусть $K_N(x, y) = K(x, y)$ там, где $|K(x, y)| \leqslant N$, и $K_N(x, y) = 0$ в остальных точках. Когда N стремится к бесконечности, функция

$$|K(x, y) - K_N(x, y)|^2$$

стремится к нулю, оставаясь все время меньше суммируемой функции $|K(x, y)|^2$. В силу теоремы Лебега, интеграл

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y) - K_N(x, y)|^2 \, dx \, dy$$

также будет стремиться к нулю. Задав произвольное $\varepsilon > 0$, можно выбрать такое N, чтобы выполнялось неравенство $\| K - K_N \| < \frac{\varepsilon}{2}$. Функция $K_N(x, y)$, будучи суммируемой, почти всюду равна пределу некоторой последовательности ступенчатых функций $\{\varphi_{Nn}(x, y)\}$, относительно которых можно предполагать, что они удовлетворяют неравенству $|\varphi_{Nn}(x, y)| \leqslant N$. Последовательность функций

$$|K_N(x, y) - \varphi_{Nn}(x, y)|^2 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ограничена (числом $4N^2$) и стремится к нулю, поэтому их интегралы также стремятся к нулю. Следовательно, $\| K_N - \varphi_{Nn} \| < \frac{\varepsilon}{2}$ при достаточно большом n. Отсюда, согласно неравенству Минковского,

$$\| K - \varphi_{Nn} \| \leqslant \| K - K_N \| + \| K_N - \varphi_{Nn} \| < \varepsilon,$$

и теорема доказана, так как всякая ступенчатая функция переменных x и y может быть представлена в виде

$$\sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x) \overline{\psi_i(y)}.$$

Это рассуждение применимо также в том случае, когда основная область

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad a \leqslant y \leqslant b$$

неограничена, т. е. когда $a = -\infty$ или $b = \infty$. При этом нужно только положить $K_N(x, y) = 0$ вне квадрата

$$-N \leqslant x \leqslant N, \quad -N \leqslant y \leqslant N$$

и выбрать $\varphi_{Nn}(x, y)$ так, чтобы и они равнялись нулю вне этого квадрата.

Приведем два следствия доказанной теоремы.

Прежде всего мы докажем лемму, сформулированную еще в предыдущем пункте, относительно линейных операторов вида TK, где K порождено некоторым ядром $K(x, y)$, принадлежащим L^2. Выберем последовательность ядер конечного ранга

$$K_n(x, y) = \sum_{i=1}^{r_n} \varphi_{ni}(x) \overline{\psi_{ni}(y)},$$

сходящуюся в среднем к $K(x, y)$. Обозначим $\chi_{ni} = T\varphi_{ni}$ и положим

$$H_n(x, y) = \sum_{i=1}^{r_n} \chi_{ni}(x) \overline{\psi_{ni}(y)}.$$

При любом фиксированном y функции $K_n(x, y)$ и $H_n(x, y)$ принадлежат L^2 и

$$H_n(x, y_0) = TK_n(x, y_0),$$

откуда следует, что

$$\int_a^b |H_n(x, y) - H_m(x, y)|^2 dx \leqslant \|T\|^2 \int_a^b |K_n(x, y) - K_m(x, y)|^2 dx.$$

Интегрируя по y, получаем

$$|H_n(x, y) - H_m(x, y)|^2 \leqslant \|T\|^2 |K_n(x, y) - K_m(x, y)|^2.$$

Сходимость в среднем последовательности $\{K_n(x, y)\}$ влечет за собой, в силу теоремы Рисса—Фишера, сходимость в среднем последовательности $\{H_n(x, y)\}$; предел этой последней обозначим $H(x, y)$. Обозначив теми же буквами соответствующие линейные операторы, получим

$$\|H_n - H\| \leqslant |H_n - H| \to 0$$

и

$$\|TK_n - TK\| = \|T(K_n - K)\| \leqslant \|T\| \|K_n - K\| \leqslant \|T\| |K_n - K| \to 0.$$

Итак, для любого элемента f из L^2

$$H_n f = \sum_i (f, \psi_{ni}) \chi_{ni} = T \sum_i (f, \psi_{ni}) \varphi_{ni} = TK_n f,$$

т. е.

$$H_n = TK_n,$$

следовательно,

$$H = TK.$$

Таким образом, оператор TK порожден ядром $H(x, y)$, что и требовалось доказать.

В качестве второго приложения теоремы о приближении покажем, что *различные ядра всегда порождают различные операторы*. Разумеется, ядра, не совпадающие лишь на множестве (плоской) меры нуль, считаются при этом тождественными.

Для этого достаточно показать, что ядро $K(x, y)$ порождает оператор K, обращающийся в нуль на всех элементах f, только тогда, когда $K(x, y)$ почти всюду равняется нулю.

Итак, пусть $K=0$; возьмем две какие-нибудь функции $f(x)$ и $g(x)$ из L^2 и образуем функцию $F(x, y)=g(x)\overline{f(y)}$, очевидно принадлежащую пространству L^2. Равенства

$$(K, F)=\int_a^b\int_a^b K(x, y)\overline{F(x, y)}\,dx\,dy=$$
$$=\int_a^b\left(\int_a^b K(x, y)f(y)\,dy\right)\overline{g(x)}\,dx=(Kf, g)=0$$

означают, что функция $K(x, y)$ ортогональна всем ядрам конечного ранга, а так как эти последние всюду плотны в L^2, то $K(x, y)$ ортогональна самой себе, т. е. $|K|^2=(K, K)=0$, откуда следует, что $K(x, y)=0$ почти всюду.

§ 2. АЛЬТЕРНАТИВА ФРЕДГОЛЬМА

70. Интегральные уравнения с ядрами конечного ранга. В случае ядра конечного ранга

$$K(x, y)=\sum_{i=1}^{r}\varphi_i(x)\overline{\psi_i(y)}$$

изучение интегрального уравнения

$$f-Kf=g$$

сводится к изучению системы линейных алгебраических уравнений. При этом мы вправе предположить, что функции φ_i, так же как и ψ_i, линейно независимы[1]); в противном случае ядро можно преобразовать так, чтобы оно представляло собой сумму того же вида, но с меньшим числом слагаемых.

Интегральное уравнение в рассматриваемом случае записывается так:

$$f-\sum_{i=1}^{r}(f, \psi_i)\varphi_i=g, \tag{20}$$

поэтому его решение должно иметь вид

$$f=g+\sum_{j=1}^{r}\xi_j\varphi_j, \tag{21}$$

где числовые коэффициенты ξ_j подлежат определению. Подставив (21) в (20), мы получим равные нулю линейные формы относительно φ_j, а так как эти функции линейно независимы, то все

[1]) Это означает, что линейная комбинация $\sum_{i=1}^{r}c_i\varphi_i(x)$ с числовыми коэффициентами почти всюду равна нулю только при $c_1=c_2=\ldots=c_r=0$.