Итак, пусть $K=0$; возьмем две какие-нибудь функции $f(x)$ и $g(x)$ из L^2 и образуем функцию $F(x, y)=g(x)\overline{f(y)}$, очевидно принадлежащую пространству L^2. Равенства

$$(K, F)=\int_a^b\int_a^b K(x, y)\overline{F(x, y)}\,dx\,dy=$$
$$=\int_a^b\left(\int_a^b K(x, y) f(y)\,dy\right)\overline{g(x)}\,dx=(Kf, g)=0$$

означают, что функция $K(x, y)$ ортогональна всем ядрам конечного ранга, а так как эти последние всюду плотны в L^2, то $K(x, y)$ ортогональна самой себе, т. е. $|K|^2=(K, K)=0$, откуда следует, что $K(x, y)=0$ почти всюду.

§ 2. АЛЬТЕРНАТИВА ФРЕДГОЛЬМА

70. Интегральные уравнения с ядрами конечного ранга. В случае ядра конечного ранга

$$K(x, y)=\sum_{i=1}^{r}\varphi_i(x)\overline{\psi_i(y)}$$

изучение интегрального уравнения

$$f-Kf=g$$

сводится к изучению системы линейных алгебраических уравнений. При этом мы вправе предположить, что функции φ_i, так же как и ψ_i, линейно независимы[1]; в противном случае ядро можно преобразовать так, чтобы оно представляло собой сумму того же вида, но с меньшим числом слагаемых.

Интегральное уравнение в рассматриваемом случае записывается так:

$$f-\sum_{i=1}^{r}(f, \psi_i)\varphi_i=g, \tag{20}$$

поэтому его решение должно иметь вид

$$f=g+\sum_{j=1}^{r}\xi_j\varphi_j, \tag{21}$$

где числовые коэффициенты ξ_j подлежат определению. Подставив (21) в (20), мы получим равные нулю линейные формы относительно φ_j, а так как эти функции линейно независимы, то все

---

[1] Это означает, что линейная комбинация $\sum_{i=1}^{r}c_i\varphi_i(x)$ с числовыми коэффициентами почти всюду равна нулю только при $c_1=c_2=\ldots=c_r=0$.

коэффициенты таких форм должны равняться нулю. Таким образом, получаем уравнения

$$\xi_j - \sum_{i=1}^{r} c_{ij}\xi_i = \eta_j \quad (j = 1, 2, \ldots, r), \tag{22}$$

где

$$c_{ij} = (\varphi_i, \psi_j), \quad \eta_j = (g, \psi_j).$$

Ясно, что, обратно, любая система значений $\{\xi_j\}$, удовлетворяющая уравнениям (22), будучи подставлена в (21), даст некоторое решение f уравнения (20).

Если определитель

$$d = |\delta_{ij} - c_{ij}| \quad (\delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \ \delta_{ii} = 1)$$

системы (22) не равен нулю, то имеется единственное решение

$$\xi_i = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{r} d\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\eta_j \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

где $d\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ означает алгебраическое дополнение элемента с номерами i, j в определителе d. Уравнение (20) имеет при этом единственное решение

$$f = g + \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} d\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}(g, \psi_j)\varphi_i = (I + K_1)g,$$

где K_1 означает оператор, порожденный ядром

$$K_1(x, y) = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} d\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\varphi_i(x)\overline{\psi_j(y)}. \tag{23}$$

В частности, соответствующие однородные уравнения

$$f - \sum_{i=1}^{r}(f, \psi_i)\varphi_i = 0, \tag{24}$$

$$\xi_j - \sum_{i=1}^{r} c_{ij}\xi_i = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, r) \tag{25}$$

имеют в этом случае единственные решения $f = 0$ и $\xi_j = 0$ ($j = 1, 2, \ldots, r$).

Если же $d = 0$, то система (25) и, следовательно, уравнение (24) имеют ненулевые решения; при этом число линейно независимых решений такого рода равно разности между порядком и рангом матрицы $(\delta_{ij} - c_{ij})$.

Рассмотрим, кроме того, интегральное уравнение

$$f' - K^* f' = g', \tag{26}$$

в котором ядро $K^*(x, y)$ — „сопряженное“ по отношению к $K(x, y)$ —

определяется равенством $K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}$; в нашем случае

$$K^*(x, y) = \sum_{i=1}^{r} \psi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}.$$

Если c_{ij}^*, d^*, $d^*\binom{i}{j}$ означают величины, определенные выше, но относящиеся к ядру $K^*(x, y)$, то $c_{ij}^* = (\psi_i, \varphi_j) = \overline{(\varphi_j, \psi_i)} = \overline{c}_{ji}$, откуда следует, что $d^* = \overline{d}$, $d^*\binom{i}{j} = \overline{d\binom{j}{i}}$ и что матрицы $(\delta_{ij} - c_{ij}^*)$ и $(\delta_{ij} - c_{ij})$ имеют одинаковый ранг.

Следовательно, если $d \neq 0$, то и $d^* \neq 0$ и уравнение (26) имеет при любом g' единственное решение f'; если же $d = d^* = 0$, то уравнение (24) и уравнение

$$f' - \sum_{i=1}^{r} (f', \varphi_i) \psi_i = 0 \tag{27}$$

имеют одно и то же число ν ($\nu \geqslant 1$) линейно независимых решений.

Впрочем, и тогда, когда $d = 0$, уравнение (20) имеет решение, если только функция g ортогональна всем решениям f' уравнения (27). В самом деле, положив

$$f = g + \sum \xi_j \varphi_j, \quad f' = \sum \xi_j' \psi_j, \quad \eta_j = (g, \psi_j),$$

перейдем к системам алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\xi_j - \sum_{i=1}^{r} c_{ij} \xi_i = \eta_j, \\ &\xi_j' - \sum_{i=1}^{r} \overline{c_{ji}} \xi_i' = 0 \end{aligned}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

и заметим, что ортогональность функций g и f' означает ортогональность векторов $\eta = \{\eta_j\}$ и $\xi' = \{\xi_j'\}$, так как

$$(g, f') = (g, \sum \xi_j' \psi_j) = \sum \overline{\xi_j'} (g, \psi_j) = \sum \overline{\xi}_j' \eta_j = (\eta, \xi').$$

Таким образом, дело сводится к известной теореме линейной алгебры[1]), которая гласит, что система уравнений

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ji} x_i = y_j \quad (j = 1, 2, \ldots, r) \tag{28}$$

---

[1]) Эта теорема вытекает из тождества

$$\sum_j \Big(x_j' \overline{\sum_i a_{ji} x_i} \Big) = \sum_i \Big(\sum_j \overline{a}_{ji} x_j' \Big) \overline{x}_i.$$

В самом деле, мы видим, что векторы y, выражающиеся в виде (28), и решения x' системы (29) служат ортогональными дополнениями друг друга в r-мерном (комплексном) векторном пространстве.

имеет решение $x=\{x_i\}$ тогда и только тогда, когда вектор $y=\{y_i\}$ ортогонален всем векторам $x'=\{x'_i\}$, удовлетворяющим сопряженной однородной системе

$$\sum_{i=1}^{r}\overline{a_{ij}}x'_i=0 \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ r). \tag{29}$$

Отсюда для интегральных уравнений с ядрами конечного ранга получается следующая

Теорема. *Интегральные уравнения*

$$(\mathrm{I})\, f-Kf=g, \quad (\mathrm{I}^*)\, f'-K^*f'=g'$$

с ядрами

$$K(x,\ y), \quad K^*(x,\ y)=\overline{K(y,\ x)}$$

либо имеют единственные решения f, f', каковы бы ни были заданные функции g, g', в частности единственные решения $f=0$, $f'=0$ при $g=0$, $g'=0$, либо соответствующие однородные уравнения

$$(\mathrm{H})\, \varphi-K\varphi=0, \quad (\mathrm{H}^*)\, \varphi'-K^*\varphi'=0$$

допускают ненулевые решения, причем число ν линейно независимых решений конечно и одинаково для обоих уравнений.

Во втором случае условие, необходимое и достаточное для того, чтобы уравнения (I) *и* (I*) *имели решения, состоит в том, что функция g должна быть ортогональна всем решениям φ' уравнения* (H*), *а g' должна быть ортогональна всем решениям φ уравнения* (H).

Мы увидим ниже, что альтернатива, высказанная в этой теореме,— так называемая *альтернатива Фредгольма* — справедлива и для уравнений *с произвольными ядрами*.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение

$$f-\lambda Kf=g,$$

содержащее параметр λ. В выкладках, которые были только что проведены, придется вместо $K(x,\ y)$ взять $\lambda K(x,\ y)$; при этом вместо c_{ij} появятся λc_{ij}, а определители d и $d\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ окажутся многочленами от λ, которые мы обозначим $d(\lambda)$ и $d\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix};\ \lambda\Big)$. Так как $d(0)=1$, то $d(\lambda)$ не обращается в нуль тождественно и, следовательно, имеет конечное число нулей $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_s$. Все значения λ, отличные от $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_s$, регулярны, и резольвента равна

$$K_\lambda(x, y) = \frac{1}{d(\lambda)} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} d\left(\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}; \lambda\right) \varphi_i(x) \overline{\psi_j(y)}.$$

Особыми точками будут как раз $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, так как при этих значениях λ уравнение $f - \lambda K f = g$ имеет решение лишь при специальном выборе g, следовательно, оператор $I - \lambda K$ не имеет обратного.

Итак, *для интегрального уравнения с ядром конечного ранга может существовать лишь конечное число особых точек; его резольвента представляет собой рациональную функцию параметра λ, имеющую полюсы в точках $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$.*

71. Интегральные уравнения с ядрами общего вида. Результаты, полученные в предыдущем пункте, могут быть распространены на интегральные уравнения с произвольными ядрами с помощью теоремы о приближении, доказанной в п. 69. При этом можно идти различными путями. Можно, в частности, заменить интегральное уравнение с заданным ядром $K(x, y)$ последовательностью интегральных уравнений с ядрами $L_n(x, y)$ конечного ранга, такими, что $|K - L_n| \to 0$, и исследовать поведение решений таких уравнений при $n \to \infty$[1]). Иначе можно взять одно ядро $L(x, y)$ конечного ранга, такое, чтобы разность $K(x, y) - L(x, y)$ была „мала" и к ней можно было бы применить метод последовательных приближений. Этим вторым путем, предложенным Шмидтом [2], мы и воспользуемся[2]).

Итак, рассмотрим интегральное уравнение

$$(I - \lambda K) f = g$$

с ядром $K(x, y)$, принадлежащим L^2. Зададимся каким-нибудь положительным числом ω и возьмем ядро конечного ранга[3])

$$L(x, y) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x) \overline{\psi_i(y)},$$

такое, чтобы норма разности $H(x, y) = K(x, y) - L(x, y)$ удовлетворяла неравенству

$$|H| \leqslant \frac{1}{\omega}.$$

Согласно п. 67, все значения λ, расположенные внутри окружности

$$C_\omega\colon \ |\lambda| = \omega,$$

[1]) Гурса [1], [2] (стр. 386—390); Лебег [8]; Курант [1]; Курант и Гильберт [1] (гл. III, 3).

[2]) В форме, предложенной Радоном [2].

[3]) Предполагается, что функции φ_i, так же как и ψ_i, линейно независимы.

регулярны по отношению к оператору H, порожденному ядром $H(x, y)$, и для этих значений λ

$$(I-\lambda H)^{-1}=I+\lambda H_\lambda=I+\lambda H+\lambda^2H^2+\lambda^3H^3+\ldots .$$

Поэтому

$$I-\lambda K=I-\lambda H-\lambda L=(I-\lambda H)[I-\lambda(I-\lambda H)^{-1}L]=$$
$$=(I-\lambda H)[I-\lambda L(\lambda)], \qquad (30)$$

откуда следует, что

$$L(\lambda)=(I-\lambda H)^{-1}L$$

представляет собой оператор конечного ранга:

$$L(\lambda)f=\sum_{i=1}^{r}(f, \psi_i)\varphi_{\lambda, i},$$

где [1])

$$\varphi_{\lambda, i}=(I-\lambda H)^{-1}\varphi_i=\varphi_i+\lambda H\varphi_i+\lambda^2H^2\varphi_i+\ldots .$$

Возьмем величины

$$c_{ij}=c_{ij}(\lambda), \quad d=d(\lambda), \quad d\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}=d\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}; \lambda\Big)$$

(см. п. 70), соответствующие оператору $\lambda L(\lambda)$ конечного ранга. Так как

$$c_{ij}(\lambda)=\lambda(\varphi_{\lambda, i}, \psi_j)=\lambda(\varphi_i, \psi_j)+\lambda^2(H\varphi_i, \psi_j)+\lambda^3(H^2\varphi_i, \psi_j)+\ldots,$$

то все они являются голоморфными функциями переменного λ внутри окружности C_ω. Определитель $d(\lambda)$, будучи равен 1 в точке $\lambda=0$, не обращается в нуль тождественно, и, следовательно, его нули не могут иметь предельных точек внутри C_ω.

Нам известно (см. п. 70), что обратный оператор

$$[I-\lambda L(\lambda)]^{-1}=I+\lambda L_\lambda(\lambda)$$

существует тогда и только тогда, когда $d(\lambda)\neq 0$. С другой стороны, так как оператор $(I-\lambda H)^{-1}$ существует при любом значении λ, заключенном внутри C_ω, то, согласно (30), при $|\lambda|<\omega$ оператор $(I-\lambda K)^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда существует $[I-\lambda L(\lambda)]^{-1}$; в этом случае

$$I+\lambda K_\lambda=(I-\lambda K)^{-1}=[I-\lambda L(\lambda)]^{-1}(I-\lambda H)^{-1}=$$
$$=[I+\lambda L_\lambda(\lambda)][I+\lambda H_\lambda]$$

и, следовательно,

$$K_\lambda=L_\lambda(\lambda)+\lambda L_\lambda(\lambda)H_\lambda+H_\lambda.$$

---

[1]) Функции $\varphi_{\lambda, i}$ $(i=1, 2, \ldots, r)$ также линейно независимы; в самом деле, из $\sum c_i\varphi_{\lambda, i}=0$ следовало бы, что

$$(I-\lambda H)\sum_i c_i\varphi_{\lambda, i}=\sum_i c_i\varphi_i=0.$$

Согласно предыдущему пункту, $L_\lambda(\lambda)$ есть оператор конечного ранга:

$$L_\lambda(\lambda) f = \frac{1}{d(\lambda)} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} d\left(\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}; \lambda\right) (f, \psi_j)\, \varphi_{\lambda, i}.$$

Подставив в это выражение $H_\lambda f$ вместо f, мы увидим, что и $L_\lambda(\lambda) H_\lambda$ является оператором конечного ранга:

$$L_\lambda(\lambda) H_\lambda f = \frac{1}{d(\lambda)} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} d\left(\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}; \lambda\right) (f, H_\lambda^* \psi_j)\, \varphi_{\lambda, i};$$

в этом равенстве H_λ^* означает оператор, порожденный сопряженным ядром

$$H_\lambda^*(x, y) = \overline{H_\lambda(y, x)}.$$

Итак, *все точки внутри C_ω регулярны по отношению к оператору K, за исключением тех точек, в которых $d(\lambda)$ обращается в нуль; эти последние не имеют точек накопления внутри C_ω. Резольвентный оператор имеет вид*

$$K_\lambda = \frac{G(\lambda)}{d(\lambda)} + H_\lambda, \tag{31}$$

где $G(\lambda)$ — оператор конечного ранга, выражающийся формулой

$$G(\lambda) f = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} d\left(\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}; \lambda\right) [(f, \psi_j)\, \varphi_{\lambda, i} + \lambda (f, H_\lambda^* \psi_j)\, \varphi_{\lambda, i}].$$

Выбрав достаточно большое ω, можно таким способом построить резольвентный оператор для любого регулярного значения λ, а коль скоро известен K_λ, решение f уравнения $f - \lambda K f = g$ получается в виде $f = g + \lambda K_\lambda g$, каково бы ни было заданное g.

Резольвента $K_\lambda(x, y)$ также находится без труда; в самом деле,

$$H_\lambda(x, y) = H(x, y) + \lambda H^{(2)}(x, y) + \lambda^2 H^{(3)}(x, y) + \ldots$$

(см. п. 68), а выражение $G(x, y; \lambda)$ получается прямо из формулы для $G(\lambda)$.

В следующих пунктах мы рассмотрим *особые* значения λ. Пока же заметим, что эти особые значения не могут иметь точек накопления внутри окружности C_ω, а так как ω может быть выбрано сколь угодно большим, то отсюда следует

Теорема. *Особые точки не могут иметь конечных точек накопления в комплексной плоскости; следовательно, они образуют либо конечное множество (может быть, пустое), либо счетную последовательность, стремящуюся по модулю к ∞.*

72. Разложение оператора, соответствующее заданной особой точке. Пусть λ_0 — какая-нибудь особая точка по отношению к оператору K. Рассмотрим представление (31) резольвентного оператора K_λ в регулярных точках внутри некоторой окружности C_ω с центром в 0, охватывающей λ_0. Пусть ν — кратность λ_0 как нуля функции $d(\lambda)$; тогда $\frac{1}{d(\lambda)}$ можно разложить вблизи λ_0 в ряд Лорана, который будет начинаться с члена $(\lambda-\lambda_0)^{-\nu}$. Функции $d\left(\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}; \lambda\right)$, $\varphi_{\lambda, i}$ и H_λ разложатся в степенные ряды, мажорируемые (первые два в обычном смысле, третий — по норме) в любом круге, лежащем внутри C_ω, сходящимися числовыми рядами, откуда следует, что эти ряды можно расположить по степеням $\lambda-\lambda_0$ и перемножить почленно. Таким путем получим формулу

$$K_\lambda = \frac{A(\lambda-\lambda_0)}{(\lambda-\lambda_0)^\nu} + B(\lambda-\lambda_0), \tag{32}$$

в которой $A(\lambda-\lambda_0)$ представляет собой многочлен относительно $\lambda-\lambda_0$ степени $\leqslant \nu-1$, а $B(\lambda-\lambda_0)$ при малых $|\lambda-\lambda_0|$ разлагается в ряд по степеням $\lambda-\lambda_0$, сходящийся по норме:

$$A(\lambda-\lambda_0) = A_0 + (\lambda-\lambda_0)A_1 + \ldots + (\lambda-\lambda_0)^{\nu-1}A_{\nu-1},$$
$$B(\lambda-\lambda_0) = B_0 + (\lambda-\lambda_0)B_1 + \ldots + (\lambda-\lambda_0)^n B_n + \ldots;$$

коэффициенты A_k многочлена $A(\lambda-\lambda_0)$ являются операторами *конечного ранга*.

Таким образом, *особая точка λ_0 служит полюсом резольвентного оператора*, рассматриваемого как функция от λ, и (32) есть не что иное, как разложение его на „главиую" и „правильную" части, соответствующее данному полюсу. Главная часть

$$S(\lambda) = \frac{A(\lambda-\lambda_0)}{(\lambda-\lambda_0)^\nu},$$

имея в числителе многочлен, определена для всех комплексных $\lambda \neq \lambda_0$. Правильная часть

$$R(\lambda) = B(\lambda-\lambda_0)$$

определена, согласно (32), там же, где определен K_λ, т. е. во всех регулярных точках, и как аналитическая функция от λ она имеет, за исключением λ_0, те же особенности, что и K_λ.

Подставив выражение (32) резольвентного оператора K_λ в уравнение (17) п. 67

$$(\lambda-\mu)K_\lambda K_\mu = K_\lambda - K_\mu$$

и положив

$$u = \lambda-\lambda_0, \qquad v = \mu-\lambda_0,$$

мы получим

$$(u-v)\left[u^{-\nu}A(u) + B(u)\right]\left[v^{-\nu}A(v) + B(v)\right] =$$
$$= u^{-\nu}A(u) + B(u) - v^{-\nu}A(v) - B(v)$$

откуда, по умножении на $\frac{u^\nu v^\nu}{u-v}$, следует

$$[A(u)+u^\nu B(u)][A(v)+v^\nu B(v)] = \frac{v^\nu A(u)-u^\nu A(v)}{u-v} + \\ + \frac{B(u)-B(v)}{u-v} u^\nu v^\nu. \tag{33}$$

Считая $|u|$ и $|v|$ достаточно малыми, представим $A(u)$ и $A(v)$ в виде многочленов степени $\leqslant \nu-1$, а $B(u)$ и $B(v)$ — в виде степенных рядов и разделим соответствующие выражения [см. правую часть (33)] на $u-v$; такое деление осуществимо, так как

$$\frac{v^\nu u^\varkappa - u^\nu v^\varkappa}{v-u} = v^{\nu-1}u^\varkappa + v^{\nu-2}u^{\varkappa+1} + \ldots + v^\varkappa u^{\nu-1} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \varkappa < \nu.$$

Сравнив между собой члены, содержащие u в степени $<\nu$, получим из (33)

$$A(u)[A(v)+v^\nu B(v)] = \frac{u^\nu A(u)-u^\nu A(v)}{u-v}; \tag{34}$$

далее, сравнив в (34) члены, содержащие v в степени $<\nu$, получим

$$A(u)A(v) = \frac{v^\nu A(u)-u^\nu A(v)}{u-v}. \tag{35}$$

Из (34) и (35) следует, что

$$A(u)B(v)=0. \tag{36}$$

Поменяв ролями u и v, получим

$$B(u)A(v)=0. \tag{37}$$

Так как $A(u)$ представляет собой многочлен, а $B(u)$ — аналитическую функцию переменного u, то равенства (35) — (37), установленные лишь для малых u и v, распространяются на все значения u и v, для которых $B(u)$ и $B(v)$ определены.

Сопоставив (33) с (35) — (37), получим окончательно

$$B(u)B(v) = \frac{B(u)-B(v)}{u-v}. \tag{38}$$

Так как точка $\lambda=0$ — правильная и $K_0=K$, то, в силу (32),

$$K=S+R,$$

где обозначено $S=S(0)$, $R=R(0)$.

Напишем соотношения (35) и (38), положив в них сначала $u=\lambda-\lambda_0$, $v=-\lambda_0$, а затем $u=-\lambda_0$, $v=\lambda-\lambda_0$:

$$\lambda S(\lambda)S = \lambda SS(\lambda) = S(\lambda)-S,$$
$$\lambda R(\lambda)R = \lambda RR(\lambda) = R(\lambda)-R;$$

первые из этих равенств справедливы для всех λ, отличных от λ_0, а вторые — для всех регулярных (по отношению к K) значений λ и для $\lambda=\lambda_0$. Согласно сказанному в п. 67, из этих уравнений следует, что

$I+\lambda S(\lambda)=(I-\lambda S)^{-1}$ при $\lambda\neq\lambda_0$,

$I+\lambda R(\lambda)=(I-\lambda R)^{-1}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{при регулярных по отношению к } K\\ \text{значениях } \lambda \text{ и при } \lambda=\lambda_0.\end{array}\right.$

Положив в (36) и (37) $u=v=-\lambda_0$, мы придем к равенству

$$SR=RS=O.$$

Заметим, наконец, что S, будучи оператором конечного ранга, порождается некоторым ядром $S(x, y)$ конечного ранга, и, следовательно, оператор R порождается ядром $R(x, y)=K(x, y)-$ $-S(x, y)$.

Итак, доказана

Теорема о разложении. *Всякой особой точке λ_0 соответствует представление оператора K в виде суммы двух линейных операторов S и R, $K=S+R$, из которых S — оператор конечного ранга. При этом*

1) $SR=RS=O$;

2) *точка λ_0 — регулярная по отношению к R и особая по отношению к S;*

3) *все $\lambda\neq\lambda_0$ регулярны по отношению к S;*

4) *точка $\lambda\neq\lambda_0$ регулярна по отношению к R тогда и только тогда, когда она регулярна по отношению к K.*

Указанному разложению соответствует разложение ядра: $K(x, y)=S(x, y)+R(x, y)$, где $S(x, y)$ — ядро конечного ранга.

73. Альтернатива Фредгольма в случае произвольного ядра. С помощью только что установленного разложения мы докажем альтернативу Фредгольма для случая произвольного ядра $K(x, y)$, принадлежащего L^2, сведя эту задачу к случаю ядра конечного ранга. Заметим, что при доказательстве мы не воспользуемся свойствами 3) и 4) указанного разложения.

Итак, рассмотрим интегральные уравнения

$$f-Kf=g \text{ и } f'-K^*f'=g',$$

ядрами которых служат

$$K(x, y) \text{ и } K^*(x, y)=\overline{K(y, x)}.$$

Рассмотрим отдельно два случая: первый, когда для $I-K$ существует обратный оператор, и второй, когда такого обратного нет.

Первый случай. Пусть существует резольвентный оператор K_1, порожденный резольвентой $K_1(x, y)$, удовлетворяющий соотношениям [см. п. 67, формулу (16)]

$$K_1K=KK_1=K_1-K.$$

Записав соответствующие равенства для ядер, поменяв в них местами x и y, взяв сопряженные значения и снова вернувшись к операторам, получим

$$K^*K_1^* = K_1^*K^* = K_1^* - K^*$$

(при этом мы воспользовались доказанным в п. 69 свойством интегрального оператора однозначно определять порождающее его ядро). Эти равенства показывают, что $(I-K^*)^{-1}$ также существует и равен $I+K_1^*$.

Таким образом, в рассматриваемом случае оба уравнения допускают единственные решения

$$f=(I+K_1)g, \quad f'=(I+K_1^*)g',$$

каковы бы ни были функции g и g', принадлежащие L^2.

Второй случай. Точка $\lambda=1$ — особая по отношению к K. Пусть $K=S+R$ — соответствующее разложение оператора K. Рассмотрев, как это было сделано выше, соответствующие ядра и воспользовавшись равенствами

$$K=S+R, \quad SR=RS=O,$$

получим

$$K^*=S^*+R^*, \quad R^*S^*=S^*R^*=O.$$

Отсюда вытекают соотношения

а) $I-K=(I-S)(I-R)$, а*) $I-K^*=(I-R^*)(I-S^*)$,

б) $I-K=(I-R)(I-S)$, б*) $I-K^*=(I-S^*)(I-R^*)$.

Так как $(I-R)^{-1}$ существует, то существует и $(I-R^*)^{-1}$ (см. первый случай), поэтому

в) $(I-K)(I-R)^{-1}=I-S$, в*) $(I-R^*)^{-1}(I-K^*)=I-S^*$,

г) $(I-R)^{-1}(I-K)=I-S$, г*) $(I-K^*)(1-R^*)^{-1}=1-S^*$.

Из свойств б) и г) следует, что однородные интегральные уравнения

$$(I-K)f=0, \quad (I-S)f=0$$

имеют одни и те же решения f. То же, в силу а*) и в*), справедливо по отношению к уравнениям

$$(I-K^*)f'=0, \quad (I-S^*)f'=0.$$

Но S представляет собой оператор конечного ранга, и 1 является для него особой точкой; следовательно, согласно теореме п. 70, уравнения $(I-S)f=0$ и $(I-S^*)f'=0$ имеют одинаковое число $s\geqslant 1$ линейно независимых решений.

Что касается неоднородного уравнения $(I-K)f=g$, то, в силу а) и в), оно имеет решение f тогда и только тогда, когда существует решение φ уравнения $(I-S)\varphi=g$; при этом f и φ связаны соотношениями $\varphi=(I-R)f$ и $f=(I-R)^{-1}\varphi$. Согласно же п. 70, уравнение $(I-S)\varphi=g$ имеет решение только в том случае, если g ортогонально всем решениям f' уравнения $(I-S^*)f'=0$ или, что то же самое, решениям уравнения $(I-K^*)f'=0$. Если это последнее условие удовлетворяется, то общим решением уравнения $(I-K)f=g$ будет, очевидно, сумма какого-нибудь частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения $(I-K)f=0$.

Мы доказали, таким образом, что *альтернатива Фредгольма, установленная в п. 70 для интегральных уравнений с ядрами конечного ранга, справедлива и для интегральных уравнений с произвольными ядрами, принадлежащими L^2.*

§ 3. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ФРЕДГОЛЬМА

74. Метод Фредгольма. Здесь мы изложим вкратце метод, которым Фредгольм [1], [2] впервые решил интегральное уравнение

$$f(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ y)\,f(y)\,dy=g(x) \tag{39}$$

в предположении, что ядро $K(x,\ y)$ *ограничено* и *непрерывно*.

Фредгольм воспользовался приемом, еще ранее примененным Вольтерра и состоящим в том, что интеграл в (39) заменяется суммой

$$\sum_{j=1}^{n}K(x,\ \xi_j)\,f(\xi_j)\,h \qquad \left(h=\frac{b-a}{n},\ \xi_j=a+jh\right)$$

и само уравнение (39) рассматривается в точках $x=\xi_i$ ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$). При этом появляется система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $f_j=f(\xi_j)$ ($j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$):

$$f_i-\lambda h\sum_{j=1}^{n}K_{ij}f_j=g_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{40}$$

где обозначено $K_{ij}=K(\xi_i,\ \xi_j)$ и $g_i=g(\xi_i)$.

Определитель этой системы может быть представлен в виде

$$d_\lambda=1-\lambda h\sum_i K_{ii}+\frac{\lambda^2h^2}{2!}\sum_{i,\,j}\begin{vmatrix}K_{ii} & K_{ij}\\ K_{ji} & K_{jj}\end{vmatrix}-\ldots+$$
$$+(-1)^n\frac{\lambda^n h^n}{n!}\sum_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n}\begin{vmatrix}K_{i_1i_1} & K_{i_1i_2} & \ldots & K_{i_1i_n}\\ K_{i_2i_1} & K_{i_2i_2} & \ldots & K_{i_2i_n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ K_{i_ni_1} & K_{i_ni_2} & \ldots & K_{i_ni_n}\end{vmatrix}. \tag{41}$$

Так как d_λ — многочлен от λ, не равный нулю тождественно, то система (40) имеет единственное решение при любом λ, за исклю-