ны соотношениями $\varphi=(I-R)f$ и $f=(I-R)^{-1}\varphi$. Согласно же п. 70, уравнение $(I-S)\varphi=g$ имеет решение только в том случае, если g ортогонально всем решениям f' уравнения $(I-S^*)f'=0$ или, что то же самое, решениям уравнения $(I-K^*)f'=0$. Если это последнее условие удовлетворяется, то общим решением уравнения $(I-K)f=g$ будет, очевидно, сумма какого-нибудь частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения $(I-K)f=0$.

Мы доказали, таким образом, что *альтернатива Фредгольма, установленная в п. 70 для интегральных уравнений с ядрами конечного ранга, справедлива и для интегральных уравнений с произвольными ядрами, принадлежащими* L^2.

§ 3. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ФРЕДГОЛЬМА

74. Метод Фредгольма. Здесь мы изложим вкратце метод, которым Фредгольм [1], [2] впервые решил интегральное уравнение

$$f(x)-\lambda\int_a^b K(x,\,y)\,f(y)\,dy=g(x) \tag{39}$$

в предположении, что ядро $K(x,\,y)$ *ограничено* и *непрерывно*.

Фредгольм воспользовался приемом, еще ранее примененным Вольтерра и состоящим в том, что интеграл в (39) заменяется суммой

$$\sum_{j=1}^{n}K(x,\,\xi_j)\,f(\xi_j)\,h \qquad \left(h=\frac{b-a}{n},\ \xi_j=a+jh\right)$$

и само уравнение (39) рассматривается в точках $x=\xi_i$ ($i=1,\,2,\,\ldots,\,n$). При этом появляется система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $f_j=f(\xi_j)$ ($j=1,\,2,\,\ldots,\,n$):

$$f_i-\lambda h\sum_{j=1}^{n}K_{ij}f_j=g_i \qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,n), \tag{40}$$

где обозначено $K_{ij}=K(\xi_i,\,\xi_j)$ и $g_i=g(\xi_i)$.

Определитель этой системы может быть представлен в виде

$$d_\lambda=1-\lambda h\sum_i K_{ii}+\frac{\lambda^2h^2}{2!}\sum_{i,\,j}\begin{vmatrix}K_{ii} & K_{ij}\\ K_{ji} & K_{jj}\end{vmatrix}-\ldots+$$
$$+(-1)^n\frac{\lambda^nh^n}{n!}\sum_{i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_n}\begin{vmatrix}K_{i_1i_1} & K_{i_1i_2} & \ldots & K_{i_1i_n}\\ K_{i_2i_1} & K_{i_2i_2} & \ldots & K_{i_2i_n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ K_{i_ni_1} & K_{i_ni_2} & \ldots & K_{i_ni_n}\end{vmatrix}. \tag{41}$$

Так как d_λ — многочлен от λ, не равный нулю тождественно, то система (40) имеет единственное решение при любом λ, за исключением некоторого конечного числа значений; далее, такое решение $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ представляет собой систему из n дробей, знаменатели которых равны d_λ, а числители образуются по известному способу из постоянных g_i и миноров определителя d_λ.

Вместо того чтобы доказывать, что решение системы (40) при $n \to \infty$ стремится к решению уравнения (39),— это было сделано позднее Гильбертом [1] для случая непрерывного ядра,— Фредгольм взял ряд, полученный чисто формальным предельным переходом, и доказал, не обращаясь к выражениям (41), из которых он исходил, что такой ряд сходится и дает решение уравнения (39).

Для удобства записи введем обозначения:

$$K\begin{pmatrix} x_1 x_2 \ldots x_n \\ y_1 y_2 \ldots y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1, y_1) & K(x_1, y_2) & \ldots & K(x_1, y_n) \\ K(x_2, y_1) & K(x_2, y_2) & \ldots & K(x_2, y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(x_n, y_1) & K(x_n, y_2) & \ldots & K(x_n, y_n) \end{vmatrix}.$$

Заметим прежде всего, что этот определитель меняет знак при перестановке переменных x_i и x_k или y_i и y_k, и, следовательно, он не изменяется тогда, когда производится какое-нибудь четное число таких перестановок, в частности при каких угодно перестановках целых пар $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$.

Заметив это, мы сможем представить коэффициент при $\frac{\lambda^m}{m!}$ в формуле (41) в виде

$$h^m \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m} K\begin{pmatrix} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \ldots \xi_{i_m} \\ \xi_{i_1} \xi_{i_2} \ldots \xi_{i_m} \end{pmatrix}.$$

Формальным пределом такого выражения будет служить интеграл

$$\int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_m \\ \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_m \end{pmatrix} d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_m,$$

а формальным пределом определителя d_λ—сумма ряда

$$1 - \lambda \int_a^b K\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} d\xi + \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b K\begin{pmatrix} \xi_1 \xi_2 \\ \xi_1 \xi_2 \end{pmatrix} d\xi_1 d\xi_2 - \ldots +$$

$$+ (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n \\ \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n \end{pmatrix} d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n + \ldots . \qquad (42)$$

Этот ряд сходится при всех λ. Для того чтобы это показать, воспользуемся тем, что определитель порядка n, все элементы которого не превосходят по абсолютной величине постоянного M, сам по абсолютной величине не больше $M^n n^{n/2}$. Это прямо следует из неравенства Адамара, которое мы докажем в следующем пункте.

Тогда ряд (42) мажорируется сходящимся рядом

$$1+|\lambda|(b-a)M+\frac{|\lambda|^2}{2!}(b-a)^2M^2\cdot 2+\ldots+$$
$$+\frac{|\lambda|^n}{n!}(b-a)^nM^nn^{n/2}+\ldots,$$

в котором M означает верхнюю грань функции $|K(x, y)|$. Таким образом, сумма δ_λ ряда (42) представляет собой целую функцию переменного λ, притом не равную нулю тождественно, так как $\delta_0=1$. Эту функцию называют *определителем Фредгольма.*

Формальный предельный переход, примененный к числителю соответствующего классического выражения, приведет к ряду

$$K\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\lambda\int_a^b K\begin{pmatrix}x\xi\\y\xi\end{pmatrix}d\xi+\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix}x\,\xi_1\xi_2\\y\,\xi_1\xi_2\end{pmatrix}d\xi_1\,d\xi_2+\ldots+$$
$$+(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\int_a^b\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}x\,\xi_1\ldots\xi_n\\y\,\xi_1\ldots\xi_n\end{pmatrix}d\xi_1\ldots d\xi_n+\ldots. \quad (43)$$

Рассуждая так же, как и выше, мы придем к выводу, что и этот ряд сходится при всех λ; его сумма называется *минором* определителя Фредгольма.

Разложив определители в коэффициентах ряда (43) по элементам первой строки, получим

$$K\begin{pmatrix}x\xi_1\ldots\xi_n\\y\xi_1\ldots\xi_n\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}K\begin{pmatrix}\xi_1\ldots\xi_n\\\xi_1\ldots\xi_n\end{pmatrix}-K\begin{pmatrix}x\\\xi_1\end{pmatrix}K\begin{pmatrix}\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\\y\,\xi_2\ldots\xi_n\end{pmatrix}+$$
$$+K\begin{pmatrix}x\\\xi_2\end{pmatrix}K\begin{pmatrix}\xi_1\xi_2\xi_3\ldots\xi_n\\y\,\xi_1\xi_3\ldots\xi_n\end{pmatrix}-\ldots+(-1)^nK\begin{pmatrix}x\\\xi_n\end{pmatrix}K\begin{pmatrix}\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\\y\,\xi_1\ldots\xi_{n-1}\end{pmatrix}=$$
$$=K\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}K\begin{pmatrix}\xi_1\ldots\xi_n\\\xi_1\ldots\xi_n\end{pmatrix}-K\begin{pmatrix}x\\\xi_1\end{pmatrix}K\begin{pmatrix}\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\\y\xi_2\ldots\xi_n\end{pmatrix}-$$
$$-K\begin{pmatrix}x\\\xi_2\end{pmatrix}K\begin{pmatrix}\xi_2\xi_1\xi_3\ldots\xi_n\\y\xi_1\xi_3\ldots\xi_n\end{pmatrix}-\ldots-K\begin{pmatrix}x\\\xi_n\end{pmatrix}K\begin{pmatrix}\xi_n\xi_1\xi_2\ldots\xi_{n-1}\\y\,\xi_1\xi_2\ldots\xi_{n-1}\end{pmatrix}.$$

Так как переменная интегрирования может быть обозначена любой буквой, то

$$\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}x\xi_1\ldots\xi_n\\y\xi_1\ldots\xi_n\end{pmatrix}d\xi_1\ldots d\xi_n=K\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}\xi_1\ldots\xi_n\\\xi_1\ldots\xi_n\end{pmatrix}d\xi_1\ldots d\xi_n-$$
$$-n\int_a^b\ldots\int_a^b K\begin{pmatrix}x\\z\end{pmatrix}K\begin{pmatrix}z\xi_1\ldots\xi_{n-1}\\y\xi_1\ldots\xi_{n-1}\end{pmatrix}dz\,d\xi_1\ldots d\xi_{n-1}.$$

Сравнив (42) и (43), мы увидим, что

$$\delta_\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=K(x, y)\,\delta_\lambda+\lambda\int_a^b K(x, z)\,\delta_\lambda\begin{pmatrix}z\\y\end{pmatrix}dz.$$

Точно так же, разложив определители $K\begin{pmatrix} x\xi_1 \ldots \xi_n \\ y\xi_1 \ldots \xi_n \end{pmatrix}$ по элементам первого столбца, придем к равенству

$$\delta_\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K(x, y)\,\delta_\lambda + \lambda\int_a^b \delta_\lambda\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} K(z, y)\,dz.$$

Последние два равенства показывают, что функция

$$\frac{\delta_\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\delta_\lambda}$$

тождественна резольвенте $K_\lambda(x, y)$ ядра $K(x, y)$ для всех значений λ, для которых $\delta_\lambda \neq 0$. Все такие λ регулярны по отношению к $K(x, y)$. Нули же функции δ_λ представляют собой особые точки. Действительно, всякий нуль λ_0 функции δ_λ является полюсом резольвенты, так как $\delta_\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ может делиться лишь на более низкую степень $\lambda - \lambda_0$, чем та, на которую делится δ_λ; это следует из равенства

$$-\frac{d\delta_\lambda}{d\lambda} = \int_a^b \delta_\lambda\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} dx, \tag{44}$$

которое, в свою очередь, вытекает из (42) и (43). Итак, особые точки как раз совпадают с нулями целой функции δ_λ; их может быть только конечное или счетное множество. В последнем случае никакая конечная точка плоскости не может быть предельной для них.

Фредгольму удалось применить свой метод также к случаю особых λ, но соответствующие выкладки в этом случае значительно сложнее. Мы не будем их здесь воспроизводить, а отошлем читателя к тому III „Курса математического анализа" Гурса.

Отметим еще одну интересную формулу:

$$-\frac{d \log \delta_\lambda}{d\lambda} = \int_a^b K(x, x)\,dx + \lambda\int_a^b K^{(2)}(x, x)\,dx + \lambda^2\int_a^b K^{(3)}(x, x)\,dx + \ldots,$$

справедливую в любом круге с центром в 0, не содержащем особых точек; выводится она из уравнения (44), если разделить его на δ_λ и представить функцию

$$\frac{\delta_\lambda\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}}{\delta_\lambda} = K_\lambda(x, x)$$

с помощью ряда Неймана (18), который в указанной области сходится.

Во всей этой теории предположение, что $K(x, y)$ *непрерывна*, может быть заменено более слабым условием. Достаточно допустить, что $K(x, y)$ *ограничена* и *суммируема* в смысле Лебега. При этом, впрочем, возникает затруднение, состоящее в том, что $K(x, x)$ может оказаться неинтегрируемой. Это затруднение можно обойти, изменив $K(x, y)$ на диагонали $x=y$, например положив $K(x, x)\equiv 0$, что, очевидно, никак не скажется на самом интегральном уравнении. Коль скоро эта опасность устранена, все интегралы, входящие в (42), существуют, и сходимость этого ряда устанавливается так же, как и прежде. Что же касается ряда (43), то его члены имеют смысл для почти всех x и для почти всех y, именно для тех x и y, для которых $K(x, z)$ и соответственно $K(z, y)$ суммируемы по переменному z. Таким образом, получаются функции δ_λ и $\delta_\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, отношение которых дает резольвенту $K_\lambda(x, y)$. Разумеется, функция

$$f(x)=g(x)+\lambda\int_a^b K_\lambda(x, y)\, g(y)\, dy$$

оказывается определенной лишь почти всюду и удовлетворяет уравнению (39) также *почти всюду*.

Можно также ослабить условие, что $K(x, y)$ ограничена; достаточно предполагать $K(x, y)$ суммируемой в квадрате[1]). Однако в этих обобщенных предположениях метод Фредгольма в значительной мере утрачивает свою простоту и изящество.

75. Неравенство Адамара. Сформулируем предложение[2]), одним из следствий которого мы воспользовались в предыдущем пункте:

Если D — определитель с комплексными элементами $c_{hk}=a_{hk}+ib_{hk}$ $(h, k=1, 2, \ldots, n)$, то

$$|D|\leqslant A_1A_2\ldots A_n,$$

где

$$A_h=\left(\sum_{k=1}^{n}|c_{hk}|^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{k=1}^{n}(a_{hk}^2+b_{hk}^2)\right)^{1/2}.$$

Помимо очевидного случая, когда правая часть обращается в нуль, равенство имеет место только тогда, когда строки определителя попарно ортогональны, т. е. когда

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\bar{c}_{jk}=0 \quad \text{при} \quad i\neq j.$$

Оставляя в стороне отмеченный тривиальный случай, мы можем считать, что все A_h равны 1; иначе мы заменили бы рассматриваемый определитель определителем с элементами $\dfrac{c_{hk}}{A_h}$.

$|D|$ представляет собой непрерывную функцию $2n^2$ переменных a_{hk} и b_{hk}, изменяющихся в замкнутой ограниченной области, характеризуемой условиями $A_1=1$, $A_2=1$, $\ldots$, $A_n=1$; в этой области функция $|D|$ ограничена

1) См. Карлеман [1], а из более поздних работ — Смизис [1].
2) Адамар [1].

и достигает своего наибольшего значения $|D^*|$ при некоторых c^*_{hk}. При этом $|D^*| \geqslant 1$, так как определитель с элементами δ_{hk}, равными 1 при $h=k$ и нулю при $h \neq k$, удовлетворяет поставленным условиям и, очевидно, равен 1.

Строки определителя D^* с элементами c^*_{hk} попарно ортогональны. В самом деле, возьмем, например, две первые строки и покажем, что предположение

$$C=\sum_{k=1}^{n} c^*_{2k}\overline{c^*_{1k}} \neq 0$$

приводит к противоречию. В самом деле, возьмем определитель D', все элементы c'_{hk} которого совпадают с элементами c^*_{hk} определителя D^*, за исключением элементов второй строки, которые мы положим равными

$$c'_{2k}=\lambda c^*_{1k}+\mu c^*_{2k}.$$

Множители λ, μ определим из условий

$$\sum_{k=1}^{n} c'_{2k}\overline{c^*_{1k}}=0, \quad \sum_{k=1}^{n} |c'_{2k}|^2=1;$$

из них первое дает $\lambda+\mu C=0$, а второе—

$$|\lambda|^2+\lambda\overline{\mu C}+\overline{\lambda}\mu C+|\mu|^2=1.$$

Отсюда следует, что $|\mu|^2(1-|C|^2)=1$, т. е. $|\mu|>1$. Так как $D'=\mu D^*$, то $|D'|>|D^*|$, что противоречит определению D^*.

Так как строки определителя D^* взаимно ортогональны, то

$$D^*\overline{D^*}=\det(c^*_{hk})\cdot\det(\overline{c^*_{hk}})=\det\left(\sum_{j=1}^{n} c^*_{hj}\overline{c^*_{kj}}\right)=\det(\delta_{hk})=1,$$

что и требовалось доказать.

Заметим еще, что доказанное неравенство имеет простой геометрический смысл, по крайней мере тогда, когда элементы определителя действительны и $n=3$: среди параллелепипедов с заданными длинами ребер наибольший объем имеет примоугольный параллелепипед.

§ 4. МЕТОД, ОСНОВАННЫЙ НА ПОЛНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

76. Полная непрерывность. Доказательство альтернативы Фредгольма для произвольного ядра $K(x, y)$, принадлежащего пространству L^2, было основано на теореме о разложении (п. 72). В самом деле, наличие разложения $K(x, y)=S(x, y)+R(x, y)$, соответствующего заданной особой точке, позволило свести задачу к соответствующей задаче для случая ядра $S(x, y)$ конечного ранга, т. е. по существу к задаче линейной алгебры. Для получения же самого разложения нам понадобилось изучить свойства оператора $(I-\lambda K)^{-1}$ как функции переменного λ.

Следующий метод, принадлежащий одному из авторов этой книги[1]), носит скорее геометрический характер и заодно позволяет глубже изучить „главную часть" $S(x, y)$ без помощи теории

[1]) Рисс [10]. См. также Гильдебрандт [3], Банах [3] (гл. X), Заанен [2].