и достигает своего наибольшего значения $|D^*|$ при некоторых c^*_{hk}. При этом $|D^*| \geqslant 1$, так как определитель с элементами δ_{hk}, равными 1 при $h=k$ и нулю при $h \neq k$, удовлетворяет поставленным условиям и, очевидно, равен 1.

Строки определителя D^* с элементами c^*_{hk} попарно ортогональны. В самом деле, возьмем, например, две первые строки и покажем, что предположение

$$C = \sum_{k=1}^{n} c^*_{2k} \overline{c^*_{1k}} \neq 0$$

приводит к противоречию. В самом деле, возьмем определитель D', все элементы c'_{hk} которого совпадают с элементами c^*_{hk} определителя D^*, за исключением элементов второй строки, которые мы положим равными

$$c'_{2k} = \lambda c^*_{1k} + \mu c^*_{2k}.$$

Множители λ, μ определим из условий

$$\sum_{k=1}^{n} c'_{2k} \overline{c^*_{1k}} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} |c'_{2k}|^2 = 1;$$

из них первое дает $\lambda + \mu C = 0$, а второе—

$$|\lambda|^2 + \lambda \overline{\mu C} + \overline{\lambda} \mu C + |\mu|^2 = 1.$$

Отсюда следует, что $|\mu|^2 (1 - |C|^2) = 1$, т. е. $|\mu| > 1$. Так как $D' = \mu D^*$, то $|D'| > |D^*|$, что противоречит определению D^*.

Так как строки определителя D^* взаимно ортогональны, то

$$D^* \overline{D^*} = \det (c^*_{hk}) \cdot \det (\overline{c^*_{hk}}) = \det \left(\sum_{j=1}^{n} c^*_{hj} \overline{c^*_{kj}} \right) = \det (\delta_{hk}) = 1,$$

что и требовалось доказать.

Заметим еще, что доказанное неравенство имеет простой геометрический смысл, по крайней мере тогда, когда элементы определителя действительны и $n=3$: среди параллелепипедов с заданными длинами ребер наибольший объем имеет примоугольный параллелепипед.

§ 4. МЕТОД, ОСНОВАННЫЙ НА ПОЛНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

76. Полная непрерывность. Доказательство альтернативы Фредгольма для произвольного ядра $K(x, y)$, принадлежащего пространству L^2, было основано на теореме о разложении (п. 72). В самом деле, наличие разложения $K(x, y) = S(x, y) + R(x, y)$, соответствующего заданной особой точке, позволило свести задачу к соответствующей задаче для случая ядра $S(x, y)$ конечного ранга, т. е. по существу к задаче линейной алгебры. Для получения же самого разложения нам понадобилось изучить свойства оператора $(I - \lambda K)^{-1}$ как функции переменного λ.

Следующий метод, принадлежащий одному из авторов этой книги[1]), носит скорее геометрический характер и заодно позволяет глубже изучить „главную часть" $S(x, y)$ без помощи теории

[1]) Рисс [10]. См. также Гильдебрандт [3], Банах [3] (гл. X), Заанен [2].

элементарных делителей. Преимущество этого метода состоит еще и в том, что он непосредственно применяется к гораздо более общим функциональным уравнениям.

Основан он на понятии *вполне непрерывного оператора*, который определяется следующим образом:

Оператор T в пространстве L^2 называется вполне непрерывным, если любое ограниченное множество отображается им в компактное множество, т. е. если какова бы ни была бесконечная последовательность $\{f_n\}$ элементов из L^2, такая что $\|f_n\| \leqslant C$, последовательность $\{Tf_n\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся в среднем к некоторому элементу пространства L^2.

Известно, что всякий линейный оператор непрерывен. Но существуют линейные операторы, не являющиеся вполне непрерывными; таков, например, тождественный оператор I. Действительно, если $\{f_n\}$ — какая-нибудь ортонормированная последовательность, то никакая ее подпоследовательность не сходится в среднем, так как $\|f_m - f_n\|^2 = \|f_m\|^2 + \|f_n\|^2 = 2$ при $m \neq n$.

Прямо из определения вытекает, что *сумма и произведение двух вполне непрерывных линейных операторов также представляют собой вполне непрерывные операторы; в случае произведения достаточно даже, чтобы один из множителей был вполне непрерывен.*

Менее очевидно следующее предложение:

Линейный оператор T, могущий быть приближенным по норме с любой степенью точности линейными вполне непрерывными операторами, сам вполне непрерывен.

В самом деле, пусть $\{T_i\}$ — последовательность вполне непрерывных линейных операторов, такая, что $\|T - T_i\| \to 0$. Тогда из любой ограниченной последовательности $\{f_n\}$ элементов пространства L^2 можно, прибегнув к диагональному методу, извлечь такую подпоследовательность $\{g_n\}$, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} T_i g_n$ существовал при любом $i = 1, 2, \ldots$. При этом, каково бы ни было i,

$$\|Tg_n - Tg_m\| \leqslant \|Tg_n - T_i g_n\| + \|T_i g_n - T_i g_m\| + \|T_i g_m - Tg_m\|,$$

и потому

$$\|Tg_n - Tg_m\| \leqslant \|T - T_i\| (\|g_n\| + \|g_m\|) + \|T_i g_n - T_i g_m\|,$$

откуда следует, что

$$\limsup_{n,\, m\to\infty} \|Tg_n - Tg_m\| = 0;$$

таким образом, последовательность $\{Tg_n\}$ сходится.

Всякий оператор вида

$$Hf = (f, \psi)\, \varphi,$$

где φ и ψ — фиксированные элементы пространства L^2, вполне непрерывен. Действительно, если $\{f_n\}$ — какая-нибудь ограниченная последовательность элементов из L^2, то, согласно теореме Больцано—Вейерштрасса, в ней существует подпоследовательность $\{g_n\}$, такая, что числовая последовательность $\{(g_n, \psi)\}$ сходится; обозначив предел этой последней c, получим

$$\|Hg_n - c\varphi\| = |(g_n, \psi) - c|\,\|\varphi\| \to 0.$$

Всякий линейный оператор конечного ранга является суммой конечного числа операторов только что описанного элементарного вида. Поэтому *все линейные операторы конечного ранга, так же, как и их равномерные пределы, вполне непрерывны.*

Класс линейных операторов, являющихся равномерными пределами последовательностей операторов конечного ранга, охватывает, в частности, все операторы, порожденные ядрами из L^2 (см. п. 69). Следовательно, эти последние вполне непрерывны; на свойстве полной непрерывности и будут основаны наши дальнейшие рассмотрения.

77. Подпространства $\mathfrak{M}_n$ и $\mathfrak{N}_n$. До конца этого параграфа K будет означать линейный оператор в пространстве L^2, порожденный некоторым ядром $K(x, y)$, принадлежащим пространству L^2. Положим

$$T = I - K.$$

1. Рассмотрим прежде всего множества $\mathfrak{M}_n$ элементов f из L^2, для которых

$$T^n f = 0;$$

n может принимать значения 0, 1, 2, ...; при этом T^0 полагается равным тождественному оператору. Очевидно, что $\mathfrak{M}_0$ состоит из единственного элемента 0 и что $\mathfrak{M}_n$ содержится в $\mathfrak{M}_{n+1}$:

$$\mathfrak{M}_0 = (0) \subseteq \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{M}_n \subseteq \mathfrak{M}_{n+1} \subseteq \ldots.$$

Так как T и все его итерации T^n являются линейными и, следовательно, непрерывными операторами, то $\mathfrak{M}_n$ представляют собой *замкнутые линейные множества*, иначе говоря, *подпространства* в L^2.

Покажем, что подпространство $\mathfrak{M}_n$ *конечномерное*, т. е. все его элементы представляют собой линейные комбинации некоторых его фиксированных элементов, взятых в конечном числе.

Если бы это было неверно для $\mathfrak{M}_1$, то в $\mathfrak{M}_1$ существовала бы бесконечная последовательность элементов $\{g_k\}$, ни один из которых не выражался бы линейно через предыдущие. Пусть $\{f_k\}$— ортонормированная последовательность, которая получается из $\{g_k\}$ процессом ортогонализации. Так как $\mathfrak{M}_1$ характеризуется тем, что для его элементов $Tf = 0$, то $Kf_k = f_k$ при $k = 1, 2, \ldots$ и, в силу того, что оператор K вполне непрерывен, из $\{f_k\}$ можно было бы выделить сходящуюся подпоследовательность. Но это невозможно, так как

$$\|f_k-f_i\|^2=\|f_k\|^2-(f_k, f_i)-(f_i, f_k)+\|f_i\|^2=2 \quad \text{при } i\neq k.$$

Аналогичное рассуждение применимо к $\mathfrak{M}_n$ и при $n>1$. Надо только заметить, что

$$T^n=(I-K)^{(n)}=I-K^{(n)},$$

где

$$K^{(n)}=nK-\binom{n}{2}K^2+\binom{n}{3}K^3-\ldots+(-1)^{n-1}K^n;$$

отсюда следует, что оператор $K^{(n)}$ вполне непрерывен.

Итак, все $\mathfrak{M}_n$ являются конечномерными подпространствами пространства L^2. Спрашивается, растет ли число измерений $\mathfrak{M}_n$ неограниченно вместе с n?

Прежде всего легко видеть, что если какое-нибудь $\mathfrak{M}_{n+1}$ не совпадает с $\mathfrak{M}_n$, то все $\mathfrak{M}_m$ с номерами $m\leqslant n$ различны. В самом деле, если элемент h принадлежит $\mathfrak{M}_{n+1}$, но не принадлежит $\mathfrak{M}_n$, то $T^{n-m}h$ будет принадлежать $\mathfrak{M}_{m+1}$, не принадлежа $\mathfrak{M}_m$, так как

$$T^{m+1}T^{n-m}h=T^{n+1}h=0, \quad T^mT^{n-m}h=T^nh\neq 0.$$

Отсюда вытекает, что либо ни при каком n подпространство $\mathfrak{M}_{n+1}$ не совпадает с $\mathfrak{M}_n$, либо некоторое $\mathfrak{M}_n$ совпадает с $\mathfrak{M}_{n+1}$, а следовательно, и со всеми $\mathfrak{M}_p$, где $p>n$.

Покажем, что первый случай не может осуществиться. Если бы все $\mathfrak{M}_n$ были различны, то в каждом $\mathfrak{M}_n$ существовал бы элемент φ_n с нормой $\|\varphi_n\|=1$, ортогональный подпространству $\mathfrak{M}_{n-1}$. Тогда при $n>m$ выполнялось бы равенство

$$K\varphi_n-K\varphi_m=\varphi_n-(\varphi_m+T\varphi_n-T\varphi_m)=\varphi_n-\varphi,$$

где φ, будучи, очевидно, элементом подпространства $\mathfrak{M}_{n-1}$, ортогонален элементу φ_n. Но отсюда вытекают соотношения

$$\|K\varphi_n-K\varphi_m\|^2=\|\varphi_n\|^2+\|\varphi\|^2\geqslant\|\varphi_n\|^2=1,$$

и мы видим, что, в противоречии со свойством полной непрерывности оператора K, из последовательности $\{K\varphi_n\}$ нельзя выделить сходящейся подпоследовательности.

Итак, *существует такой номер* $\nu\geqslant 0$, *при котором*

$$\mathfrak{M}_0=(0)\subset\mathfrak{M}_1\subset\ldots\subset\mathfrak{M}_\nu=\mathfrak{M}_{\nu+1}=\mathfrak{M}_{\nu+2}=\ldots.$$

2. Рассмотрим теперь для $n=0, 1, 2, \ldots$ множества $\mathfrak{N}_n$ элементов, представимых в виде

$$f=T^ng;$$

иначе о $\mathfrak{N}_n$ можно сказать, что оно представляет собой множество, на которое оператор T^n отображает все пространство L^2. Очевидно, что

$$\mathfrak{N}_0=L^2\supseteq\mathfrak{N}_1\supseteq\mathfrak{N}_2\supseteq\ldots\supseteq\mathfrak{N}_n\supseteq\mathfrak{N}_{n+1}\supseteq\ldots.$$

Покажем, что все эти множества являются также *подпространствами* в L^2. То, что это — *линейные* множества, очевидно; остается показать, что они *замкнуты*. Доказательство проведем для $\mathfrak{N}_1$; оно применимо и к другим $\mathfrak{N}_n$ $(n > 1)$, если вместо K рассматривать определенные выше операторы $K^{(n)}$.

Пусть $\{f_k = Tg_k\}$ — сходящаяся последовательность элементов из $\mathfrak{N}_1$; мы хотим доказать, что ее предел f^* также принадлежит подпространству $\mathfrak{N}_1$. Представим g_k в виде $g_k = u_k + v_k$, где u_k принадлежит $\mathfrak{M}_1$, а элемент v_k ортогонален $\mathfrak{M}_1$ (см. п. 34). Тогда будем иметь

$$f_k = Tu_k + Tv_k = Tv_k.$$

Покажем, что $\{v_k\}$ — ограниченная последовательность. Допустим, что это неверно; тогда, не нарушая общности, можно будет предполагать, что $\|v_k\| \to \infty$. Положив $w_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}$, получим $Tw_k = \frac{f_k}{\|v_k\|} \to 0$. Так как $\|w_k\| = 1$, то последовательность $\{Kw_k\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{Kw_{k_i}\}$. При этом последовательность

$$w_{k_i} = Tw_{k_i} + Kw_{k_i}$$

также будет сходящейся; обозначив ее предел w^*, получим $Tw^* = \lim Tw_{k_i} = 0$, т. е. w^* принадлежит подпространству $\mathfrak{M}_1$. Так как w_k ортогональны $\mathfrak{M}_1$, то $\|w_k - w^*\|^2 = \|w_k\|^2 + \|w^*\|^2 \geqslant 1$, что противоречит определению w_k.

Итак, последовательность $\{v_k\}$ ограничена, следовательно, $\{Kv_k\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{Kv_{k_j}\}$. Элементы

$$v_{k_j} = Tv_{k_j} + Kv_{k_j} = f_{k_j} + Kv_{k_j}$$

также образуют сходящуюся последовательность; пусть v^* — ее предел. Тогда

$$f_{k_j} = v_{k_j} - Kv_{k_j} \to v^* - Kv^*,$$

т. е. $f^* = Tv^*$, а это означает, что f^* принадлежит $\mathfrak{N}_1$. Таким образом, мы доказали, что множества $\mathfrak{N}_n$ замкнуты и, следовательно, являются подпространствами L^2.

Займемся теперь вопросом, совпадают ли $\mathfrak{N}_n$ друг с другом. Так как каждое $\mathfrak{N}_n$ оператором T отображается в $\mathfrak{N}_{n+1}$, то, если какое-нибудь $\mathfrak{N}_n$ совпадает с $\mathfrak{N}_{n+3}$, оно совпадает и со всеми $\mathfrak{N}_p$ при $p > n$.

Следовательно, либо ни при каком n подпространство $\mathfrak{N}_n$ не совпадает с $\mathfrak{N}_{n+1}$, либо, начиная с некоторого номера, все $\mathfrak{N}_n$ тождественны.

Мы покажем, что может иметь место только второй случай. Действительно, иначе в каждом $\mathfrak{N}_n$ можно было бы выбрать элемент φ_n с нормой $\|\varphi_n\|=1$, ортогональный $\mathfrak{N}_{n+1}$. Тогда последовательность $\{K\varphi_n\}$ должна была бы содержать сходящуюся подпоследовательность, что невозможно, так как

$$\|K\varphi_m - K\varphi_n\| \geqslant 1 \quad \text{при } m \neq n;$$

последнее неравенство вытекает из представления

$$K\varphi_m - K\varphi_n = \varphi_m - (\varphi_n + T\varphi_m - T\varphi_n) = \varphi_m - \varphi,$$

где элемент φ, очевидно, принадлежит $\mathfrak{N}_{m+1}$ и, следовательно, ортогонален φ_m, откуда вытекает, что

$$\|\varphi_m - \varphi\|^2 = \|\varphi_m\|^2 + \|\varphi\|^2 \geqslant \|\varphi_m\|^2 = 1.$$

Итак, *существует номер* $\mu \geqslant 0$, *при котором*

$$\mathfrak{N}_0 = L^2 \supset \mathfrak{N}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{N}_\mu = \mathfrak{N}_{\mu+1} = \mathfrak{N}_{\mu+2} = \ldots .$$

3. Оператору K мы поставили, таким образом, в соответствие два номера ν и μ; покажем теперь, что ν *и* μ *равны*.

Прежде чем приступить к доказательству, заметим, что уравнение $T^k f = g$, в котором k — целое число $\geqslant 1$, а g — элемент из $\mathfrak{N}_\mu$, имеет хотя бы одно решение, принадлежащее $\mathfrak{N}_\mu$; это — лишь перефразировка утверждения, что операторы T^k отображают подпространство $\mathfrak{N}_\mu$ в подпространство $\mathfrak{N}_{\mu+k}$, совпадающее с $\mathfrak{N}_\mu$. Мы покажем, что такое решение единственно или, что то же самое, однородное уравнение $T^k\varphi = 0$ не имеет в $\mathfrak{N}_\mu$ других решений, кроме $\varphi = 0$. Достаточно показать это для $k = 1$. Пусть φ_1 — какое-нибудь решение, принадлежащее $\mathfrak{N}_\mu$. Теперь определим последовательно элементы φ_n как решения уравнений $T\varphi = \varphi_{n-1}$ ($n = 2, 3, \ldots$), принадлежащие $\mathfrak{N}_\mu$. Для $n > 1$ будем иметь

$$T^n\varphi_n = 0 \quad \text{и} \quad T^{n-1}\varphi_n = \varphi_1.$$

Если бы решение φ_1 было отлично от нуля, то φ_n принадлежало бы $\mathfrak{M}_n$, но не принадлежало бы $\mathfrak{M}_{n-1}$, что невозможно при $n > \nu$. Следовательно, $\varphi_1 = 0$.

Заметив это, докажем, что $\mu \geqslant \nu$. Пусть f — какой-нибудь элемент подпространства $\mathfrak{M}_{\mu+1}$, т. е. $T^{\mu+1} f = 0$. Тогда уравнение $T\varphi = 0$ имеет решение $\varphi = T^\mu f$, принадлежащее $\mathfrak{N}_\mu$, откуда следует, что $\varphi = 0$, т. е. f одновременно принадлежит подпространству $\mathfrak{M}_\mu$. Мы обнаружили, таким образом, что $\mathfrak{M}_{\mu+1} = \mathfrak{M}_\mu$, а это означает, что $\mu \geqslant \nu$. В частности, если $\mu = 0$, то и $\nu = 0$.

Рассмотрим теперь случай $\mu \geqslant 1$. Пусть $f = T^{\mu-1} g$ — элемент из $\mathfrak{M}_{\mu-1}$, не принадлежащий $\mathfrak{N}_\mu$. Так как $h = T^\mu g$ является элементом $\mathfrak{N}_\mu$, то уравнение $T^\mu\varphi = h$ имеет (единственное) решение $\varphi = g'$, принадлежащее $\mathfrak{N}_\mu$. Тогда $T^\mu(g - g') = 0$, т. е. $g - g'$ принадлежит $\mathfrak{M}_\mu$. С другой стороны, $T^{\mu-1}(g - g') = f - T^{\mu-1} g' \neq 0$, так как $T^{\mu-1} g'$ содержится в $\mathfrak{N}_\mu$, тогда как f в $\mathfrak{N}_\mu$ не попадает; отсюда следует, что $g - g'$ не принадлежит $\mathfrak{M}_{\mu-1}$. Мы показали, что $\mathfrak{M}_{\mu-1}$ и $\mathfrak{M}$ различны, а это означает, что $\mu \leqslant \nu$.

Сопоставив оба эти неравенства, получим $\mu=\nu$, что и требовалось доказать.

4. Теперь мы докажем, что *всякая функция f, принадлежащая L^2, может быть представлена, притом единственным образом, в виде $f=u+v$, где u и v принадлежат соответственно подпространствам $\mathfrak{M}_\nu$ и $\mathfrak{N}_\nu$.*

Это разложение осуществляется следующим образом. Так как $g=T^\nu f$ принадлежит $\mathfrak{N}_\nu$, то уравнение $T^{2\nu}\varphi=g$ заведомо имеет решение φ, принадлежащее $\mathfrak{N}_\nu$. Положим $f'=T^\nu\varphi$; тогда f' будет элементом из $\mathfrak{N}_\nu$ и будут выполняться равенства

$$T^\nu f'=T^{2\nu}\varphi=g=T^\nu f;$$

следовательно, $T^\nu(f-f')=0$, т. е. $f-f'$ принадлежит $\mathfrak{M}_\nu$, и требуемое разложение есть $f=(f-f')+f'$. Единственность его прямо следует из того факта, что $\mathfrak{M}_\nu$ и $\mathfrak{N}_\nu$ не имеют общих элементов помимо 0. Справедливость же последнего утверждения была установлена выше, когда мы показали, что единственное решение уравнения $T^\nu\varphi=0$, принадлежащее $\mathfrak{N}_\nu$, есть $\varphi=0$.

Резюмируем полученные результаты:

Теорема. *Совокупность $\mathfrak{M}_n$ функций f, для которых $T^n f=0$, и совокупность $\mathfrak{N}_n$ функций f, допускающих представление в виде $f=T^n g$, являются подпространствами пространства L^2; $\mathfrak{M}_n$ имеет конечное число измерений. Существует номер $\nu\geqslant 0$, такой, что*

$$\mathfrak{M}_0=(0)\subset\mathfrak{M}_1\subset\ldots\subset\mathfrak{M}_\nu=\mathfrak{M}_{\nu+1}=\mathfrak{M}_{\nu+2}=\ldots$$

и

$$\mathfrak{N}_0=L^2\supset\mathfrak{N}_1\supset\ldots\supset\mathfrak{N}_\nu=\mathfrak{N}_{\nu+1}=\mathfrak{N}_{\nu+2}=\ldots.$$

Любой элемент f из L^2 единственным образом представляется в виде суммы некоторого элемента u из $\mathfrak{M}_\nu$ и некоторого элемента v из $\mathfrak{N}_\nu$: $f=u+v$. Каковы бы ни были заданная функция g из $\mathfrak{N}_\nu$ и целое число $n\geqslant 1$, уравнение $T^n f=g$ имеет решение f, притом единственное, принадлежащее $\mathfrak{N}_\nu$.

78. Случаи $\nu=0$ и $\nu\geqslant 1$. Теорема о разложении. Случаи $\nu=0$ и $\nu>0$ в предыдущей теореме существенно различны.

а. Случай $\nu=0$. В этом случае уравнение

$$Tf=g$$

имеет *единственное* решение f, какова бы ни была заданная функция g из L^2. Так как T — линейный оператор, то f зависит от g аддитивно и однородно. Более того, существует постоянная C, такая, что

$$\|f\|\leqslant C\|g\|$$

при любой g и соответствующей f. В самом деле, если бы такой постоянной не существовало, то можно было бы выбрать последовательность $\{g_n\}$, для которой $\|f_n\|/\|g_n\|$ неограниченно возрастает. Положив $h_n=\frac{f_n}{\|f_n\|}$, будем иметь:

$$\|h_n\|=1 \quad \text{и} \quad Th_n=\frac{g_n}{\|f_n\|}\to 0.$$

Так как оператор K вполне непрерывен, то последовательность $\{Kh_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\|Kh_{n_i}\|$; предел этой последней обозначим h^*. Тогда получим, что

$$h_{n_i}=(I-K)h_{n_i}+Kh_{n_i}=Th_{n_i}+Kh_{n_i}\to h^*$$

и, в силу непрерывности T,

$$Th_{n_i}\to Th^*.$$

С другой стороны, $Th_n\to 0$, поэтому $Th^*=0$ и $h^*=0$, так как уравнение $Tf=0$ имеет единственное решение $f=0$. Мы пришли к противоречию, так как $\|h^*\|=\lim\|h_{n_i}\|=1$.

Итак, оператор, ставящий в соответствие функции g функцию f, аддитивен, однороден и ограничен, т. е. является линейным оператором.

Таким образом, *в случае $\nu=0$ оператор $T=I-K$ имеет обратный, т. е. значение $\lambda=1$ регулярно по отношению к K.*

б. Случай $\nu\geqslant 1$. В этом случае уравнение $Tf=0$ имеет и ненулевые решения: таковыми являются функции вида $f=T^{\nu-1}\varphi$, где φ принадлежит $\mathfrak{M}_\nu$, но не принадлежит $\mathfrak{M}_{\nu-1}$. Следовательно, для T не существует обратного оператора.

Но если рассматривать оператор T только в подпространстве $\mathfrak{N}_\nu$, то в нем он обладает обратным. В самом деле, уравнение

$$Tf=g$$

при любом выборе функции g имеет единственное решение f, принадлежащее $\mathfrak{N}_\nu$, и нам остается только повторить рассуждения, проведенные для случая $\nu=0$, применив их к подпространству $\mathfrak{N}_\nu$. В частности, существует постоянная C, такая, что

$$\|f\|\leqslant C\|Tf\|$$

для всех f из $\mathfrak{N}_\nu$; так как все элементы T^nf также принадлежат $\mathfrak{N}_\nu$, то отсюда следует, что

$$\|f\|\leqslant C^\nu\|T^\nu f\|.$$

Рассмотрим представление $f=u+v$ произвольного элемента f пространства L^2, где u и v — его компоненты соответственно в $\mathfrak{M}_\nu$ и $\mathfrak{N}_\nu$. Так как $T^\nu u=0$ и, следовательно, $T^\nu f=T^\nu v$, то

$$\|v\|\leqslant C^\nu\|T^\nu v\|=C^\nu\|T^\nu f\|\leqslant C^\nu\|T^\nu\|\|f\|.$$

Положив

$$Pf=u, \quad Qf=v,$$

мы тем самым зададим два линейных оператора P и Q, таких, что $P+Q=I$. То, что P и Q аддитивны и однородны, очевидно. Ограниченность операторов P и Q видна из того, что $\|u\|=\|f-v\|\leqslant\leqslant\|f\|+\|v\|$ и, следовательно,

$$\|u\|\leqslant C_1\|f\|, \quad \|v\|\leqslant C_1\|f\|,$$

где C_1—некоторая постоянная. При этом оператор P оставляет инвариантными все элементы подпространства $\mathfrak{M}_\nu$ и обращает в нуль все элементы подпространства $\mathfrak{N}_\nu$, тогда как Q, наоборот, отображает в нуль всё $\mathfrak{M}_\nu$ и оставляет инвариантными все элементы из $\mathfrak{N}_\nu$. Отсюда следует, что $PQ=QP=O$. Можно сказать, что *оператор P проектирует пространство L^2 на подпространство $\mathfrak{M}_\nu$ в направлении $\mathfrak{N}_\nu$, а Q проектирует L^2 на $\mathfrak{N}_\nu$ в направлении $\mathfrak{M}_\nu$*. Так как T, а следовательно, и $K=I-T$ отображают подпространства $\mathfrak{M}_\nu$ и $\mathfrak{N}_\nu$ самих в себя, то *проекционные операторы P и Q* перестановочны с оператором K:

$$PK=KP, \quad QK=KQ.$$

Положив $S=PK$ и $R=QK$, получнм

$$S+R=(P+Q)K=K,$$

$$SP=(KP)(QK)=K(PQ)K=O, \quad RS=(KQ)(PK)=K(QP)K=O,$$

откуда следует, что

$$I-K=(I-S)(I-R)=(I-R)(I-S).$$

Покажем, что номер ν_R, соответствующий оператору R, который также, очевндно, вполне непрерывен, равен нулю и что, следовательно, существует оператор $(I-R)^{-1}$. Действительно, будь $\nu_R\geqslant 1$, уравнение $(I-R)f=0$ имело бы ненулевое решение f; при этом так как $f=Rf$, то функция f принадлежала бы $\mathfrak{N}_\nu$. Тогда было бы справедливо равенство

$$(I-K)f=(I-S)(I-R)f=0,$$

что невозможно, ибо уравнение $(I-K)\varphi=0$ не имеет в $\mathfrak{N}_\nu$ решений, отличных от $\varphi=0$.

Операторы S и R перестановочны, так как $SR=RS=O$, поэтому для $n=0, 1, 2, \ldots$

$$(I-K)^n=(I-S)^n(I-R)^n=(I-R)^n(I-S)^n,$$

откуда следует, что

$$(I-S)^n=(I-K)^n(I-R)^{-n}=(I-R)^{-n}(I-K)^n,$$

где $(I-R)^{-n}$ означает n-ю итерацию оператора $(I-R)^{-1}$. Из этих соотношений очевидным образом следует, что *подпространства $\mathfrak{M}_n$ и $\mathfrak{N}_n$, построенные для оператора S, совпадают с соответствующими подпространствами для K.*

Известно, что подпространство $\mathfrak{M}_\nu$ имеет конечное число измерений, скажем r. Следовательно, его элементы представляются в виде линейных комбинаций некоторых r линейно независимых элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$, которые можно предполагать ортонормированными. Так как Sf при любом f принадлежит $\mathfrak{M}_\nu$, то

$$Sf = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_r\varphi_r.$$

Каждый коэффициент

$$c_k = (Sf, \varphi_k)$$

представляет собой линейный функционал от f; следовательно, $c_k = (f, \psi_k)$, где ψ_k — некоторые элементы пространства L^2 (см. п. 30). Таким образом, S — оператор конечного ранга.

Резюмируем полученные результаты:

В случае $\nu \geqslant 1$ *точка* $\lambda = 1$ — *особая по отношению к* K; $\mathfrak{M}_\nu$ *и* $\mathfrak{N}_\nu$ *представляют собой истинные* (т. е. отличные от 0 и от всего L^2) *подпространства* L^2, *и оператор* K *отображает их самих в себя. Если* S *и* R *означают линейные операторы, совпадающие с* K *соответственно на* $\mathfrak{M}_\nu$ *и на* $\mathfrak{N}_\nu$ *и отображающие соответственно* $\mathfrak{N}_\nu$ *и* $\mathfrak{M}_\nu$ *в нуль, то*

$$K = S + R, \quad SR = RS = 0$$

и точка $\lambda = 1$ *оказывается регулярной по отношению к* R *и особой по отношению к* S; S *является оператором конечного ранга.*

Так как операторы S и R порождены соответственно ядрами

$$S(x, y) = \varphi_1(x)\overline{\psi_1(y)} + \ldots + \varphi_r(x)\overline{\psi_r(y)}$$

и

$$R(x, y) = K(x, y) - S(x, y),$$

то мы снова приходим к *теореме о разложении*, доказанной ранее (см. п. 72) другим методом; только теперь мы не получили свойств 3) и 4).

Но мы не пользовались этими свойствами, когда в п. 73 устанавливали с помощью теоремы о разложении *альтернативу Фредгольма*. Таким образом, мы пришли к новому доказательству этой последней.

Впрочем, свойства 3) и 4) обнаружить очень легко. Так как речь идет лишь об особой точке $\lambda = 1$, то достаточно рассмотреть значения $\lambda \neq 1$.

Все такие значения *регулярны* по отношению к S: в самом деле, в противном случае однородное уравнение

$$(I - \lambda S) f = 0$$

допускало бы решение $f \neq 0$; так как

$$f = \lambda Sf = \lambda PKf,$$

то элемент f принадлежал бы подпространству $\mathfrak{M}_\nu$. Следовательно, выполнялись бы равенства

$$f=\lambda PKf=\lambda KPf=\lambda Kf,$$

из которых вытекает, что

$$\frac{\lambda}{\lambda-1}(I-K)f=f$$

и

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^{\nu}(I-K)^{\nu}f=f\neq 0,$$

а это противоречит тому, что f принадлежит $\mathfrak{M}_{\nu}$.

Остается проверить свойство 4), т. е. что точка $\lambda\neq 1$ регулярна по отношению к R тогда и только тогда, когда она регулярна по отношению к K. Но это утверждение будет прямо следовать из соотношений

$$(I-\lambda S)(I-\lambda R)=(I-\lambda R)(I-\lambda S)=I-\lambda K,$$

если учесть, что, как было показано выше, оператор $(I-\lambda S)^{-1}$ существует.

79. Расположение особых точек. В п. 71 было показано, что особые точки оператора K образуют конечное или счетное множество, не имеющее конечных точек накопления. Дадим еще одно доказательство этого факта, основанное на свойстве полной непрерывности оператора K.

Допустим противное, т. е. что существует некоторая бесконечная ограниченная последовательность особых точек $\{\lambda_n\}$. Каждое из однородных уравнений

$$(I-\lambda_n K)\varphi=0$$

имеет некоторое решение $\varphi_n\neq 0$. Покажем, что в бесконечной последовательности функций $\{\varphi_n\}$ функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ линейно независимы при любом m.

В самом деле, предположив, что это неверно, возьмем первую в последовательности $\{\varphi_n\}$ функцию φ_m, выражающуюся линейно через предшествующие:

$$\varphi_m=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\ldots+c_{m-1}\varphi_{m-1}. \tag{45}$$

Тогда будем иметь

$$\varphi_m=\lambda_m K\varphi_m=\lambda_m(c_1K\varphi_1+\ldots+c_{m-1}K\varphi_{m-1})=$$
$$=\lambda_m\left(\frac{c_1}{\lambda_1}\varphi_1+\ldots+\frac{c_{m-1}}{\lambda_{m-1}}\varphi_{m-1}\right);$$

вычтя это равенство из (45), получим

$$\left(1-\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)c_1\varphi_1+\ldots+\left(1-\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}\right)c_{m-1}\varphi_{m-1}=0.$$

По предположению, функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ линейно независимы, поэтому $c_1 = \ldots = c_{m-1} = 0$ и $\varphi_m = 0$, что противоречит выбору функции φ_m как ненулевого решения соответствующего уравнения.

Пусть теперь E_m — совокупность всевозможных линейных комбинаций функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$; множества $E_1, E_2, \ldots$ образуют, как мы видели, строго возрастающую последовательность. Пусть $\{g_n\}$ — ортонормированная последовательность, которая получается из $\{\varphi_n\}$ процессом ортогонализации (см. п. 33):

$$g_n = a_{n1}\varphi_1 + a_{n2}\varphi_2 + \ldots + a_{nn}\varphi_n.$$

Тогда E_m можно рассматривать как множество всевозможных линейных комбинаций элементов $g_1, g_2, \ldots, g_m$.

Последовательность $\{\lambda_n g_n\}$ ограничена по норме, следовательно, в $\{\lambda_n K g_n\}$ должна содержаться подпоследовательность, сходящаяся в среднем. Но это невозможно, так как при $n > m$

$$\|\lambda_n K g_n - \lambda_m K g_m\| \geqslant 1;$$

такое неравенство вытекает из того, что

$$\lambda_n K g_n - \lambda_m K g_m = g_n - g,$$

где

$$g = g_n - \lambda_n K g_n + \lambda_m K g_m = \sum_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_i}\right) a_{ni}\varphi_i + \lambda_m \sum_{i=1}^{m} \frac{a_{mi}}{\lambda_i}\varphi_i;$$

действительно, элемент g принадлежит E_{n-1}, следовательно, он ортогонален g_n и поэтому

$$\|g_n - g\|^2 = \|g_n\|^2 + \|g\|^2 \geqslant \|g_n\|^2 = 1.$$

Полученное противоречие показывает, что в любой ограниченной области комплексной плоскости может быть заключено лишь конечное число особых точек, что эквивалентно нашему первоначальному утверждению.

80. Каноническое разложение, соответствующее особой точке. Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_m$ — лииейные множества в L^2; условимся называть *векторной суммой* этих множеств и обозначать

$$E_1 + E_2 + \ldots + E_m$$

совокупность элементов вида

$$h = f_1 + f_2 + \ldots + f_m,$$

где каждое f_k принадлежит соответствующему E_k. Векторная сумма линейных множеств также представляет собой линейное множество. Будем говорить, что множества $E_1, E_2, \ldots, E_m$ *линейно независимы*, если элемент h равен нулю только тогда, когда все слагаемые f_k равны нулю. В этом случае слагаемые f_k однозначно определяются элементом h.

Пусть, в частности, $\mathfrak{M}_\nu$ и $\mathfrak{N}_\nu$ — подпространства, соответствующие 1 — особой точке оператора $\lambda_0 K$, т. е. особой точке λ_0 оператора K. Согласно доказанному в п. 77, $\mathfrak{M}_\nu$ и $\mathfrak{N}_\nu$ линейно независимы и $\mathfrak{M}_\nu + \mathfrak{N}_\nu = L^2$.

Так как подпространство $\mathfrak{M}_{\nu-1}$ содержится в $\mathfrak{M}_\nu$ и не исчерпывает его, то существует подпространство $\mathfrak{Q}_\nu$ с числом измерений $\geqslant 1$, такое, что $\mathfrak{M}_{\nu-1}$ и $\mathfrak{Q}_\nu$ линейно независимы и $\mathfrak{M}_\nu = \mathfrak{Q}_\nu + \mathfrak{M}_{\nu-1}$; это подпространство $\mathfrak{Q}_\nu$ образовано всеми элементами из $\mathfrak{M}_\nu$, ортогональными $\mathfrak{M}_{\nu-1}$. Оператор $T = I - \lambda_0 K$ отображает $\mathfrak{Q}_\nu$ в некоторое множество, которое мы обозначим $T\mathfrak{Q}_\nu$, содержащееся в $\mathfrak{M}_{\nu-1}$, но не имеющее с $\mathfrak{M}_{\nu-2}$ общих элементов, отличных от 0. Будучи линейным множеством, заключенным в конечномерном подпространстве $\mathfrak{M}_{\nu-1}$, множество $T\mathfrak{Q}_\nu$ замкнуто и, следовательно, представляет собой подпространство (см. п. 34); то же справедливо и относительно $T\mathfrak{Q}_\nu + \mathfrak{M}_{\nu-2}$. Это последнее заключено в $\mathfrak{M}_{\nu-1}$, и можно найти такое подпространство $\mathfrak{Q}_{\nu-1}$, что $\mathfrak{Q}_{\nu-1} + T\mathfrak{Q}_\nu + \mathfrak{M}_{\nu-2} = \mathfrak{M}_{\nu-1}$ и $\mathfrak{Q}_{\nu-1}$, $T\mathfrak{Q}_\nu$, $\mathfrak{M}_{\nu-2}$ линейно независимы; может случиться, что $\mathfrak{Q}_{\nu-1}$ содержит только 0. Продолжая рассуждать таким образом, мы получим последовательно разложения

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_\nu &= \mathfrak{Q}_\nu + \mathfrak{M}_{\nu-1}, \\ \mathfrak{M}_{\nu-1} &= \mathfrak{Q}_{\nu-1} + T\mathfrak{Q}_\nu + \mathfrak{M}_{\nu-2}, \\ \mathfrak{M}_{\nu-2} &= \mathfrak{Q}_{\nu-2} + T\mathfrak{Q}_{\nu-1} + T^2\mathfrak{Q}_\nu + \mathfrak{M}_{\nu-3}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

с линейно независимыми слагаемыми в правых частях. Окончательно будем иметь

$$\mathfrak{M}_\nu = \sum_{n=0}^{\nu-1} T^n \mathfrak{Q}_\nu + \sum_{n=0}^{\nu-2} T^n \mathfrak{Q}_{\nu-1} + \dots + \sum_{n=0}^{1} T^n \mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_1,$$

где $\mathfrak{Q}_\mu$ — конечномерные подпространства, могущие в отдельных случаях состоять только из нулевого элемента, за исключением $\mathfrak{Q}_\nu$, всегда имеющего положительную размерность.

При $\mathfrak{Q}_\mu \neq (0)$ выберем в $\mathfrak{Q}_\mu$ систему линейно независимых функций $\{\varphi_{\mu i}^{(0)}\}$ $(i = 1, 2, \dots, r_\mu)$, порождающую $\mathfrak{Q}_\mu$. Положим

$$\varphi_{\mu i}^{(\varkappa)} = \left(-\frac{1}{\lambda_0} T\right)^{\varkappa} \varphi_{\mu i}^{(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, r_\mu, \quad \varkappa = 1, 2, \dots, \mu - 1.$$

Функции $\varphi_{\mu i}^{(\varkappa)}$ $(i = 1, 2, \dots, r_\mu)$ порождают, очевидно, все подпространство $T^\varkappa \mathfrak{Q}_\mu$, и, кроме того, они линейно независимы. В самом деле, если

$$\sum_i c_i \varphi_{\mu i}^{(\varkappa)} = 0,$$

т. е. $T^\varkappa \psi = 0$, где

$$\psi = \sum_i c_i \varphi_{\mu i}^{(0)},$$

то ψ принадлежит $\mathfrak{M}_\varkappa$, а следовательно, и $\mathfrak{M}_{\mu-1}$; так как ψ одновременно принадлежит $\mathfrak{Q}_\mu$, то $\psi=0$, откуда следует, что $c_1=c_2=\ldots=c_{r_\mu}=0$. Таким образом, *все* функции

$$\varphi_{\mu i}^{(\varkappa)} \quad (\mu=1, 2, \ldots, \nu;\ i=1, 2, \ldots, r_\mu;\ \varkappa=1, 2, \ldots, \mu-1)$$

линейно независимы и порождают в совокупности подпространство $\mathfrak{M}_\nu$.

Очевидно,

$$\varphi_{\mu i}^{(\varkappa+1)}=-\frac{1}{\lambda_0}T\varphi_{\mu i}^{(\varkappa)}=\left(K-\frac{1}{\lambda_0}I\right)\varphi_{\mu i}^{(\varkappa)} \quad \text{при } \varkappa=0, 1, \ldots, \mu-2$$

и

$$T\varphi_{\mu i}^{(\mu-1)}=(I-\lambda_0 K)\,\varphi_{\mu i}^{(\mu-1)}=0,$$

так как $\varphi_{\mu i}^{(\mu-1)}$ принадлежит $\mathfrak{M}_1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} K\varphi_{\mu i}^{(\varkappa)}&=\frac{1}{\lambda_0}\varphi_{\mu i}^{(\varkappa)}+\varphi_{\mu i}^{(\varkappa+1)} \quad \text{при } \varkappa=0, 1, \ldots, \mu-2,\\ K\varphi_{\mu i}^{(\mu-1)}&=\frac{1}{\lambda_0}\varphi_{\mu i}^{(\mu-1)}. \end{aligned} \tag{46}$$

Пусть $\mathfrak{L}_{\mu i}$ — подпространства, порожденные элементами $\varphi_{\mu i}^{(0)}$, $\varphi_{\mu i}^{(1)}, \ldots, \varphi_{\mu i}^{(\mu-1)}$; очевидно, $\mathfrak{M}_\nu=\sum\limits_{\mu,\, i}\mathfrak{L}_{\mu i}$ и из (46) следует, что каждое $\mathfrak{L}_{\mu i}$ отображается оператором K само в себя.

Резюмируем полученные результаты:

Теорема. *Если точка λ_0 — особая по отношению к оператору K, то пространство L^2 может быть представлено как векторная сумма линейно независимых подпространств $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots, \mathfrak{L}_\rho, \mathfrak{N}$, каждое из которых отображается оператором K само в себя таким образом, что в подпространстве $\mathfrak{N}$ оператор $I-\lambda_0 K$ имеет обратный, а в каждом $\mathfrak{L}$ можно выбрать конечную полную систему линейно независимых элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$, удовлетворяющих соотношениям*

$$K\varphi_\varkappa=\frac{1}{\lambda_0}\varphi_\varkappa+\varphi_{\varkappa+1} \quad (\varkappa=1, 2, \ldots, \rho-1)$$

и

$$K\varphi_\rho=\frac{1}{\lambda_0}\varphi_\rho.$$

§ 5. ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

81. Задачи Дирихле и Неймана. Решение их методом Фредгольма[1]). Из многочисленных приложений интегральных уравнений к различным задачам математики и физики следует особо остановиться на двух задачах теории потенциала, носящих имена

[1]) Фредгольм [1]. Подробное изложение читатель найдет в книге Гурса [2].