то ψ принадлежит $\mathfrak{M}_\varkappa$, а следовательно, и $\mathfrak{M}_{\mu-1}$; так как ψ одновременно принадлежит $\mathfrak{Q}_\mu$, то $\psi=0$, откуда следует, что $c_1=c_2=\ldots=c_{r_\mu}=0$. Таким образом, *все* функции

$$\varphi_{\mu i}^{(\varkappa)} \quad (\mu=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu;\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ r_\mu;\ \varkappa=1,\ 2,\ \ldots,\ \mu-1)$$

линейно независимы и порождают в совокупности подпространство $\mathfrak{M}_\nu$.

Очевидно,

$$\varphi_{\mu i}^{(\varkappa+1)}=-\frac{1}{\lambda_0}T\varphi_{\mu i}^{(\varkappa)}=\left(K-\frac{1}{\lambda_0}I\right)\varphi_{\mu i}^{(\varkappa)} \quad \text{при } \varkappa=0,\ 1,\ \ldots,\ \mu-2$$

и

$$T\varphi_{\mu i}^{(\mu-1)}=(I-\lambda_0 K)\,\varphi_{\mu i}^{(\mu-1)}=0,$$

так как $\varphi_{\mu i}^{(\mu-1)}$ принадлежит $\mathfrak{M}_1$. Следовательно,

$$K\varphi_{\mu i}^{(\varkappa)}=\frac{1}{\lambda_0}\varphi_{\mu i}^{(\varkappa)}+\varphi_{\mu i}^{(\varkappa+1)} \quad \text{при } \varkappa=0,\ 1,\ \ldots,\ \mu-2,$$

$$K\varphi_{\mu i}^{(\mu-1)}=\frac{1}{\lambda_0}\varphi_{\mu i}^{(\mu-1)}. \tag{46}$$

Пусть $\mathfrak{L}_{\mu i}$ — подпространства, порожденные элементами $\varphi_{\mu i}^{(0)}$, $\varphi_{\mu i}^{(1)}$, $\ldots$, $\varphi_{\mu i}^{(\mu-1)}$; очевидно, $\mathfrak{M}_\nu=\sum\limits_{\mu,\ i}\mathfrak{L}_{\mu i}$ и из (46) следует, что каждое $\mathfrak{L}_{\mu i}$ отображается оператором K само в себя.

Резюмируем полученные результаты:

Теорема. *Если точка λ_0 — особая по отношению к оператору K, то пространство L^2 может быть представлено как векторная сумма линейно независимых подпространств $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, ..., $\mathfrak{L}_\rho$, $\mathfrak{N}$, каждое из которых отображается оператором K само в себя таким образом, что в подпространстве $\mathfrak{N}$ оператор $I-\lambda_0 K$ имеет обратный, а в каждом $\mathfrak{L}$ можно выбрать конечную полную систему линейно независимых элементов φ_1, φ_2, ..., φ_ρ, удовлетворяющих соотношениям*

$$K\varphi_\varkappa=\frac{1}{\lambda_0}\varphi_\varkappa+\varphi_{\varkappa+1} \quad (\varkappa=1,\ 2,\ \ldots,\ \rho-1)$$

и

$$K\varphi_\rho=\frac{1}{\lambda_0}\varphi_\rho.$$

§ 5. ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

81. Задачи Дирихле и Неймана. Решение их методом Фредгольма[1]. Из многочисленных приложений интегральных уравнений к различным задачам математики и физики следует особо остановиться на двух задачах теории потенциала, носящих имена

[1]) Фредгольм [1]. Подробное изложение читатель найдет в книге Гурса [2].

Дирихле и Неймана. Именно эти задачи привели к быстрому развитию теории интегральных уравнений, в первую очередь в трудах К. Неймана, Пуанкаре и Фредгольма.

Задача Дирихле состоит в отыскании функции, гармонической в некоторой области, непрерывной в замыкании этой области и совпадающей на границе с заданной непрерывной функцией. Задача Неймана формулируется аналогичным образом, только граничные значения задаются не для самой искомой функции, а для ее нормальной производной.

Рассмотрим случай плоской области, которая ограничена простой замкнутой кривой C, обладающей непрерывной кривизной. Мы различаем *внутреннюю* и *внешнюю* задачи в зависимости от того, рассматривается ли область D_i, лежащая внутри C, или область D_e, внешняя по отношению к C. В качестве параметра на кривой C выбрана длина дуги s, $0 \leqslant s \leqslant S$, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки.

1. В случае внутренней задачи Дирихле ищется функция $u(P)$, гармоническая в D_i и обладающая тем свойством, что при приближении точки P по области D_i к точке контура C, отвечающей значению параметра s, она имеет предел $u_i(s)$, равный заданной непрерывной на C функции $g(s)$:

$$u_i(s) = g(s). \tag{47}$$

Метод К. Неймана, ставший классическим, состоит в том, что u ищется в виде

$$u(P) = \int_G \mu(t) \frac{\partial}{\partial n_t} \log \frac{1}{r_{Pt}} dt = \int_G \mu(t) \frac{\cos(r_{Pt}, n_t)}{r_{Pt}} dt, \tag{48}$$

т. е. в виде потенциала двойного слоя с плотностью момента $\mu(t)$, нанесенного на C; r_{Pt} означает здесь расстояние от точки P до точки t на контуре C, а n_t — внутреннюю нормаль к C в точке t. Тогда, когда двойной слой непрерывен, потенциал (48), как известно, представляет собой функцию, гармоническую как в области D_i, так и в области D_e, и претерпевающую разрыв при переходе P через контур C. При этом ее значение $u(s)$ в точке s контура, предел изнутри $u_i(s)$ и предел извне $u_e(s)$ в той же точке связаны соотношениями

$$u_i(s) = u(s) + \pi\mu(s), \qquad u_e(s) = u(s) - \pi\mu(s). \tag{49}$$

Что касается производной по нормали, то она непрерывна:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e.$$

Функция μ должна, таким образом, удовлетворять интегральному уравнению

$$\frac{1}{\pi} g(s) = \mu(s) + \int_G K(s, t)\mu(t)\, dt \tag{50}$$

с ядром

$$K(s, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n_t} \log \frac{1}{r_{st}} = \frac{1}{\pi} \frac{\cos(r_{st}, n_t)}{r_{st}}.$$

Это последнее непрерывно не только прн $s \neq t$, но н при $s = t$. В самом деле, если $x(s)$ и $y(s)$ — прямоугольные координаты точки s на контуре C, то, согласно предположению, они имеют непрерывные вторые производные, и

$$K(s, t) = \frac{[y(s)-y(t)]\,x'(t) - [x(s)-x(t)]\,y'(t)}{[x(s)-x(t)]^2 + [y(s)-y(t)]^2} \to$$

$$\to \frac{1}{2}[y''(s_0)\,x'(s_0) - x''(s_0)\,y'(s_0)] = k(s_0),$$

когда s н t стремятся к общему пределу s_0; при этом $k(s_0)$ является кривизной C в точке s_0.

К уравнению (50) можно, следовательно, прнменнть теорию Фредгольма. Таким образом, либо *неоднородное* уравнение (50) *имеет непрерывное решение* $\mu(s)$ при любом выборе непрерывной функций $g(s)$, либо однородное уравнение

$$\nu(s) + \int_G K(s, t)\,\nu(t)\,dt = 0 \tag{51}$$

допускает ненулевое решение $\nu(s)$, также непрерывное. Сейчас мы покажем, что эта вторая возможность в данном случае исключается. В самом деле, из (47), (50) н (51) следует, что потенциал двойного слоя $v(P)$ с плотностью моментов $\nu(s)$, удовлетворяющей уравнению (51), при приближении точки P к кривой C имеет предел $v_i(s)$, тождественно равный нулю; отсюда следует, что $v(P) \equiv 0$ в D_i, так как именно на границе гармоническая функцня принимает свои наибольшее и наименьшее значения. Поэтому $\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i \equiv 0$ и, следовательно, $\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e \equiv 0$. Так как потенциал v — гармонческая функцня в области D_e, включая бесконечно удаленную точку, то к v применима формула Грина

$$\iint_{D_e} (v_x^2 + v_y^2)\,dx\,dy = -\int_C v_e \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e dt, \tag{52}$$

из которой вытекает, что $v_x \equiv v_y \equiv 0$ в D_e; таким образом, функция v в D_e постоянна. Будучи равной нулю на бесконечности, v тождественно равна нулю. Следовательно, $v_e(s) \equiv 0$ и, в снлу (49),

$$\nu(s) = \frac{1}{2\pi}(v_i(s) - v_e(s)) \equiv 0,$$

т. е. однородное уравнение имеет единственное решение $\nu(s) \equiv 0$.

Итак, *внутренняя задача Дирихле имеет решение при любых непрерывных граничных значениях* $g(s)$.

Внешняя задача Дирихле аналогичным образом приводит к уравнению

$$\frac{1}{\pi} g(s) = \mu(s) - \int_C K(s, t) \mu(t) \, dt. \tag{53}$$

Так же, как и выше, мы убеждаемся в том, что соответствующее однородное уравнение имеет только постоянные решения, но не обязательно нулевые, что вытекает из соотношения

$$\int_C K(s, t) \, dt = 1.$$

Таким образом, число линейно независимых решений равно 1. Точно так же сопряженное уравнение

$$\rho(s) - \int_C K(t, s) \rho(t) \, dt = 0$$

имеет решение $\rho_0(s) \not\equiv 0$, и все остальные его решения отличаются от $\rho_0(s)$ только постоянным множителем. Итак, для того чтобы уравнение (53) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\int_C g(s) \rho_0(s) \, ds = 0.$$

Выберем теперь постоянную c так, чтобы функция $g_1(s) = g(s) - c$ была ортогональна $\rho_0(s)$; если u_1 — потенциал двойного слоя, соответствующий, согласно (53), функции g_1, то решением внешней задачи будет $u = u_1 + c$.

Итак, *внешняя задача Дирихле имеет решение при любых непрерывных данных* $g(s)$.

2. В случае задачи Неймана решение ищется в виде потенциала простого слоя с непрерывной плотностью $\rho(s)$:

$$u(P) = \int_C \rho(t) \log \frac{1}{r_{Pt}} \, dt.$$

Эта функция — гармоническая в D_i и в D_e и непрерывная даже на контуре C:

$$u_i = u_e.$$

Однако ее производная по нормали разрывна:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_s}\right)_i + \pi\rho(s) = \left(\frac{\partial u}{\partial n_s}\right)_e - \pi\rho(s) = \int_C \rho(t) \frac{\partial}{\partial n_s} \log \frac{1}{r_{st}} \, dt.$$

Внутренняя задача Неймана, состоящая в том, чтобы отыскать такого рода функцию, удовлетворяющую условию

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n_s}\right)_i = h(s),$$

где $h(s)$ — заданная функция, приводит к интегральному уравнению

$$-\frac{1}{\pi}h(s)=\rho(s)-\int\limits_C \rho(t)K(t,\ s)\,dt \tag{54}$$

с ядром $K(t,\ s)$, сопряженным тому, которое фигурировало при рассмотрении задачи Дирихле. Мы видели, что однородное уравнение

$$\mu(s)-\int\limits_C K(s,\ t)\,\mu(t)\,dt=0$$

имеет только постоянные решения, следовательно, уравнение (54) имеет решение тогда и только тогда, когда $h(s)$ ортогональна 1.

Итак, *внутренняя задача Неймана имеет решение, какова бы ни была заданная непрерывная функция* $h(s)$, *удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_C h(s)\,ds=0.$$

Это условие вместе с тем необходимо, так как, согласно формуле Грина,

$$\int\limits_C \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i dt=\iint\limits_{D_i}\Delta u\,dx\,dy=0.$$

Внешняя задача Неймана также приводит к интегральному уравнению, отличающемуся от уравнения (54) тем, что в правой его части стоит знак плюс вместо знака минус. Соответствующее однородное уравнение не имеет отличных от нуля решений, потому что, как мы видели выше, сопряженное однородное уравнение имеет единственное нулевое решение.

Итак, *внешняя задача Неймана имеет решение, какова бы ни была заданная непрерывная функция* $h(s)$.

Задачи Дирихле и Неймана являются частными случаями „третьей краевой задачи", когда на границе области задаются значения некоторой линейной комбинации $hu+k\frac{\partial u}{\partial n}$ с коэффициентами h и k, представляющими собой непрерывные функции на C. Решение ищется в виде суммы потенциалов простого и двойного слоев, причем получается интегральное уравнение, подобное тем, которые были только что рассмотрены.

Такой же метод применим к аналогичным пространственным задачам даже в случае пространств произвольного конечного числа измерений. Но в отличие от плоских задач ядро оказывается при этом, вообще говоря, неограниченным. Однако некоторое итерированное ядро будет ограниченным, что гарантирует применимость теорем Фредгольма[1]).

[1]) См. ниже, п. 152.