Глава V

ГИЛЬБЕРТОВО И БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

82. Координатное гильбертово пространство. Интегральные уравнения, рассмотренные в предыдущей главе, могут быть сведены при помощи ортонормированных полных систем функций к системам линейных уравнений с бесконечно многими неизвестными¹). В самом деле, пусть $f-Kf=g$ — интегральное уравнение в L^2 с ядром $K(x, y)$, принадлежащим L^2, а $\{\varphi_n\}$ — произвольная полная ортонормированная система в пространстве L^2. Пусть

$$\sum_k x_k\varphi_k, \quad \sum_i y_i\varphi_i, \quad \sum_i K_{ik}\varphi_i$$

— разложения элементов f, g, $K\varphi_k$ относительно системы $\{\varphi_n\}$. Тогда

$$Kf=K\sum_k x_k\varphi_k=\sum_k x_k K\varphi_k,$$

откуда вытекает, что

$$(Kf, \varphi_i)=\sum_k x_k(K\varphi_k, \varphi_i)=\sum_k x_k K_{ik}$$

и, следовательно,

$$f-Kf=\sum_i\left(x_i-\sum_k K_{ik}x_k\right)\varphi_i.$$

Приравняв коэффициенты при φ_i в правой части предыдущего равенства соответствующим коэффициентам в разложении элемента g, получим бесконечную систему уравнений

$$x_i-\sum_k K_{ik}x_k=y_i \quad (i=1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Известные величины y_i образуют последовательность, такую, что ряд $\sum|y_i|^2$ сходится, ибо, в силу формулы Парсеваля (см. п. 33), этот ряд имеет сумму, равную $\|g\|^2$. По той же причине искомое решение $\{x_i\}$ должно быть последовательностью, для которой сходится ряд $\sum|x_i|^2$.

Условимся называть любую последовательность $\{a_k\}$, для которой ряд $\sum|a_k|^2$ сходится, элементом *координатного гильбертова пространства*, или *пространства* l^2. В этом пространстве, являющемся непосредственным обобщением n-мерного координат-

¹) Гильберт [1]; Шмидт [3]; Рисс [7] (гл. III—IV).

ного пространства, основные операции определяются следующим образом:

$$\{a_k\}+\{b_k\}=\{a_k+b_k\}, \quad c\{a_k\}=\{ca_k\},$$

$$(\{a_k\}, \{b_k\})=\sum_k a_k\overline{b_k}, \quad \|\{a_k\}\|=\Big(\sum_k |a_k|^2\Big)^{1/2}.$$

Если $\{\varphi_n\}$ — какая-нибудь полная ортонормированная система, то формула $f=\sum a_k\varphi_k$, означающая, что a_k являются „координатами f в системе $\{\varphi_k\}$", устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами f пространства L^2 и элементами $\{a_k\}$ пространства l^2 (см. п. 33). Это соответствие сохраняет как линейное строение обоих пространств (линейным комбинациям элементов f соответствуют линейные комбинации элементов $\{a_k\}$), так и метрическое их строение, ибо, в силу формулы Парсеваля, скалярные произведения и нормы элементов в L^2 равны скалярным произведениям и нормам соответствующих элементов в l^2.

То же верно и в том случае, когда пространство L^2 образовано функциями, определенными на произвольном измеримом множестве D, на числовой прямой или в пространстве нескольких измерений, причем интеграл понимается в смысле Лебега или в смысле Стильтьеса — Лебега относительно какого-либо распределения положительных масс. Так как любое такое L^2 сепарабельно, то в нем существует не более чем счетная полная ортонормированная система; конечной она будет лишь в том случае, когда массы сосредоточены в конечном числе точек множества D. За исключением этого тривиального случая, любое пространство L^2 имеет такое же линейное и метрическое строение, что и l^2. Само l^2 также может рассматриваться как частный случай пространства L^2, когда D представляет собой счетное множество точек, каждая из которых несет массу 1.

Вернемся к нашему интегральному уравнению и к системе уравнений (1) с бесконечным множеством неизвестных. Двойной ряд

$$\sum_{i,k}|K_{ik}|^2, \tag{2}$$

составленный из квадратов коэффициентов этих уравнений, сходится. В самом деле, произведение $\varphi_i(x)\overline{\varphi_k(y)}$, которое мы обозначим $\Phi_{ik}(x, y)$, является элементом пространства L^2 и

$$K_{ik}=(K\varphi_k, \varphi_i)=(K, \Phi_{ik});$$

так как эти произведения образуют, очевидно, ортонормированную систему в L^2, то, в силу неравенства Бесселя (см. п. 33),

$$\sum_{i,k}|(K, \Phi_{ik})|^2\leqslant|K|^2.$$

Обратно, всякая система уравнений вида (1), для которой сходится ряд (2), соответствует некоторому интегральному уравнению в L^2 с

$$g=\sum_i y_i\varphi_i \quad \text{и} \quad K(x, y)=\sum_{i,k} K_{ik}\Phi_{ik}(x, y);$$

эти ряды сходятся в среднем соответственно в L^2 и $\mathbf{L}^2$.

Сведéние интегрального уравнения к системе линейных уравнений со счетным множеством неизвестных позволяет применить еще один метод решения, состоящий в том, что система (1) заменяется системой уравнений с n неизвестными

$$x_i-\sum_{k=1}^{n} K_{ik}x_k=y_i \quad (i=1, 2, \ldots, n); \tag{3}$$

естественно ожидать, что ее решение, если оно существует, стремится при $n\to\infty$ к решению бесконечной системы (1). Как показал Гильберт, этот метод с успехом применим не только в том случае, когда сходится ряд (2), но и в более общем случае, когда бесконечная матрица (K_{ik}) соответствует произвольному вполне непрерывному оператору в пространстве l^2. Мы не настаиваем на этом методе, но в дальнейшем вернемся к операторам указанного вида.

83. Абстрактное гильбертово пространство. Соображения, развитые в предыдущем пункте, показывают, что пространства L^2 и l^2 имеют одинаковое строение как линейное, так и метрическое; следовательно, оба они могут рассматриваться как реализации одного и того же абстрактного пространства, в определение которого входят свойство линейности, существование скалярного произведения и нормы и, наконец, справедливость критерия Коши для сходимости в среднем (см. теорему Рисса—Фишера в случае пространства L^2).

Вот это определение:

Абстрактным гильбертовым пространством называется множество $\mathfrak{H}$ элементов f, g, h, ..., обладающее следующими свойствами **А**, **Б** *и* **В**[1]:

А. *$\mathfrak{H}$ представляет собой линейное пространство,* т. е. в $\mathfrak{H}$ определены действия сложения и умножения на действительные или комплексные числа, подчиняющиеся обычным правилам векторной алгебры; в частности, $\mathfrak{H}$ содержит элемент 0, равный $0\cdot f$ при любом f из $\mathfrak{H}$.

---

[1]) См. И. Нейман [1]; впрочем, этот автор вводит еще две аксиомы, требующие, чтобы пространство было сепарабельно и бесконечномерно (следовательно, оно должно быть счетномерно). Мы предпочитаем не исключать из рассмотрения ни конечномерные, ни несепарабельные пространства. О несепарабельных пространствах см. Лёвиг [1], Рисс [16], Реллих [1], Плеснер [4].

Б. $\mathfrak{H}$ *является метрическим пространством, причем метрика вводится с помощью понятия скалярного произведения.* Это означает, что любой паре элементов f, g поставлено в соответствие действительное или комплексное число (f, g), называемое их скалярным произведением, причем выполняются следующие условия:

$$(af, g) = a(f, g), \text{ каково бы ни было число } a;$$
$$(f+g, h) = (f, h) + (g, h); \quad (f, g) = \overline{(g, f)};$$
$$(f, f) > 0 \quad \text{при} \quad f \neq 0; \quad (f, f) = 0 \quad \text{при} \quad f = 0.$$

Норма $\|f\|$ элемента f определяется равенством

$$\|f\| = (f, f)^{1/2},$$

а *расстояние* между элементами f и g полагается равным

$$\|f - g\|.$$

В. $\mathfrak{H}$ *является полным пространством* в том смысле, что если последовательность $\{f_n\}$ элементов из $\mathfrak{H}$ такова, что $\|f_n - f_m\| \to 0$ при m, $n \to \infty$, то в $\mathfrak{H}$ существует элемент f^*, такой, что $\|f_n - f^*\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Замечание. Можно было бы считать, что элементы из $\mathfrak{H}$ умножаются только на действительные числа и что все скалярные произведения действительны; при этом мы получили бы *действительное* гильбертово пространство, реализацией которого может служить действительное L^2. Однако изучение интегральных уравнений, в частности то, что мы знаем об аналитических свойствах резольвентного оператора, показывает, что предпочтительнее рассматривать комплексное гильбертово пространство. Большинство результатов, которые мы получим, прямо переносятся на случай действительного пространства.

Так же, как в L^2, в пространстве $\mathfrak{H}$ можно определить сходимость двух видов, *сильную* и *слабую*. Последовательность $\{f_n\}$ элементов из $\mathfrak{H}$ сходится к элементу f^* *сильно*, если

$$\|f_n - f^*\| \to 0;$$

она сходится к f^* *слабо*, если

$$(f_n, g) \to (f, g),$$

каков бы ни был элемент g из $\mathfrak{H}$. *Сильная сходимость* будет обозначаться значком $\to$, *слабая* — значком $\rightharpoonup$. Для простоты сильная сходимость будет называться обычно просто сходимостью; в конкретном пространстве L^2 ей соответствует сходимость в среднем.

Пусть f и g — какие-нибудь элементы из $\mathfrak{H}$. Для любого действительного λ имеем

$$0 \leqslant (f + \lambda(f, g)g, f + \lambda(f, g)g) = (f, f) + 2\lambda|(f, g)|^2 + \lambda^2|(f, g)|^2(g, g);$$

следовательно, такой многочлен второй степени относительно λ не может иметь различных действительных корней, откуда вытекает, что

$$|(f, g)|^4-(f, f)\,|(f, g)|^2(g, g)\leqslant 0.$$

Таким образом [даже в случае $(f, g)=0$],

$$|(f, g)|^2\leqslant (f, f)(g, g)$$

или

$$|(f, g)|\leqslant \|f\|\|g\|.$$

Мы получили *неравенство Шварца* в абстрактном пространстве $\mathfrak{H}$. Знак равенства в нем, помимо тривиального случая $f=0$ или $g=0$, достигается только тогда, когда $f=-\lambda(f, g)g$ при некотором значении λ, т. е. когда f отличается от g только числовым множителем.

Неравенство Минковского

$$\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$$

вытекает отсюда так же, как в случае пространства L^2 (см. п. 21). Далее, так же как в случае L^2, получается неравенство

$$\|f_1-f_3\|\leqslant\|f_1-f_2\|+\|f_2-f_3\|,$$

означающее, что метрика, введенная нами в $\mathfrak{H}$, подчиняется *неравенству треугольника*.

Из неравенства Шварца непосредственно вытекает, что скалярное произведение непрерывно по совокупности своих множителей, т. е. что

$$(f_n, g_n)\longrightarrow(f, g),$$

когда $f_n\longrightarrow f$, $g_n\longrightarrow g$. В самом деле,

$$\begin{aligned}(f_n, g_n)-(f, g)\,|=|(f_n-f, g_n-g)+(f_n-f, g)+(f, g_n-g)|\leqslant\\ \leqslant\|f_n-f\|\|g_n-g\|+\|f_n-f\|\|g\|+\|f\|\|g_n-g\|\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что сильная сходимость последовательности влечет за собой слабую.

Другие понятия, такие, как ортогональность, подпространство, линейный функционал и т. д., а также основные теоремы, доказанные в п. 30—35 для пространства L^2, переносятся без всяких изменений на случай абстрактного пространства $\mathfrak{H}$. Единственным исключением является свойство сепарабельности L^2 (см. п. 32), но теорема о разложении и теорема выбора могут быть доказаны без помощи сепарабельности, следовательно, эти теоремы справедливы также в пространстве $\mathfrak{H}$.

Размерностью пространства $\mathfrak{H}$ называется наименьшая из мощностей полных подмножеств пространства $\mathfrak{H}$, т. е. подмножеств, обладающих тем свойством, что всевозможные конечные линейные комбинации их элементов всюду плотны в $\mathfrak{H}$. Размерность сепарабельного пространства, таким образом, конечна или счетна. В том случае, когда она конечна и равна n, $\mathfrak{H}$ называется *n-мерным унитарным пространством*. Если $\mathfrak{H}$ имеет счетную размерность, то $\mathfrak{H}$ называется *гильбертовым пространством в собственном смысле слова*. В таком пространстве всегда существует полная счетная ортонормированная система: ее можно получить, подвергнув процессу ортогонализации (см. п. 33) любое счетное полное подмножество.

84. Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Основные понятия. *Линейные операторы* в пространстве $\mathfrak{H}$ определяются совершенно так же, как в L^2, т. е. как аддитивные, однородные и ограниченные операторы; так же, как в случае L^2, определяется и *норма* оператора. Без всяких изменений переносятся на случай $\mathfrak{H}$ определения *суммы* и *произведения операторов*, *обратного оператора*, а также различных типов *сходимости*, слабой, сильной и равномерной (см. п. 66—67). Эти три типа сходимости записываются соответственно значками $\rightharpoonup$, $\to$ и $\Rightarrow$. Вместо сильной сходимости часто говорят просто о сходимости; сильный предел последовательности $\{T_n\}$ обозначается $\lim T_n$. Равномерную сходимость называют также сходимостью по норме.

В этих определениях даже в случае слабой сходимости нет надобности заранее предполагать, что предел T последовательности линейных операторов $\{T_n\}$ является линейным оператором. Свойства аддитивности и однородности оператора T вытекают непосредственно из соответствующих свойств операторов T_n. Что же касается ограниченности T, то она легко устанавливается, если известно, что T_n ограничены равномерно, т. е. если существует постоянная C, такая, что

$$\|T_n\| \leqslant C \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

В самом деле, при этом, в силу полунепрерывности нормы относительно слабой сходимости (см. п. 29),

$$\|Tf\| \leqslant \liminf \|T_n f\| \leqslant C\|f\|,$$

откуда следует, что

$$\|T\| \leqslant C.$$

Но существование такой постоянной вытекает уже из предположения о слабой сходимости последовательности $\{T_n\}$. В самом деле, известно, что если при каком-либо фиксированном f последовательность элементов $\{T_n f\}$ слабо сходится, то она ограничена (см. п. 31); остается только применить следующую теорему, которая доказывается точно так же, как аналогичная теорема о последовательностях линейных функционалов (п. 31).

Теорема. *Если последовательность линейных операторов $\{T_n\}$ сходится или хотя бы ограничена на каждом элементе f про-*

странства $\mathfrak{H}$, то она равномерно ограничена, т. е. ограничена последовательность норм $\|T_n\|$.

Сходящиеся последовательности линейных операторов ведут себя так же, как числовые последовательности: *сумма двух сходящихся последовательностей сходится к сумме их пределов, произведение — к произведению пределов*, причем сходимость понимается в одном и том же смысле (слабая, сильная, равномерная). Исключение составляет случай произведеиия двух слабо сходящихся последовательностей. Утверждение, касающееся суммы, очевидно; утверждение относительно произведения последовательностей, сходящихся сильно или равномерно, вытекает из соотношений

$$\|T_nT_n'f-TT'f\|=\|T_n(T_n'-T')f+(T_n-T)T'f\|\leqslant$$
$$\leqslant C\|(T_n'-T')f\|+\|(T_n-T)T'f\|$$

и

$$\|T_nT_n'-TT'\|\leqslant C\|T_n'-T'\|+\|T_n-T\|\|T'\|,$$

где $T=\lim T_n$, $T'=\lim T_n'$ и C — верхняя грань последовательности $\{\|T_n\|\}$.

Что касается случая слабой сходимости, то можно лишь доказать, что *из $T_n\rightharpoonup T$ и $T_n'\to T'$ следует $T_nT_n'\rightharpoonup TT'$*. Это вытекает из неравенств

$$|(T_nT_n'f-TT'f, g)|\leqslant|(T_n(T_n'-T')f, g)|+|((T_n-T)T'f, g)|\leqslant$$
$$\leqslant C\|(T_n'-T')f\|\|g\|+|(T_nT'f-TT'f, g)|.$$

Все сказанное в п. 67 относительно точек, регулярных и особых по отношению к некоторому линейному оператору, и об аналитических свойствах резольвентного оператора справедливо, очевидно, и в абстрактном случае.

В случае оператора T, порожденного ядром $T(x, y)$, сопряженный оператор T^* определяется как оператор, порожденный ядром $\overline{T(y, x)}$. При этом, как легко видеть, выполняется соотношение

$$(Tf, g)=(f, T^*g) \tag{4}$$

для любой пары элементов f, g пространства L^2. В случае абстрактного пространства $\mathfrak{H}$ соотношение (4) *определяет сопряженный оператор T^** для произвольного линейного оператора T.

Действительно, (Tf, g) при фиксированном g представляет собой линейный функционал, примененный к переменному элементу f; в силу теоремы, доказанной в п. 30, существует однозначно определенный элемент g^*, такой, что

$$(Tf, g)=(f, g^*)$$

при любом f. Положим $T^*g=g^*$; так определенный линейный оператор T^*, очевидно, аддитивен и однороден; покажем теперь, что он ограничен и его норма равна норме оператора T. Положив в (4) $f = T^*g$, получим

$$(T^*g, T^*g) = (TT^*g, g) \leqslant \|TT^*g\| \|g\| \leqslant \|T\| \|T^*g\| \|g\|,$$

откуда следует, что

$$\|T^*g\| \leqslant \|T\| \|g\|, \quad \|T^*\| \leqslant \|T\|.$$

Точно так же, положив $g = Tf$ в (4), получим $\|T\| \leqslant \|T^*\|$. Следовательно,

$$\|T^*\| = \|T\|. \tag{5}$$

Так как соотношение (4) симметрично **относительно** T и T^*, то

$$(T^*)^* = T.$$

Тождественный оператор I и оператор O, отображающий все элементы в 0, совпадают со своими сопряженными: $I^* = I$, $O^* = O$.

Из определения сопряженного оператора очевидным образом вытекают следующие равенства:

$$(aT)^* = \bar{a}T^*, \quad (T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*, \quad (T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*.$$

Если $T_n \Rightarrow T$, то, в силу (5), $T_n^* \Rightarrow T^*$. Если $T_n \to T$, то, очевидно, $T_n^* \rightharpoonup T^*$. Напротив, из $T_n \to T$ не следует, вообще говоря, что $T_n^* \to T^*$ [1]).

Если для T существует *обратный* оператор T^{-1}, то справедливы равенства

$$T^* (T^{-1})^* = (T^{-1})^* T^* = I^* = I,$$

следовательно, оператор T^* также имеет обратный

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Левая часть равенства (4) представляет собой *билинейную форму* относительно переменных f и g [обозначим ее кратко $(f \mid g)$]. Это означает, что $(f \mid g)$ обладает такими свойствами:

$$(f_1 + f_2 \mid g) = (f_1 \mid g) + (f_2 \mid g), \quad (f \mid g_1 + g_2) = (f \mid g_1) + (f \mid g_2),$$
$$(af \mid g) = a(f \mid g), \quad (f \mid ag) = \bar{a}(f \mid g);$$

кроме того, она ограничена, т. е.

$$|(f \mid g)| \leqslant M \|f\| \|g\|.$$

Наименьшее значение M, при котором это неравенство выполняется для всех f и g, равно, очевидно, $\|T\|$. Обратно, *всякой билинейной форме $(f \mid g)$ соответствует некоторый линейный оператор T,*

[1]) Например, если операторы T_n в пространстве l^2 определены равенствами $T_n\{x_1, x_2, \ldots\} = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$, то $T_n^*\{x_1, x_2, \ldots\} = \{0, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots\}$, где перед x_1 стоят n нулей. При этом $T_nx \to 0$, каков бы ни был вектор x, тогда как $\|T_n^*x\| = \|x\|$.

такой, что

$$(f\,|\,g) = (Tf, g);$$

в этом можно убедиться с помощью рассуждений, сходных с теми, которые были проведены при построении сопряженного оператора.

85. Вполне непрерывные линейные операторы. Рассмотрим теперь уравнения

$$f - Kf = g \quad \text{и} \quad f - K^*f = g,$$

соответствующие в абстрактном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ интегральным уравнениям со взаимно сопряженными ядрами в пространстве L^2. Разумеется, сейчас речи нет ни об интегралах, ни о ядрах; K и K^* представляют собой произвольные операторы в пространстве $\mathfrak{H}$, сопряженные друг другу в том смысле, как это было определено в предыдущем пункте.

Если K является оператором *конечного ранга*,

$$Kf = \sum_{i=1}^{r} (f, \psi_i)\,\varphi_i,$$

то

$$K^*f = \sum_{i=1}^{r} (f, \varphi_i)\,\psi_i$$

и оба уравнения сводятся к системам линейных алгебраических уравнений так же, как в случае интегрального уравнения с ядром конечного ранга (см. п. 70). Заметим, что, как это было показано выше (см. п. 78) в связи с одной частной задачей, оператор конечного ранга в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ может быть охарактеризован тем, что он отображает все пространство $\mathfrak{H}$ на некоторое его конечномерное подпространство.

Наши методы оказываются неприменимыми в случае произвольного линейного оператора K; в этом нет ничего удивительного, так как сама альтернатива Фредгольма не всегда справедлива. В самом деле, рассмотрим оператор K, очевидно, линейный, в пространстве L^2 функций, заданных на интервале $(0,1)$:

$$Kf(x) = (1 - x)\,f(x);$$

этот оператор, как легко видеть, совпадает со своим сопряженным. Уравнение $(I - K)f(x) = g(x)$, тождественное уравнению $xf(x) = g(x)$, разрешимо в L^2 не при всех $g(x)$ из L^2, хотя сопряженное однородное уравнение $xf(x) = 0$ имеет единственное решение $f(x) = 0$.

Если же ограничиться рассмотрением *вполне непрерывных* операторов K, то метод, изложенный в п. 77—80, можно будет применять в абстрактном пространстве $\mathfrak{H}$ совершенно так же, как в пространстве L^2. Сначала устанавливается теорема о разложении (п. 78), а на ее основе — альтернатива Фредгольма (п. 73). Разумеется, при этом соотношения $K_1^*K^* = K^*K_1^* = K_1^* - K^*$ выводятся из $KK_1 = K_1K = K_1 - K$ не с помощью ядер (которые в рассматриваемом случае отсутствуют), а прямо на основании определения и свойств сопряженного оператора.

Вместо этого „геометрического" метода можно было бы воспользоваться „аналитическим" методом, развитым в п. 71 и 72, по крайней мере для таких операторов, которые могут быть сколь угодно точно приближены по норме операторами конечного ранга. К числу таких операторов относятся все вполне непрерывные линейные операторы. В самом деле, предположим сначала, что мы имеем гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ в собственном смысле слова, и пусть $\{\varphi_k\}$ — какая-нибудь полная ортонормированная последовательность. Тогда имеет место следующая

Теорема. *Если K — вполне непрерывный линейный оператор, то „усеченные" операторы K_n, определенные равенствами*

$$K_n f = \sum_{i, j=1}^{n} (f, \varphi_i)(K\varphi_i, \varphi_j)\varphi_j,$$

равномерно стремятся к K при $n \to \infty$.

Заметим сначала, что K_n можно записать в виде $K_n = P_n K P_n$, где P_n — проекционный оператор, отображающий $\mathfrak{H}$ на подпространство, порожденное элементами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, т. е.

$$P_n f = \sum_{i=1}^{n} (f, \varphi_i)\varphi_i.$$

Отметим еще следующие соотношения, которыми мы воспользуемся:

$$P_n^* = P_n, \quad \|P_n\| \leqslant 1, \quad \|I - P_n\| \leqslant 1, \quad P_n \to I.$$

Если бы теорема не была верна, т. е. $\|K - K_n\|$ не стремилось бы к нулю при $n \to \infty$, то существовала бы последовательность элементов f_n, удовлетворяющая условиям: $\|f_n\| = 1$ и для бесконечного множества значений n

$$\|(K - K_n) f_n\| \geqslant q, \tag{6}$$

где q — некоторое положительное число, не зависящее от n. Так как оператор K вполне непрерывен, то, не ограничивая общности, можно предположить, что последовательности $\{Kf_n\}$ и $\{K(I - P_n) f_n\}$ сходящиеся; пусть g и h — соответственно их пределы. Исходя из равенств

$$K - K_n = K - P_n K P_n = (I - P_n) K + P_n K (I - P_n),$$

получаем

$$\|(I - P_n) K f_n\| \leqslant \|(I - P_n)(K f_n - g)\| + \\ + \|(I - P_n) g\| \leqslant \|K f_n - g\| + \|g - P_n g\| \to 0,$$

$$\|P_n K (I - P_n) f_n\| \leqslant \|K (I - P_n) f_n\| \to \|h\|,$$

причем

$$(h, h) = \lim_n (K(I - P_n) f_n, h) =$$
$$= \lim_n (f_n, (I - P_n) K^* h) \leqslant \lim_n \|(I - P_n) K^* h\| \to 0,$$

и, следовательно,

$$\|(K - K_n) f_n\| \to 0,$$

что противоречит условиям (6). Теорема, таким образом, доказана.

Далее, вместо оператора $K_n = P_n K P_n$ можно рассматривать KP_n или $P_n K$. Такие операторы отображают пространство, порожденное элементами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, само в себя и обращаются в нуль на его ортогональном дополнении, т. е. они, по существу, являются операторами, отображающими само в себя некоторое n-мерное пространство.

Случай вполне непрерывного оператора в *несепарабельном* пространстве $\mathfrak{H}$ сводится к только что рассмотренному, так как, по существу, всякий такой оператор K представляет собой оператор в некотором сепарабельном пространстве; а именно, *в $\mathfrak{H}$ обязательно найдется такое сепарабельное подпространство $\mathfrak{H}_0$, что K отображает $\mathfrak{H}_0$ само в себя и обращается в нуль на ортогональном дополнении этого подпространства.*

Действительно, так как оператор $A = K^* K$ вполне непрерывен и $A^* = A$, то, как будет доказано в следующей главе, существует последовательность элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ (собственных элементов, соответствующих собственным значениям $\neq 0$), такая, что для любого элемента f, ортогонального всем φ_n, $Af = 0$ и, следовательно,

$$(Kf, Kf) = (K^* K f, f) = (Af, f) = 0, \quad Kf = 0.$$

Счетное множество элементов

$$K^m \varphi_n \quad (n = 1, 2, \ldots; \quad m = 0, 1, \ldots)$$

порождает некоторое сепарабельное подпространство $\mathfrak{H}_0$ пространства $\mathfrak{H}$, отображаемое оператором K само в себя; ортогональное дополнение подпространства $\mathfrak{H}$, будучи ортогонально, в частности, всем φ_n, отображается оператором K в нуль.

„Аналитический“ метод имеет еще и то преимущество, что он применим, по крайней мере частично, к *не вполне непрерывным операторам K*. Назовем *радиусом Фредгольма* линейного оператора K верхнюю грань Ω чисел $\omega > 0$, для которых существуют линейные операторы L конечного ранга, такие, что

$$\|K - L\| \leqslant \frac{1}{\omega}.$$

Мы видели, что для вполне непрерывного линейного оператора

$\Omega=\infty$. Взяв $L=0$, мы получим, что во всяком случае

$$\Omega \geqslant \frac{1}{\|K\|}.$$

Таким образом, согласно п. 71—73, резольвентный оператор K_λ внутри окружности

$$|\lambda|=\Omega$$

ведет себя так же, как в случае вполне непрерывного оператора K; в этой области, в частности, K_λ может иметь лишь конечное число полюсов, и для функциональных уравнений

$$f-\lambda Kf=g, \quad f'-\bar{\lambda}K^*f'=g'$$

выполняется альтернатива Фредгольма.

Укажем еще несколько вариантов определений *полной непрерывности*. Напомним сначала определение, данное в п. 76[1]):

Определение 1. *Оператор K называется вполне непрерывным, если всякое бесконечное ограниченное множество отображается им в компактное множество, т. е. если, какова бы ни была бесконечная последовательность элементов f_n, такая, что $\|f_n\|\leqslant C$, последовательность $\{Kf_n\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся в сильном смысле к некоторому элементу пространства $\mathfrak{H}$.*

Первоначально Гильберт[2]) ввел понятие полной непрерывности для числовой функции $F(f, g, \ldots, v)$ нескольких переменных элементов $f, g, \ldots, v$ пространства $\mathfrak{H}$; такая функция вполне непрерывна, если

$$F(f_n, g_n, \ldots, v_n) \to F(f, g, \ldots, v),$$

когда элементы $f_n, g_n, \ldots, v_n$ стремятся к элементам $f, g, \ldots, v$ *слабо*.

С помощью этого понятия полная непрерывность линейного оператора может быть определена следующим образом:

Определение 2. *Линейный оператор K называется вполне непрерывным, если билинейная форма $(f|g)=(Kf, g)$ является вполне непрерывной функцией элементов f и g.*

Вот еще два определения, которыми удобно пользоваться в некоторых приложениях:

Определение 3. *Линейный оператор K называется вполне непрерывным, если любую слабо сходящуюся последовательность он отображает в последовательность, сходящуюся сильно, т. е. если из $f_n \rightharpoonup f$ следует $Kf_n \to Kf$.*

1) См. Рисс [10] (стр. 74).

2) Гильберт [1] и Рисс [7] (стр. 96).

Определение 4. *Линейный оператор K называется вполне непрерывным, если из любой ограниченной бесконечной последовательности элементов можно извлечь подпоследовательность $\{f_n\}$, такую, что*

$$(f_n - f_m \mid f_n - f_m) = (K(f_n - f_m), f_n - f_m) \to 0 \quad \text{при} \quad m, n \to \infty.$$

Докажем эквивалентность всех этих определений.

$1 \to 2$. Предположим, что оператор K вполне непрерывен в смысле определения 1, и покажем, что тогда из $f_n \rightharpoonup f$, $g_n \rightharpoonup g$ должно следовать $(Kf_n, g_n) \to (Kf, g)$. Допустим, что это неверно; тогда существует такое положительное число q, что для бесконечного множества значений $n = n_1, n_2, \ldots$ выполняется неравенство

$$|(Kf_n, g_n) - (Kf, g)| \geqslant q.$$

Так как последовательность $\{f_n\}$, будучи слабо сходящейся, ограничена, то, не нарушая общности, можно считать последовательность $\{Kf_{n_k}\}$ сходящейся в сильном смысле. С другой стороны, если $f_n \rightharpoonup f$, то $Kf_n \rightharpoonup Kf$, так как

$$(Kf_n, h) = (f_n, K^*h) \to (f, K^*h) = (Kf, h),$$

каков бы ни был элемент h; следовательно, $Kf_{n_k} \to Kf$. Отсюда вытекает, что

$$|(Kf_{n_k}, g_{n_k}) - (Kf, g)| = |(Kf_{n_k} - Kf, g_{n_k}) + (Kf, g_{n_k} - g)| \leqslant$$
$$\leqslant \|Kf_{n_k} - Kf\| \|g_{n_k}\| + |(Kf, g_{n_k} - g)| \to 0$$

при $k \to \infty$, а в то же время $|(Kf_{n_k}, g_{n_k}) - (Kf, g)| \geqslant q > 0$. Полученное противоречие показывает, что оператор K вполне непрерывен также в смысле определения 2.

$2 \to 3$. Мы только что показали, что из $f_n \rightharpoonup f$ следует $Kf_n \rightharpoonup Kf$, каков бы ни был линейный оператор K. Если же K, кроме того, вполне непрерывен в смысле определения 2, то из $h_n = f_n - f \rightharpoonup 0$ и $g_n = Kf_n - Kf \rightharpoonup 0$ вытекает, что

$$\|Kf_n - Kf\|^2 = (Kh_n, g_n) \to 0,$$

т. е.

$$Kf_n \to Kf,$$

а это означает, что оператор K вполне непрерывен в смысле определения 3.

$3 \to 4$. Пусть $\{h_n\}$ — ограниченная последовательность элементов из $\mathfrak{H}$, $\|h_n\| \leqslant C$. В силу теоремы выбора, доказанной в п. 32 и 35, из $\{h_n\}$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $\{f_n\}$. Если оператор K вполне непрерывен в смысле определения 3, то последовательность $\{Kf_n\}$ сходится сильно и, следовательно,

$$|(K(f_n-f_m),\ f_n-f_m)| \leqslant \|Kf_n-Kf_m\|\cdot 2C \to 0$$

при $m,\ n\to\infty$. Таким образом, K вполне непрерывен также в смысле определения 4.

$4\to 1$. Допустим, что линейный оператор K вполне непрерывен в смысле определения 4. Возьмем какую-нибудь ограниченную бесконечную последовательность элементов $\{h_n\}$; тогда последовательности элементов

$$h_{1,n}=h_n+Kh_n,\quad h_{2,n}=h_n-Kh_n,\quad h_{3,n}=h_n+iKh_n,\quad h_{4,n}=h_n-iKh_n$$

также будут ограничены. Поэтому можно выбрать такую последовательность номеров $\{n_k\}$, что если h_{n_k} и h_{r,n_k} мы обозначим соответственно f_k и $f_{r,k}$, то будем иметь

$$(K(f_{r,k}-f_{r,j}),\ f_{r,k}-f_{r,j})\to 0 \quad (j,\ k\to\infty;\quad r=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Так как

$$(K(f_{1,k}-f_{1,j}),\ f_{1,k}-f_{1,j})-(K(f_{2,k}-f_{2,j}),\ f_{2,k}-f_{2,j})+$$
$$+i(K(f_{3,k}-f_{3,j}),\ f_{3,k}-f_{3,j})-i(K(f_{4,k}-f_{4,j}),\ f_{4,k}-f_{4,j})=$$
$$=4(K(f_k-f_j),\ K(f_k-f_j)),$$

то

$$\|Kf_k-Kf_j\|\to 0 \quad \text{при} \quad j,\ k\to\infty,$$

т. е. последовательность $\{Kf_k\}$ (сильно) сходится. Следовательно, оператор K вполне непрерывен также в смысле определения 1.

Этим доказательство эквивалентности всех четырех определений завершается.

86. Биортогональные последовательности. Теорема Пэли и Винера. Говорят, что последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ элементов гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ образуют *нормированную биортогональную систему*, если

$$(f_n,\ g_m)=0 \quad \text{при} \quad n\neq m \quad \text{и} \quad (f_n,\ g_n)=1.$$

Такая биортогональная система называется *полной*, если обе системы $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ полны в $\mathfrak{H}$, т. е. всевозможные линейные комбинации элементов f_n, так же как линейные комбинации g_n, всюду плотны в $\mathfrak{H}$. Тогда имеют место биортогональные разложения

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\ g_n)f_n,\qquad f=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\ f_n)g_n,$$

справедливые всякий раз, когда сходятся ряды в правых частях неравенств. Достаточно, конечно, рассмотреть только первый и этих рядов. Если f' — его сумма, то

$$(f',\ g_m)=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\ g_n)(f_n,\ g_m)=(f,\ g_m),$$

откуда вытекает, что $(f'-f,\ g_m)=0 \quad (m=1,\ 2,\ \ldots)$ и, следовательно, $f'-f=0$, $f'=f$.

Следующая теорема бывает полезна в различных вопросах, связанных с рядами функций. Ее доказательство основано на том, что если норма оператора K меньше 1, то существует оператор $(I-K)^{-1}$.

Теорема[1]). *Предположим, что последовательность $\{f_n\}$ мало отличается от некоторой полной ортонормированной последовательности $\{\varphi_n\}$ в том смысле, что существует постоянная θ, $0<\theta<1$, такая, что*

$$\left\|\sum a_n(\varphi_n-f_n)\right\|^2 \leqslant \theta^2 \sum |a_n|^2,$$

какова бы ни была конечная система комплексных чисел $\{a_n\}$. Тогда существует последовательность $\{g_n\}$, образующая вместе с $\{f_n\}$ полную биортогональную систему; для любого элемента f гильбертова пространства его биортогональные разложения

$$f=\sum (f,\ g_n) f_n, \qquad f=\sum (f,\ f_n) g_n$$

сходятся, причем

$$(1+\theta)^{-1}\|f\| \leqslant \left(\sum |(f,\ g_n)|^2\right)^{1/2} \leqslant (1-\theta)^{-1}\|f\|,$$
$$(1-\theta)\|f\| \leqslant \left(\sum |(f,\ f_n)|^2\right)^{1/2} \leqslant (1+\theta)\|f\|.$$

Для доказательства заметим, что в высказанных предположениях ряд

$$\sum (f,\ \varphi_n)(\varphi_n-f_n)$$

сходится при любом f и, если его сумму обозначить Kf, определяет некоторый линейный оператор K с нормой $\|K\| \leqslant \theta$. В самом деле, при $m,\ n \to \infty$

$$\left\|\sum_{k=m}^{n} (f,\ \varphi_k)(\varphi_k-f_k)\right\|^2 \leqslant \theta^2 \sum_{k=m}^{n} |(f,\ \varphi_k)|^2 \to 0,$$

что обеспечивает существование элемента Kf. Оператор K, очевидно, линеен. Наконец, так как

$$\|Kf\|^2=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} (f,\ \varphi_k)(\varphi_k-f_k)\right\|^2 \leqslant \lim_{n\to\infty} \theta^2 \sum_{k=1}^{n} |(f,\ \varphi_k)|^2=\theta^2\|f\|^2,$$

то $\|K\| \leqslant \theta$ и, следовательно, $\|K^*\| \leqslant \theta$.

Таким образом, оператор $T=I-K$ имеет обратный и

$$(1-\theta)\|f\| \leqslant \|Tf\| \leqslant (1+\theta)\|f\|, \qquad (1-\theta)\|f\| \leqslant \|T^*f\| \leqslant (1+\theta)\|f\|,$$
$$(1-\theta)\|T^{-1}g\| \leqslant \|g\| \leqslant (1+\theta)\|T^{-1}g\|.$$

---

[1]) Пэли и Винер [1] (стр. 100). Приведенное здесь доказательство предложено С.-Надем (см. [5]; там же читатель найдет более общую теорему).

Теперь, заметив, что $T\varphi_n = f_n$, покажем, что элементы $g_n = (T^{-1})^* \varphi_n$ образуют последовательность, обладающую требуемыми свойствами. Действительно,

$$(f_n, g_m) = (T\varphi_n, (T^{-1})^* \varphi_m) = (T^{-1}T\varphi_n, \varphi_m) = (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$$

и, каков бы ни был элемент f пространства $\mathfrak{H}$,

$$f = T(T^{-1}f) = T\sum_n (T^{-1}f, \varphi_n)\varphi_n = \sum_n (f, (T^{-1})^*\varphi_n) T\varphi_n = \\ = \sum_n (f, g_n) f_n,$$

$$f = (T^*)^{-1}T^*f = (T^*)^{-1}\sum_n (T^*f, \varphi_n)\varphi_n = \\ = \sum_n (f, T\varphi_n)(T^*)^{-1}\varphi_n = \sum_n (f, f_n) g_n.$$

Мы видим, что системы $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ — полные. Далее,

$$\sum_n |(f, g_n)|^2 = \sum_n |(T^{-1}f, \varphi_n)|^2 = \|T^{-1}f\|^2,$$

$$\sum_n |(f, f_n)|^2 = \sum_n |(T^*f, \varphi_n)|^2 = \|T^*f\|^2,$$

и теорема, таким образом, доказана.

В качестве примера приведем одно применение этой теоремы в теории *негармонических рядов Фурье*. Рассмотрим в пространстве $L^2(-\pi, \pi)$ функции

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\lambda_n x} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

и предположим, что они мало отличаются от функций

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$$

в том смысле, что

$$M = \max_n |\lambda_n - n| < \frac{\log 2}{\pi}.$$

Функции $\varphi_n(x)$ образуют полную ортогональную систему, и так как

$$e^{i\lambda_n x} - e^{inx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[i(\lambda_n - n)]^k}{k!} x^k e^{inx}$$

и

$$\|x^k g(x)\| \leqslant \pi^k \|g(x)\|,$$

то, какова бы ни была конечная система комплексных чисел $\{a_n\}$, выполняются соотношения

$$\left\| \sum_n a_n (f_n - \varphi_n) \right\| = \left\| \sum_n a_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[i(\lambda_n - n)]^k}{k!} x^k \varphi_n(x) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^k}{k!} \left\| \sum_n a_n [i(\lambda_n - n)]^k \varphi_n(x) \right\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^k}{k!} \left\{ \sum_n |a_n|^2 |\lambda_n - n|^{2k} \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^k}{k!} M^k \left\{ \sum_n |a_n|^2 \right\}^{1/2} = (e^{M\pi} - 1) \left\{ \sum_n |a_n|^2 \right\}^{1/2}.$$

Положив $\theta = e^{M\pi} - 1$, мы получим $\theta < 1$ и сможем применить только что доказанную теорему к последовательности $\{f_n(x)\}$ [1]).

§ 2. БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

87. Банаховы пространства и пространства, им сопряженные. Функциональные пространства L^p при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (см. п. 36) и пространство C непрерывных функций (см. п. 50), так же как L^2, представляют собой *линейные метрические* пространства; норма определяется в этих пространствах по-разному, но она всегда подчинена неравенству

$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|,$$

а сходимость, основанная на метрике $\|f - g\|$, обладает тем свойством, что для нее справедлив критерий Коши.

При этом пространства L^p $(p \neq 2)$ и C отличаются от L^2 тем, что норма в них не определяется формулой $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ на основе некоторого скалярного произведения (f, g), другими словами, L^p $(p \neq 2)$ и C не могут быть заданы как гильбертовы пространства с той же нормой.

В самом деле, в гильбертовом пространстве справедлива формула

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2, \tag{7}$$

которой мы уже пользовались в п. 30. В пространствах же L^p $(p \neq 2)$ и C формула (7) не выполняется; чтобы в этом убедиться, достаточно взять какие-нибудь две функции с нормами, равными 1, удовлетворяющие условию $f(x) \cdot g(x) \equiv 0$.

Пространства L^p и C принадлежат классу так называемых *банаховых пространств*, которые определяются следующим образом [2]):

Банаховым пространством называется множество $\mathfrak{B}$ элементов f, g, ..., удовлетворяющее, так же как гильбертово про-

---

[1]) См. Дэффин и Икес [1]. При более жестком условии $M < \frac{1}{\pi^2}$ этот результат получен Пэли и Винером (см. [1], стр. 108).

[2]) Банах [3]; см. также Хаусдорф [1] и Дьедонне [1].