выполняются соотношения

$$\left\|\sum_n a_n(f_n-\varphi_n)\right\|=\left\|\sum_n a_n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[i(\lambda_n-n)]^k}{k!}x^k\varphi_n(x)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi^k}{k!}\left\|\sum_n a_n[i(\lambda_n-n)]^k\varphi_n(x)\right\|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi^k}{k!}\left\{\sum_n|a_n|^2|\lambda_n-n|^{2k}\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi^k}{k!}M^k\left\{\sum_n|a_n|^2\right\}^{1/2}=(e^{M\pi}-1)\left\{\sum_n|a_n|^2\right\}^{1/2}.$$

Положив $\theta=e^{M\pi}-1$, мы получим $\theta<1$ и сможем применить только что доказанную теорему к последовательности $\{f_n(x)\}$ [1]).

§ 2. БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

87. Банаховы пространства и пространства, им сопряженные. Функциональные пространства L^p при $1\leqslant p\leqslant\infty$ (см. п. 36) и пространство C непрерывных функций (см. п. 50), так же как L^2, представляют собой *линейные метрические* пространства; норма определяется в этих пространствах по-разному, но она всегда подчинена неравенству

$$\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|,$$

а сходимость, основанная на метрике $\|f-g\|$, обладает тем свойством, что для нее справедлив критерий Коши.

При этом пространства L^p $(p\neq 2)$ и C отличаются от L^2 тем, что норма в них не определяется формулой $\|f\|=(f, f)^{1/2}$ на основе некоторого скалярного произведения (f, g), другими словами, L^p $(p\neq 2)$ и C не могут быть заданы как гильбертовы пространства с той же нормой.

В самом деле, в гильбертовом пространстве справедлива формула

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\|f\|^2+2\|g\|^2, \tag{7}$$

которой мы уже пользовались в п. 30. В пространствах же L^p $(p\neq 2)$ и C формула (7) не выполняется; чтобы в этом убедиться, достаточно взять какие-нибудь две функции с нормами, равными 1, удовлетворяющие условию $f(x)\cdot g(x)\equiv 0$.

Пространства L^p и C принадлежат классу так называемых *банаховых пространств*, которые определяются следующим образом [2]):

Банаховым пространством называется множество $\mathfrak{B}$ элементов f, g, ..., удовлетворяющее, так же как гильбертово про-

[1]) См. Дэффин и Икес [1]. При более жестком условии $M<\frac{1}{\pi^2}$ этот результат получен Пэли и Винером (см. [1], стр. 108).

[2]) Банах [3]; см. также Хаусдорф [1] и Дьедонне [1].

странство, условиям **А** *и* **В**, *а вместо условия* **Б** — *более слабому условию*:

Б′. *Каждому элементу f из $\mathfrak{B}$ поставлено в соответствие число $\|f\| \geqslant 0$ — норма этого элемента, причем*

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|, \quad \|af\| = |a| \|f\|$$

и $\|f\| = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$.

Различают *действительные* и *комплексные* банаховы пространства в зависимости от того, определено ли произведение af только для действительных чисел a или для любых комплексных.

Заметим, не останавливаясь на доказательстве этого факта, что выполнение условия (7) не только необходимо для того, чтобы банахово пространство было гильбертовым пространством, но и достаточно; тогда, когда оно выполняется, в пространстве $\mathfrak{B}$ можно задать билинейную функцию (f, g), обладающую свойствами скалярного произведения, такую, что $(f, f) = \|f\|^2$. Для этого достаточно положить

$$(f, g) = \left\| \frac{1}{2}(f+g) \right\|^2 - \left\| \frac{1}{2}(f-g) \right\|^2$$

или

$$(f, g) = \left\| \frac{1}{2}(f+g) \right\|^2 - \left\| \frac{1}{2}(f-g) \right\|^2 + i \left\| \frac{1}{2}(f+ig) \right\|^2 - i \left\| \frac{1}{2}(f-ig) \right\|^2$$

в зависимости от того, действительное или комплексное банахово пространство рассматривается [1]).

Линейные функционалы и *операторы* и их *нормы* определяются в произвольном пространстве $\mathfrak{B}$ совершенно так же, как в рассмотренных выше частных случаях (см. п. 30 и 50). Непосредственно распространяется на общий случай теорема о последовательностях линейных функционалов, доказанная в п. 31 для пространства L^2.

Основная теорема о *продолжении* линейных функционалов, доказанная в п. 35 для пространства L^2 и в п. 52 для пространства C, может быть обобщена на произвольное банахово пространство $\mathfrak{B}$, но при этом возникают известные затруднения. Доказывая эту теорему для случая пространства L^2, мы опирались на теорему об ортогональных разложениях пространства L^2 (см. п. 34); эта последняя верна для всех гильбертовых пространств, сепарабельных и несепарабельных, но теряет смысл в случае банаховых пространств, в которых нет понятия ортогональности. С другой стороны, доказательство, проведенное для пространства C, применимо к любому *сепарабельному* банахову пространству $\mathfrak{B}$, т. е. к такому, в котором существует конечная или счетная система элементов, порождающая все пространство. В случае *несепарабельного* пространства $\mathfrak{B}$ приходится обращаться к теореме

[1]) Жордан и Нейман [1]. Другие условия такого рода, характеризующие гильбертово пространство, перечислены в статье Лорча [5].

Цермело, согласно которой всякое множество может быть вполне упорядочено; эта теорема, в свою очередь, опирается на аксиому выбора Цермело. Если функционал задан на некотором подмножестве E пространства $\mathfrak{B}$, то множество $\mathfrak{B} \setminus E$ вполне упорядочивается и путем трансфинитного применения процесса, описанного в п. 52, функционал A распространяется на все пространство $\mathfrak{B}$.

Из теоремы о продолжении, в частности, следует, что *в любом банаховом пространстве* $\mathfrak{B}$ *существуют линейные функционалы, не равные нулю тождественно.* Более того, справедлива следующая

Теорема. *Каков бы ни был фиксированный элемент f_0 пространства $\mathfrak{B}$, можно построить в $\mathfrak{B}$ линейный функционал Ff, такой, что*

$$Ff_0 = \|f_0\| \quad \text{и} \quad \|F\| = 1.$$

Для доказательства зададим Ff сначала на множестве E элементов f вида $f = cf_0$, положив $Ff = c\|f_0\|$, а затем продолжим функционал F на все пространство так, чтобы его норма равнялась 1.

Теорема о продолжении линейных функционалов и все ее перечисленные здесь следствия справедливы как в действительных, так и в комплексных банаховых пространствах.

Введем теперь важное понятие *сопряженного пространства.* Для простоты ограничимся случаем действительного пространства $\mathfrak{B}$.

Совокупность всех линейных функционалов, заданных в $\mathfrak{B}$ и принимающих действительные значения, обозначим $\mathfrak{B}^*$. Множество $\mathfrak{B}^*$ *линейно*, так как его элементы можно естественным образом складывать и умножать на действительные числа. Кроме того, оно *нормировано*, и легко видеть, что норма линейного функционала удовлетворяет условию **Б**$'$. Наконец, условие **В** также выполняется, т. е. $\mathfrak{B}^*$ представляет собой *полное* метрическое пространство. В самом деле, если последовательность линейных функционалов $\{F_n\}$ обладает тем свойством, что $\|F_n - F_m\| \to 0$ при $m, n \to \infty$, то

$$|F_nf - F_mf| \leqslant \varepsilon \|f\| \tag{8}$$

для $m, n > n_0(\varepsilon)$ и для всех элементов f из $\mathfrak{B}$. Отсюда вытекает, что числовая последовательность $\{F_nf\}$ сходится, каков бы ни был f. Обозначив ее предел Ff, мы определим функционал F, аддитивный и однородный, так как все F_n аддитивны и однородны. Перейдя в неравенстве (8) к пределу при $n \to \infty$, получим

$$|Ff - F_mf| \leqslant \varepsilon \|f\| \quad \text{при} \quad m \geqslant n_0(\varepsilon),$$

откуда следует, что

$$\|F\| \leqslant \|F_m\| + \varepsilon \quad \text{при} \quad m \geqslant n_0(\varepsilon),$$

т. е.

$$\|F - F_m\| \to 0, \quad \text{когда} \quad m \to \infty.$$

Таким образом, функционал F ограничен, является элементом $\mathfrak{B}^*$ и служит пределом последовательности $\{F_n\}$ в смысле метрики пространства $\mathfrak{B}^*$.

Это пространство $\mathfrak{B}^*$ называется *сопряженным* или *дуальным* по отношению к $\mathfrak{B}$.

В частности, пространство $(L^p)^*$, где $1 \leqslant p < \infty$, можно отождествить с пространством L^q, где $q = \frac{p}{p-1}$, так как, согласно теореме п. 36, между линейными функционалами в L^p и элементами пространства L^q существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее линейные операции и норму. Пространство L^2 так же, как любое гильбертово пространство, может быть отождествлено со своим сопряженным пространством.

В свою очередь, пространство C^*, согласно п. 50 и 51, может быть отождествлено с пространством V функций $\alpha(x)$ с ограниченным изменением, обращающихся в нуль в точке a интервала (a, b) и удовлетворяющих условию $\alpha(x) = \frac{1}{2}[\alpha(x-0) + \alpha(x+0)]$ внутри (a, b); при этом *норма* $\|\alpha\|$ оказывается равной полному изменению функции $\alpha(x)$ на интервале (a, b).

Запишем линейный функционал Ff, заданный в пространстве $\mathfrak{B}$, в виде (F, f) или (f, F); при этом, в силу определения $\|F\|$, будет выполняться неравенство

$$|(F, f)| \leqslant \|F\| \|f\|. \tag{9}$$

Теперь фиксируем f и заставим F изменяться в пространстве $\mathfrak{B}^*$. Тогда (F, f) будет линейным функционалом в пространстве $\mathfrak{B}^*$ и, следовательно, элементом пространства $\mathfrak{B}^{**} = (\mathfrak{B}^*)^*$ с нормой (в $\mathfrak{B}^{**}$), не превосходящей, в силу (9), нормы f в $\mathfrak{B}$. Покажем, что обе эти нормы совпадают. Для этого достаточно указать в пространстве $\mathfrak{B}^*$ элемент F, такой, что

$$(F, f) = \|f\| \quad \text{и} \quad \|F\| = 1.$$

Существование такого элемента, как было замечено выше, следует из теоремы о продолжении функционала.

Таким образом, каждому элементу f из $\mathfrak{B}$ мы поставили в соответствие некоторый вполне определенный элемент Φ_f из $\mathfrak{B}^{**}$; при этом, очевидно, должны иметь место равенства

$$\Phi_{af+bg} = a\Phi_f + b\Phi_g, \quad \|f\| = \|\Phi_f\|.$$

Так как, в частности,

$$\|f - g\| = \|\Phi_f - \Phi_g\|,$$

то Φ_f совпадает с Φ_g тогда и только тогда, когда $f = g$. Это позволяет нам *отождествить* Φ_f с f и тем самым *погрузить* пространство $\mathfrak{B}$ в пространство $\mathfrak{B}^{**}$, что записывается так:

$$\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}^{**}$$

Может случиться, что

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{**};$$

в этом случае пространство $\mathfrak{B}$ называется *регулярным* или *рефлексивным*[1]). Таковы, например, пространства L^p $(p > 1)$: в самом деле, $(L^p)^{**} = (L^q)^* = L^p$.

Напротив, пространство C нерефлексивно, т. е. оно не исчерпывает пространства $C^{**} = V^*$. Чтобы в этом убедиться, поставим в соответствие каждой функции $\alpha(x)$ с ограниченным изменением сумму ее скачков $\sum_x [\alpha(x+0) - \alpha(x-0)]$. Определенный таким образом линейный функционал в пространстве V не может быть выражен в виде

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x),$$

где $f(x)$ — какая-нибудь фиксированная непрерывная функция[2]). Следовательно, такой функционал не может быть отождествлен ни с каким элементом пространства C.

Пространство L^1 также нерефлексивно. Известно, что $(L^1)^* = L^\infty$, но в пространстве L^∞ существуют функционалы Ff, которые не могут быть представлены в виде интеграла

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

с фиксированной суммируемой функцией $g(x)$. В самом деле, фиксируем какую-нибудь точку x_0 интервала (a, b) и зададим функционал Ff, положив

$$Ff = f(x_0)$$

сначала для непрерывных и ограниченных функций $f(x)$. Затем продолжим этот функционал на все пространство L^∞. Очевидно, что его нельзя представить в виде такого интеграла даже для непрерывных $f(x)$.

В заключение скажем несколько слов о *комплексных* пространствах $\mathfrak{B}$. В них задаются линейные функционалы, принимающие комплексные значения. Сопряженное пространство $\mathfrak{B}^*$ по некоторым соображениям удобнее определять как совокупность функционалов Ff, комплексно сопряженных к линейным функционалам в $\mathfrak{B}$. Если при этом Ff обозначить (F, f) или $\overline{(f, F)}$, то для

[1]) Хан [2], Лорч [2].

[2]) В самом деле, взяв функцию $\alpha(x)$, равную 0 при $x < \xi$ и 1 при $x \geq \xi$, мы получим, что $f(x)$ должна равняться 1 в точке ξ; так как ξ было выбрано произвольно, то $f(x)$ должна равняться 1 тождественно. Но при $f(x) \equiv 1$ соответствующий интеграл равен $\alpha(b) - \alpha(a)$, что совпадает с суммой скачков функции $\alpha(x)$ только в том случае, когда $\alpha(x)$ — функция скачков.

любых элементов f из $\mathfrak{B}$ и F из $\mathfrak{B}^*$ и для любых комплексных чисел a, b будет выполняться тождество

$$(aF,\ bf) = a\bar{b}\,(F,\ f)$$

подобно тому, как это имеет место в комплексном гильбертовом пространстве. Пространства $\mathfrak{B}^*$ и $\mathfrak{B}^{**}$ также являются комплексными банаховыми пространствами. Соотношения между $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}^{**}$, описанные выше для действительного случая, непосредственно переносятся на комплексные пространства.

88. Линейные операторы. Сопряженные операторы. *Линейные операторы* в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, их нормы, сложение и умножение операторов, обратные операторы, сходимость (сильная) и сходимость по норме (равномерная) операторов определяются совершенно так же, как в случае гильбертова пространства.

Сопряженный оператор T^* определяется формулой

$$(T^*F,\ f) = (F,\ Tf);$$

таким образом, T^* представляет собой оператор, очевидно, аддитивный и однородный, отображающий само в себя сопряженное пространство $\mathfrak{B}^*$. В силу определения нормы,

$$|(T^*F,\ f)| \leqslant \|F\|\,\|T\|\,\|f\|,$$

поэтому

$$\|T^*F\| \leqslant \|F\|\,\|T\|$$

и, следовательно, оператор T^* ограничен и $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. На самом деле $\|T^*\| = \|T\|$, так как для любого элемента f из $\mathfrak{B}$ существует элемент F из $\mathfrak{B}^*$, такой, что

$$(F,\ Tf) = \|Tf\| \quad \text{и} \quad \|F\| = 1,$$

поэтому

$$\|Tf\| = (F,\ Tf) = (T^*F,\ f) \leqslant \|T^*\|\,\|F\|\,\|f\| = \|T^*\|\,\|f\|;$$

отсюда следует, что $\|T\| \leqslant \|T^*\|$ и, таким образом,

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

Если T — оператор конечного ранга, т. е.

$$Tf = \sum_{k=1}^{r} (f,\ \Psi_k)\,\varphi_k, \tag{10}$$

где φ_k и Ψ_k — соответственно элементы из $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}^*$, то

$$(T^*F,\ f) = (F,\ Tf) = \sum (\Psi_k,\ f)\,(F,\ \varphi_k) = \sum (F,\ \varphi_k)\,(\Psi_k,\ f),$$

откуда следует, что

$$T^*F = \sum_{k=1}^{r} (F,\ \varphi_k)\,\Psi_k. \tag{11}$$

Полезно отметить, что, так же как в случае пространства L^2 (см. п. 78) и даже абстрактного гильбертова пространства, *всякий линейный оператор* T, *отображающий все пространство* $\mathfrak{B}$ *на какое-нибудь его конечномерное линейное подмножество, непременно представляется в виде* (10).

Действительно, если это линейное множество порождено линейно независимыми элементами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$, то всякий элемент вида Tf представляется, притом единственным образом, как линейная комбинация элементов φ_k:

$$Tf = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_r\varphi_r.$$

Каждый из коэффициентов $c_k = c_k(f)$ является, очевидно, аддитивной и однородной функцией элемента f. Покажем теперь, что $c_k(f)$ представляет собой линейный функционал, или, иначе говоря, что $c_k(f) = (f, \Psi_k)$, где Ψ_k — некоторый элемент пространства $\mathfrak{B}^*$. Для этого нужно только доказать, что существует такая постоянная M, для которой

$$|c_k(f)| \leqslant M\|f\| \quad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Это вытекает из следующей леммы:

Лемма 1. *Для всякой конечной системы линейно независимых элементов* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ *банахова пространства существует постоянная* M, *такая, что*

$$|c_1| + |c_2| + \ldots + |c_r| \leqslant M\|c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_r\varphi_r\|,$$

каковы бы ни были коэффициенты c_k.

Достаточно, очевидно, убедиться в том, что на множестве коэффициентов $(c_1, c_2, \ldots, c_r)$, удовлетворяющих условию $\sum |c_k| = 1$, функция $\|\sum c_k\varphi_k\|$ имеет *положительное* наименьшее значение. Пусть

$$g_n = \sum_k c_k^{(n)}\varphi_k$$

— минимизирующая последовательность. В силу теоремы Больцано—Вейерштрасса, из нее можно извлечь подпоследовательность

$$g_{n_i} = \sum_k d_k^{(i)}\varphi_k,$$

такую, что все числовые последовательности $d_k^{(i)}$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ сходятся. Если c_k^* $(k = 1, 2, \ldots, r)$ — их пределы, то положим

$$g^* = \sum_k c_k^*\varphi_k.$$

Так как $\sum |c_k^*| = 1$, то рассматриваемая функция достигает своего наименьшего значения, равного $\|g^*\|$. Но $\|g^*\| \neq 0$, так как $g^* \neq 0$, в силу того, что c_k^* не обращаются в нуль одновременно.

89. Функциональные уравнения[1]. Возьмем линейный оператор K в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ и рассмотрим функциональные уравнения

$$(I-K)f=g, \quad (I-K^*)F=G \tag{12}$$

соответственно в пространствах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}^*$.

Если $\|K\|<1$, то ряд $I+K+K^2+\ldots$ равномерно сходится, и его сумма равна $(I-K)^{-1}$. В этом случае существует и $(I-K^*)^{-1}=((I-K)^{-1})^*$, следовательно, уравнения (12) имеют единственные решения f и F, каковы бы ни были g и G.

Если K является оператором конечного ранга, то метод, изложенный в п. 70, может быть применен без всяких изменений. В этом случае имеет место и альтернатива Фредгольма; разумеется, ортогональность элемента g из $\mathfrak{B}$ и элемента F из $\mathfrak{B}^*$ означает теперь, что $Fg=0$.

Для произвольного линейного оператора K определим *радиус Фредгольма* Ω так же, как в случае гильбертова пространства (см. п. 85). Применив метод, которым мы пользовались в п. 71—73, мы получим, что при $|\lambda|<\Omega$ для уравнений (12), если в них вместо K и K^* взять соответственно λK и $\bar{\lambda}K^*$, выполняется альтернатива Фредгольма. При этом резольвентный оператор K_λ не имеет других особенностей, кроме полюсов, которых внутри любого круга $|\lambda|\leqslant\omega$, где $\omega<\Omega$, может быть лишь конечное число. Всегда $\Omega\geqslant\frac{1}{\|K\|}$, но *неизвестно*, для всякого ли вполне непрерывного оператора K выполняется равенство $\Omega=\infty$. Можно показать, что это верно в пространствах L^p и C; доказательство для случая пространства C приведено в п. 90.

Что касается метода, изложенного в п. 77—80, то он применим, лишь с небольшими изменениями, к произвольному вполне непрерывному оператору K в каком угодно банаховом пространстве[2]. Упомянутые здесь изменения имеют своей целью исключить из рассуждений все, что основано на скалярном произведении, в частности понятие ортогональности двух элементов пространства $\mathfrak{B}$.

Уже доказательство того факта, что подпространство $\mathfrak{M}_n$ имеет конечное число измерений, основывалось на том, что в бесконечно-

[1] *Функциональными уравнениями* авторы называют уравнения, в которых неизвестными являются элементы какого-либо банахова пространства, конкретного (функционального) или абстрактного. — *Прим. перев.*

[2] В статье Рисса [10] соответствующая теория уже изложена во всей общности, за исключением того, что сопряженные операторы введены лишь для операторов интегрального типа в пространствах L^p и C. В этом направлении теория была доработана Гильдебрандтом [3] и Шаудером [1] (см. также Банах [1], гл. X). Именно Шаудер дал приведенное здесь общее определение сопряженного оператора. Он доказал, в частности, что для вполне непрерывного линейного оператора сопряженный оператор также вполне непрерывен.

мерном подпространстве существует ортонормированная последовательность элементов f_n. В действительности нам понадобились только следующие свойства $\{f_n\}$:

$$\|f_n\|=1 \quad \text{и} \quad \|f_k-f_i\|=\sqrt{2} \quad \text{при} \quad k\neq i.$$

Достаточно было бы иметь соотношения

$$\|f_n\|=1 \quad \text{и} \quad \|f_k-f_i\|\geqslant\delta \quad \text{при} \quad k\neq i,$$

где δ — некоторое фиксированное положительное число. Последовательность элементов, обладающую такими свойствами, можно построить в любом бесконечномерном подпространстве банахова пространства, последовательно применяя следующую лемму:

Лемма 2. *Если E_1 и E_2 — подпространства банахова пространства, причем первое содержится во втором, но не совпадает с ним, и если δ — положительное число <1, то в E_2 найдется такой элемент f, что $\|f\|=1$ и $\|f-g\|\geqslant\delta$ для всех g из E_1.*

Для доказательства выберем в E_2 элемент h, не принадлежащий E_1. Так как E_1 — замкнутое множество, то расстояния от h до элементов подпространства E_1 имеют положительную нижнюю грань d. Число δ меньше 1, поэтому $\frac{d}{\delta}>d$ и, следовательно, в E_1 найдется элемент g^*, такой, что $\|h-g^*\|<\frac{d}{\delta}$. Тогда для произвольного элемента g из E_1 будем иметь

$$\left\|\frac{h-g^*}{\|h-g^*\|}-g\right\|=\frac{1}{\|h-g^*\|}\|h-(g^*+\|h-g^*\|g)\|\geqslant\frac{\delta}{d}d=\delta,$$

так как $g^*+\|h-g^*\|g$ принадлежит подпространству E_1. Элемент

$$f=\frac{h-g^*}{\|h-g^*\|}$$

обладает требуемыми свойствами.

Доказательство того, что все $\mathfrak{M}_n$, а также все $\mathfrak{N}_n$, начиная с некоторого n, совпадают, а также рассуждения п. 79 (касающиеся расположения особых точек) могут быть основаны на этой же лемме, и ссылок на существование ортогонального элемента можно, таким образом, избежать.

В п. 77 мы еще раз воспользовались понятием ортогональности, когда доказывали, что $\mathfrak{N}_1$ является замкнутым множеством. Там была рассмотрена последовательность $\{g_k\}$ элементов, образы которых Tg_k сходятся, и мы показали, что их предел также имеет вид Tv^*. Для этого мы прибегли к разложению $g_k=u_k+v_k$, где u_k — элемент из $\mathfrak{M}_1$, а v_k ортогонально $\mathfrak{M}_1$. Но достаточно было бы выбрать элемент u_k из $\mathfrak{M}_1$ и элемент $v_k=g_k-u_k$ так, чтобы расстояние от u_k до g_k, т. е. $\|v_k\|$, не превосходило удвоенного расстояния d_k от g_k до $\mathfrak{M}_1$. Последовательность $\{v_k\}$ была бы при этом ограничена; в самом деле, в противном случае, так же как в п. 77, мы могли бы заключить, что последовательность $w_k=\frac{v_k}{\|v_k\|}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу w^* из $\mathfrak{M}_1$, что невозможно, так как

$$\|w_k-w^*\|=\frac{1}{\|v_k\|}\|g_k-(u_k+\|v_k\|w^*)\|\geqslant\frac{d_k}{\|v_k\|}\geqslant\frac{1}{2}.$$

Завершается доказательство так же, как в п. 77.

В п. 78 ортогональность была применена для того, чтобы получить каноническое представление оператора S. Однако в п. 88 мы показали, что аналогичное представление (10) имеет место и в произвольном банаховом пространстве.

Наконец, для того чтобы применить в общем случае рассуждения п. 80, нужно еще доказать следующее:

1) Всякое линейное множество E в $\mathfrak{B}$, имеющее конечное число измерений, замкнуто, т. е. является подпространством.

2) Если E_1 — подпространство конечномерного пространства E, не исчерпывающее всего E, то в E есть такое подпространство E_2, что E_1 и E_2 линейно независимы и $E_1+E_2=E$.

Для того чтобы доказать 1), возьмем в E базис, т. е. линейно независимую систему элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$, порождающую E, и какую-нибудь сходящуюся последовательность элементов

$$g_n=\sum_i c_i^{(n)}\varphi_i.$$

Согласно лемме 1 п. 88, существует число C, такое, что

$$\sum_i |c_i^{(n)}-c_i^{(m)}|\leqslant C\|g_n-g_m\| \quad (n,\ m=1,\ 2,\ \ldots).$$

Отсюда следует, что все числовые последовательности $\{c_i^{(n)}\}$ сходятся. Положив

$$c_i^*=\lim_n c_i^{(n)} \quad \text{и} \quad g^*=\sum_i c_i^*\varphi_i,$$

получим, очевидно, $g^*=\lim g_n$. Таким образом, предел последовательности $\{g_n\}$ также принадлежит множеству E.

Что касается утверждения 2), то для его доказательства достаточно взять какой-нибудь базис подпространства E_1, дополнить его элементами $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_t$ так, чтобы получить базис пространства E, и взять в качестве E_2 совокупность всевозможных линейных комбинаций элементов $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_t$.

Итак, все рассуждения, изложенные в пп. 77—80, оказываются применимыми в случае банахова пространства, и, следовательно, имеет место такое предложение:

Альтернатива Фредгольма справедлива для любого вполне непрерывного линейного оператора в банаховом пространстве.

90. Операторы в пространстве непрерывных функций[1]. Пусть T — линейный оператор в пространстве C непрерывных функций, определенных на некотором интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Так как $Tf(x)$ при фиксированном x служит линейным функционалом от f с нормой, не превосходящей нормы оператора T, то существует зависящая от параметра x функция $\tau_x(y)$ с ограниченным изменением, такая, что

$$Tf(x) = \int_a^b f(y)\, d\tau_x(y) \tag{13}$$

и

$$\int_a^b |d\tau_x(y)| \leqslant \|T\|.$$

Можно предположить, что $\tau_x(a) = 0$. Так как $Tf(x)$ представляет собой непрерывную функцию переменного x, какова бы ни была функция f, в частности при $f(x) = 1$ и при $f(x) = (\xi - x)^+$, то, интегрируя по частям, мы придем к заключению, что

$$\tau_x(b) \quad \text{и} \quad \int_a^\xi \tau_x(y)\, dy \tag{14}$$

непрерывны по x при любом фиксированном значении ξ в промежутке от a до b.

Согласно результатам, касающимся сходимости линейных функционалов в пространстве C (см. п. 55), эти условия также достаточны для того, чтобы интеграл (13) представлял собой непрерывную функцию от x. Следовательно, имеет место

Теорема. *Любая функция $\tau_x(y)$, определенная в области $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$ и удовлетворяющая тем условиям, что $\tau_x(a) = 0$, ее полное изменение относительно y не превосходит некоторой постоянной, не зависящей от x, и выражения* (14) *непрерывны по x, порождает, согласно* (13), *линейный оператор, отображающий пространство C само в себя. Обратно, всякий линейный оператор в пространстве C можно представить формулой* (13).

Найдем теперь аналитическое представление сопряженного оператора $\alpha^* = T^*\alpha$ в пространстве $C^* = V$. По определению,

$$(\alpha^*, f) = (T^*\alpha, f) = (\alpha, Tf),$$

т. е.

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha^*(x) = \int_a^b \left[\int_a^b f(y)\, d\tau_x(y)\right] d\alpha(x),$$

где $f(x)$ — произвольная непрерывная функция. Пусть $f(x)$ пробе-

[1]) Результаты, изложенные в этом пункте, принадлежат Радону [2].

гает последовательность $\{f_n(x)\}$, стремящуюся к 1 при $x \leqslant \xi$ и к 0 при $x > \xi$, причем $|f_n(x)| \leqslant 1$. В силу теоремы Лебега, интегралы по $\alpha^*(x)$ и по $\tau_x(y)$ будут при этом стремиться соответственно к $\alpha^*(\xi)$ и к $\tau_x(\xi)$. Так как, кроме того,

$$\left| \int_a^b f_n(y)\, d\tau_x(y) \right|$$

не превосходит $\|T\|$, то теорему Лебега можно применить также к интегралу по $\alpha(x)$, и мы получим

$$\alpha^*(\xi) = \int_a^b \tau_x(\xi)\, d\alpha(x)$$

или, изменив обозначение переменной интегрирования,

$$\alpha^*(x) = \int_a^b \tau_y(x)\, d\alpha(y), \tag{15}$$

где интеграл берется в смысле Лебега.

Рассмотрим $\tau_x(y)$ как элемент пространства V, зависящий от параметра x. В пространстве V нормой функции является ее полное изменение; обозначим эту норму $\|\cdot\|_V$. Покажем, что τ_x *непрерывна по x в смысле метрики пространства V (т. е. $\|\tau_\xi - \tau_x\|_V \to 0$ при $\xi \to x$) тогда и только тогда, когда соответствующий оператор T вполне непрерывен.*

Сначала предположим, что T — вполне непрерывный оператор. Если бы τ_x не была непрерывна в точке x_0, то существовала бы последовательность $\{x_k\}$, сходящаяся к x_0, для которой $\|\tau_{x_k} - \tau_{x_0}\|_V$ оставалась бы больше некоторого положительного числа ε_0. Так как $\|\tau_{x_k} - \tau_{x_0}\|_V$ равна норме функционала $Tf(x_k) - Tf(x_0)$, то в пространстве C найдется элемент f_k с нормой $\|f_k\| \leqslant 1$, на котором этот функционал принимает значение, отличающееся от $\|\tau_{x_k} - \tau_{x_0}\|_V$ меньше чем на $\frac{\varepsilon_0}{2}$. Положив $g_k(x) = Tf_k(x)$, получим

$$|g_k(x_k) - g_k(x_0)| > \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Так как оператор T вполне непрерывен, то из $\{g_k(x)\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{g_{k_i}(x)\}$, сходящуюся в смысле метрики C, т. е. равномерно в интервале $a \leqslant x \leqslant b$; обозначим ее предел $g(x)$. Для достаточно больших i

$$|g_{k_i}(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon_0}{6}$$

во всем интервале $a \leqslant x \leqslant b$ и, в силу непрерывности $g(x)$, также

$$|g(x_{k_i}) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{6};$$

следовательно,

$$\frac{\varepsilon_0}{2} < |g_{k_i}(x_{k_i}) - g_{k_i}(x_0)| \leqslant |g_{k_i}(x_{k_i}) - g(x_{k_i})| + |g(x_{k_i}) - g(x_0)| + \\ + |g(x_0) - g_{k_i}(x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{6} + \frac{\varepsilon_0}{6} + \frac{\varepsilon_0}{6} = \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Полученное противоречие показывает, что τ_x непрерывно зависит от x.

Теперь предположим, что τ_x — непрерывная функция от x, и покажем, что оператор T вполне непрерывен. Заметим, что τ_x равномерно непрерывна на интервале $a \leqslant x \leqslant b$; это доказывается так же, как для обыкновенных функций Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такие точки

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

что неравенство $\|\tau_x - \tau_\xi\|_V < \varepsilon$ будет выполняться всякий раз, как только x и ξ попадут в один и тот же замкнутый интервал вида $[x_{k-1}, x_k]$. Такому разбиению интервала $[a, b]$ поставим в соответствие систему непрерывных функций

$$h_0(x),\ h_1(x),\ \ldots,\ h_n(x),$$

положив $h_m(x)$ равной 1 в точке x_m, равной 0 — во всех остальных точках x_k и доопределив ее линейно внутри частичных интервалов (x_{k-1}, x_k). Тогда функция

$$\lambda_x(y) = \sum_{m=0}^{n} h_m(x)\,\tau_{x_m}(y)$$

будет совпадать с $\tau_x(y)$ в точках $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$, а при x, лежащем внутри частичного интервала (x_{k-1}, x_k), она будет равна среднему арифметическому функций $\tau_{x_{k-1}}(y)$ и $\tau_{x_k}(y)$ с весами, зависящими только от x. Отсюда следует, что

$$\|\lambda_x - \tau_x\|_V < \varepsilon$$

во всем интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Пусть L означает оператор конечного ранга

$$Lf(x) = \sum_{m=0}^{n} h_m(x) \cdot Tf(x_m) = \int_a^b f(y)\,d\lambda_x(y).$$

Тогда справедливо неравенство

$$\|L - T\| < \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то оператор T может быть сколь угодно точно приближен по норме операторами конечного ранга, следовательно, вполне непрерывными операторами, откуда вытекает, что сам оператор T вполне непрерывен; на этом доказательство теоремы заканчивается.

Попутно мы получили следующий результат:

Теорема. *Всякий вполне непрерывный линейный оператор в пространстве C может быть приближен по норме с любой степенью точности линейными операторами конечного ранга.*

Те же рассуждения приводят к такой теореме:

Теорема. *Если T — линейный оператор в пространстве C, представленный интегралом* (13), *то T может быть приближен линейными операторами конечного ранга с точностью до $\omega+\varepsilon$, где*

$$\omega=\limsup_{x-\xi\to 0}\|\tau_x-\tau_\xi\|_V,$$

а ε — сколь угодно малое положительное число; другими словами, радиус Фредгольма оператора T не менее $\frac{1}{\omega}$.

Интегральное представление (13) упрощается в том случае, когда функции $\tau_x(y)$ с ограниченным изменением абсолютно непрерывны относительно одной какой-нибудь неубывающей функции $\sigma(y)$, т. е. если они допускают представление в виде

$$\tau_x(y)=\int_a^y K(x,\ z)\,d\sigma(z),$$

где ядро $K(x,\ y)$ при любом фиксированном x суммируемо по отношению к $\sigma(y)$. Тогда получаются соотношения [1])

$$\|\tau_x\|_V=\int_a^b |K(x,\ z)|\,d\sigma(z)$$

и

$$\|\tau_x-\tau_\xi\|_V=\int_a^b |K(x,\ z)-K(\xi,\ z)|\,d\sigma(z).$$

Рассматриваемый оператор вполне непрерывен тогда и только тогда, когда последний интеграл стремится к нулю при $\xi\to x$.

Возникает вопрос, всякий ли вполне непрерывный оператор допускает такое представление посредством неубывающей функции $\sigma(y)$ и ядра $K(x,\ y)$. Мы покажем, что ответ на этот вопрос — утвердительный.

Пусть $\{\tau_x(y)\}$ — семейство функций, соответствующее оператору T. Задача состоит в том, чтобы отыскать неубывающую функцию $\sigma(y)$, по отношению к которой все $\tau_x(y)$ были бы абсолютно непрерывны. Сначала мы решим эту задачу для счетного

[1]) Полное изменение неопределенного интеграла равно интегралу абсолютной величины рассматриваемой функции. В п. 23 это было доказано для обычного интеграла Лебега, но доказательство применимо также к интегралу Стильтьеса—Лебега по неубывающей функции.

подсемейства таких функций, соответствующего некоторому счетному всюду плотному на (a, b) множеству значений $x = r_1, r_2, \ldots$. После этого решение для всего семейства получится предельным переходом; при этом мы воспользуемся тем, что, как было показано выше, при вполне непрерывном T функция τ_x зависит от x непрерывно.

Пусть $\sigma_x(y)$ — неопределенное полное изменение функции $\tau_x(y)$, такое, что $\sigma_x(a) = 0$; выберем последовательность положительных чисел $\{c_n\}$ так, чтобы ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sigma_{r_n}(y)$$

сходился даже при $y = b$. Сумма $\sigma(y)$ этого ряда представляет собой неубывающую функцию от y, по отношению к которой все $\tau_{r_n}(y)$, очевидно, абсолютно непрерывны. Покажем, что при любом x функция $\tau_x(y)$ абсолютно непрерывна относительно $\sigma(y)$.

Для заданного $\varepsilon > 0$ возьмем r, принадлежащее выделенному счетному всюду плотному множеству $\{r_n\}$, настолько близкое к x, чтобы выполнялось неравенство

$$\|\tau_x - \tau_r\|_V < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для любой системы непересекающихся интервалов $\{(a_k, b_k)\}$ получим

$$\sum_k \left| [\tau_x(b_k) - \tau_r(b_k)] - [\tau_x(a_k) - \tau_r(a_k)] \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда следует, что сумма

$$S_x = \sum_k |\tau_x(b_k) - \tau_x(a_k)|$$

отличается от аналогичной суммы S_r не более чем на $\frac{\varepsilon}{2}$. Но функция $\tau_r(y)$ абсолютно непрерывна относительно $\sigma(y)$, поэтому $S_r < \frac{\varepsilon}{2}$, коль скоро сумма

$$\sum_k [\sigma(b_k) - \sigma(a_k)]$$

достаточно мала. При этом $S_x < \varepsilon$, а это означает, что $\tau_x(y)$ также абсолютно непрерывна относительно $\sigma(y)$.

Мы получили, таким образом, следующий результат:

Теорема. *Для того чтобы линейный оператор $g = Tf$ в пространстве C был вполне непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы он мог быть представлен в виде*

$$g(x) = \int_a^b K(x, y) f(y)\, d\sigma(y),$$

где $\sigma(y)$ — некоторая неубывающая функция, а функция $K(x, y)$ при любом фиксированном x суммируема относительно $\sigma(y)$ и обладает тем свойством, что

$$\int_a^b |K(x, y) - K(\xi, y)|\, d\sigma(y) \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to x.$$

91. Еще о теории потенциала. Вернемся к задачам Дирихле и Неймана в теории потенциала; в п. 81 мы показали метод их решения, принадлежащий Фредгольму. Как ни изящен этот метод, он применим лишь при достаточно жестких предположениях относительно границы рассматриваемой области. Такого рода ограничения определяются существом метода: двойной слой, будучи образован ориентированными диполями, может быть нанесен лишь на достаточно правильные кривые (или поверхности).

Тем не менее условия, выдвинутые ранее, могут быть несколько ослаблены, и метод Фредгольма может быть распространен на области более общего типа. В плоском случае Радон [3] обобщил этот метод, как нам кажется, до его естественного предела, применив его к областям, границами которых служат так называемые кривые „с ограниченным вращением“.

Если кривая имеет непрерывно изменяющуюся касательную, то угол, образуемый ее касательной с какой-нибудь фиксированной прямой, является непрерывной функцией точки касания; „полное вращение“ кривой определяется как полное изменение такой функции. Если эта последняя имеет ограниченное изменение, то сама кривая называется кривой с ограниченным вращением.

Радон обобщил это определение на случай, когда касательная изменяется не непрерывным образом; при этом он отсчитывал углы, образуемые односторонними касательными с выбранным направлением, так, чтобы скачки, претерпеваемые такими углами, по абсолютной величине не превышали π. Впоследствии Паатеро [1], [2] заметил, что полное вращение границы односвязной области может быть определено как нижний предел полных вращений кривых с непрерывно изменяющимися касательными, приближающимися к границе изнутри области.

Двойной слой, нанесенный на кривой C с ограниченным вращением, плотность моментов которого является непрерывной функцией $\mu(s)$ на C, создает в точке P потенциал, равный

$$u(P) = \int_C \mu(t)\, d\tau_P(t),$$

где $\tau_P(t)$ означает угол, образуемый полупрямой $\overrightarrow{Pt}$ с каким-нибудь фиксированным направлением. Таким образом, внутренняя и внешняя задачи Дирихле приводят к функциональному уравнению

$$\frac{1}{\pi} g = \mu - \lambda K \mu$$

соответственно с $\lambda = -1$ и $\lambda = 1$, где обозначено

$$K\mu(s) = \frac{1}{\pi} \int_C \mu(t)\, d\tau_s(t).$$

Мы имеем, таким образом, линейный оператор в пространстве непрерывных функций, заданных на кривой C (см. п. 89). При этом $\tau_P(s)$ является функцией с ограниченным изменением, и ее полное изменение не превосходит полного вращения кривой C, следовательно, остается меньше некоторой постоянной, не зависящей от P.

Для того чтобы альтернатива Фредгольма выполнялась при $\lambda = \pm 1$, нужно, чтобы радиус Фредгольма оператора K был больше 1. Согласно п. 89, этот радиус равен $\frac{1}{\omega}$, где

$$\omega = \limsup_{s-\sigma\to 0} \int_C |d[\tau_s(t) - \tau_\sigma(t)]|.$$

Следовательно, при $\omega < 1$ альтернатива Фредгольма справедлива. Но можно показать, что $\omega = \frac{\vartheta}{\pi}$, где ϑ ($\leqslant \pi$) есть наибольшее значение абсолютных величин скачков, которые претерпевает наклон односторонней касательной при перемещении по кривой C. Таким образом, если $\vartheta < \pi$, т. е. *если на кривой C отсутствуют „острия" (направленные внутрь области или наружу), то к соответствующему функциональному уравнению применим метод Фредгольма.*

Задача Неймана поддается подобному же обобщению, хотя и с некоторыми изменениями. Дело в том, что в угловых точках контура C понятие нормальной производной не имеет смысла. Поэтому при наличии таких точек, вместо того чтобы задавать на C значения нормальной производной, нужно потребовать, чтобы „поток" искомой гармонической функции сквозь C равнялся заданной функции $\chi(s)$ с ограниченным изменением. Точно задача ставится так:

Пусть $\varphi(P)$ — произвольная функция, непрерывная в рассматриваемой области и на ее границе C; значения ее на C обозначим $\varphi(s)$. Возьмем замкнутую кривую c с непрерывной кривизной, лежащую внутри области, и вычислим интеграл произведения $\varphi \frac{\partial u}{\partial n}$ вдоль c, где производная взята, конечно, по нормали к кривой c. Ставится задача найти гармоническую функцию u, для которой описанный интеграл стремится к интегралу Стильтьеса

$$\int_C \varphi(s)\, d\chi(s),$$

взятому вдоль C, какова бы ни была функция φ указанного типа, когда контур c приближается к контуру C так, что полное вращение c стремится к полному вращению C.

Решение ищется в виде интеграла Стильтьеса

$$u_P = \frac{1}{\pi} \int_C \log \frac{1}{r_{Pt}}\, d\alpha(t),$$

т. е. в виде потенциала простого слоя, нанесенного на C. Задача сводится, таким образом, к функциональному уравнению

$$-\frac{1}{\pi}\chi = \alpha - \lambda K^*\alpha,$$

в котором $\lambda = \pm 1$, а K^* — оператор, сопряженный с K, — определен в пространстве функций с ограниченным изменением на контуре C. Для такого уравнения альтернатива Фредгольма справедлива, и, следовательно, задача Неймана разрешима, каков бы ни был контур C с ограниченным вращением без остриев.

Подробности читатель сможет найти в указанном выше мемуаре Радона.

Заметим, наконец, что в случае пространственной задачи аналог кривых с ограниченным вращением не найден.