Глава VI

СИММЕТРИЧНЫЕ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. ТЕОРЕМА О РАЗЛОЖЕНИИ

92. Собственные значения и собственные элементы. Простейшие свойства симметричных операторов. Одна из простейших задач, возникающая в связи с изучением линейных операторов в гильбертовом или банаховом пространстве, состоит в отыскании инвариантных элементов или хотя бы элементов, сохраняющих под действием этих операторов свое направление, т. е. элементов, удовлетворяющих уравнению вида

$$Tf = \mu f. \tag{1}$$

Каждый такой элемент f, отличный от нулевого, называется *собственным элементом*, а соответствующее значение μ — *собственным значением* оператора T (в частности, может существовать собственное значение $\mu = 0$). Решения f уравнения (1), отвечающие какому-нибудь фиксированному собственному значению μ, образуют, очевидно, линейное множество; в силу непрерывности оператора T (см. п. 66), это множество замкнуто и, следовательно, представляет собой некоторое подпространство — так называемое *собственное подпространство*, соответствующее собственному значению μ. *Кратность* собственного значения μ определяется как размерность соответствующего собственного подпространства; в частности, собственное значение называется *простым*, если все соответствующие собственные элементы пропорциональны какому-нибудь одному из них.

Обратная величина собственного значения $\mu \neq 0$ представляет собой особое значение в том смысле, как это было определено в п. 67; в самом деле, если уравнение $\left(I - \frac{1}{\mu} T\right) f = 0$ имеет решение $f \neq 0$, то оператор $I - \frac{1}{\mu} T$ не может иметь обратного.

В случае линейного оператора

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} x_k$$

в n-мерном пространстве комплексных векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ уравнение (1) сводится к системе линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} (t_{ik} - \mu \delta_{ik}) x_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Для того чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю. Этот последний, будучи многочленом степени n относительно μ, обращается в нуль хотя бы при одном действительном или комплексном значении μ. Таким образом, *линейный оператор в конечномерном пространстве всегда имеет хотя бы одно собственное значение.* Ничего большего, вообще говоря, утверждать нельзя; так, например, оператор

$$y_i = x_i + x_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad y_n = x_n$$

имеет единственное собственное значение $\mu = 1$, притом простое.

Но если матрица (t_{ik}) оператора T обладает свойством *эрмитовой симметрии*, т. е. $t_{ki} = \overline{t}_{ik}$, или, что эквивалентно этому условию,

$$(Tx, x') = (x, Tx')$$

для любых двух векторов x и x', то *существуют n собственных векторов*

$$e_i = (e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

соответствующих собственным значениям μ_i и *образующих ортонормированную систему*. Взяв эти e_i в качестве новых координатных векторов и положив $x = z_1e_1 + z_2e_2 + \ldots + z_ne_n$, *мы приведем квадратичную (эрмитову) форму*

$$(Tx, x) = \sum_{i, k=1}^{n} t_{ik}\overline{x}_i x_k \quad (t_{ki} = \overline{t}_{ik})$$

к виду

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \overline{z}_i z_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i |z_i|^2;$$

в алгебре этот результат носит название *теоремы о приведении к главным осям.*

В гильбертовом пространстве мы рассмотрим аналогичные операторы, т. е. такие, для которых

$$(Tf, g) = (f, Tg),$$

каковы бы ни были элементы f, g из $\mathfrak{H}$; назовем эти операторы *симметричными*. Они характеризуются, очевидно, равенством

$$T^* = T,$$

поэтому их называют также *самосопряженными* операторами. Оба эти названия эквивалентны, по крайней мере в применении к линейным операторам в том смысле, как они были определены в п. 66 и 84, т. е. как аддитивные, однородные и *ограниченные* операторы. Тогда же, когда мы будем рассматривать *неограниченные* операторы, этим двум наименованиям будет приписан различный смысл (см. гл. VIII).

В случае симметричного оператора A значения соответствующей „квадратичной формы" (Af, f) всегда действительны, так как

$$(Af, f) = (f, A^*f) = (f, Af) = \overline{(Af, f)}.$$

Обратно, если для некоторого оператора A квадратичная форма (Af, f) действительна, то A — симметричный оператор. Для доказательства возьмем тождество, справедливое для *произвольного линейного оператора* T:

$$(T(f+g), f+g) - (T(f-g), f-g) + i(T(f+ig), f+ig) - \\ - i(T(f-ig), f-ig) = 4(Tf, g). \quad (2)$$

Поменяв в нем местами f и g и перейдя к комплексно сопряженным значениям, получим новое тождество

$$(f+g, T(f+g)) - (f-g, T(f-g)) + i(f+ig, T(f+ig)) - \\ - i(f-ig, T(f-ig)) = 4(f, Tg). \quad (2')$$

Если квадратичная форма (Af, f) принимает только действительные значения, то $(f, Af) = \overline{(Af, f)} = (Af, f)$ и левые части равенств (2) и (2′) при $T = A$ совпадают, откуда следует, что $(Af, g) = (f, Ag)$, т. е. $A^* = A$.

Заметим, что доказанное предложение, так же как соотношения (2) и (2′), справедливо только в случае *комплексного* гильбертова пространства.

Если квадратичная форма (Af, f) действительна, то все собственные значения оператора A также действительны. В самом деле, если μ — какое-нибудь собственное значение, а f — соответствующий собственный элемент, то

$$\mu = \frac{(Af, f)}{(f, f)}.$$

Собственные элементы f и g, соответствующие двум различным собственным значениям μ и ν самосопряженного оператора, взаимно ортогональны; действительно,

$$(Af, g) = (\mu f, g) = \mu(f, g), \quad (f, Ag) = (f, \nu g) = \nu(f, g),$$

откуда следует, что

$$\mu(f, g) = \nu(f, g), \quad (f, g) = 0.$$

Вернемся к квадратичной форме (Af, f). Имеем очевидные неравенства

$$|(Af, f)| \leqslant \|Af\| \|f\| \leqslant \|A\| \|f\|^2;$$

если наименьшую постоянную M, при которой для любого элемента f выполняется неравенство

$$|(Af, f)| \leqslant M \|f\|^2,$$

обозначить N_A, то получится неравенство

$$N_A \leqslant \|A\|.$$

То же верно и для несимметричного оператора. Если же оператор A симметричен, то для него обе эти постоянные равны.

В самом деле, так как $(A^2f, f)=(Af, Af)$, то, каково бы ни было $\lambda>0$, справедливы соотношения

$$\|Af\|^2=\frac{1}{4}\left[\left(A\left(\lambda f+\frac{1}{\lambda}Af\right), \lambda f+\frac{1}{\lambda}Af\right)-\left(A\left(\lambda f-\frac{1}{\lambda}Af\right), \lambda f-\frac{1}{\lambda}Af\right)\right]\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{4}\left[N_A\left\|\lambda f+\frac{1}{\lambda}Af\right\|^2+N_A\left\|\lambda f-\frac{1}{\lambda}Af\right\|^2\right]=$$
$$=\frac{1}{2}N_A\left[\lambda^2\|f\|^2+\frac{1}{\lambda^2}\|Af\|^2\right].$$

Если $\|Af\|\neq 0$, то последнее выражение достигает своего наименьшего значения при

$$\lambda^2=\frac{\|Af\|}{\|f\|},$$

откуда следует, что

$$\|Af\|^2\leqslant N_A\|Af\|\|f\|, \qquad \|Af\|\leqslant N_A\|f\|;$$

эти неравенства справедливы, очевидно, и тогда, когда $\|Af\|=0$. Таким образом, $\|A\|\leqslant N_A$. Вспомнив неравенство, полученное выше, придем к заключению, что $N_A=\|A\|$.

Резюмируем полученные результаты:

Теорема. *Если A — симметричный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, то все его собственные значения действительны, собственные элементы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, квадратичная форма (Af, f) действительна и, наконец, наименьшая постоянная N_A, для которой*

$$|(Af, f)|\leqslant N_A\|f\|^2,$$

равна $\|A\|$.

Теорема о приведении к главным осям, по крайней мере в ее первоначальной форме, не обобщается на произвольные симметричные операторы в гильбертовом пространстве. Так, например, в пространстве L^2 функций $f(x)$ на интервале $(0, 1)$ оператор, отображающий функцию $f(x)$ в $xf(x)$, симметричен, но не имеет вовсе собственных значений, так как уравнение $xf(x)=\mu f(x)$ имеет единственное решение $f(x)=0$.

Однако этой теореме можно придать такую форму, в которой она допускает обобщение на произвольные гильбертовы пространства; этим мы займемся в следующей главе.

В этой главе мы рассмотрим только *вполне непрерывные* симметричные операторы. Для таких операторов теорема о главных осях справедлива почти дословно в той формулировке, в какой она была приведена выше для конечномерного случая. В частности, вполне непрерывные симметричные операторы всегда имеют собственные значения.

93. Вполне непрерывные симметричные операторы. Из сказанного выше следует, что если A — симметричный оператор, а f подчинено условию $\|f\|=1$, то функции $|(Af, f)|$ и $\|Af\|$ имеют одинаковые верхние грани

$$\sup_f |(Af, f)| = \sup_f \|Af\| = \|A\|.$$

Пусть $\{f_n\}$ — последовательность элементов, такая, что

$$\|f_n\|=1 \text{ и } |(Af_n, f_n)| \to \|A\|.$$

Допустим, что f_n уже выбраны так, что последовательность (Af_n, f_n) сама сходится:

$$(Af_n, f_n) \to \mu_1,$$

где μ_1 равно либо $\|A\|$, либо $-\|A\|$. Квадратный трехчлен

$$\|Af_n\|^2 - 2\mu_1(Af_n, f_n) + \mu_1^2\|f_n\|^2 = \|Af_n - \mu_1 f_n\|^2 \geqslant 0$$

стремится к нулю при $n \to \infty$, так как

$$\|Af_n\|^2 \leqslant \|A\|^2 = \mu_1^2, \quad (Af_n, f_n) \to \mu_1 \text{ и } \|f_n\|=1.$$

Таким образом,

$$Af_n - \mu_1 f_n \to 0, \tag{3}$$

когда $n \to \infty$; это можно иначе выразить, сказав, что f_n служат „приближенными решениями" уравнения

$$Af = \mu_1 f. \tag{3a}$$

Теперь предположим, что A — *вполне непрерывный* симметричный оператор, т. е. что всякая ограниченная бесконечная последовательность элементов пространства $\mathfrak{H}$ содержит подпоследовательность, которую оператор A переводит в сходящуюся последовательность. Покажем, что при этом уравнение (3a) имеет точное решение.

В самом деле, $\{Af_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{Af_{n_k}\}$; в силу (3), сама последовательность $\{f_{n_k}\}$ также сходится. Обозначив предел этой последней f, получим

$$Af = \lim Af_{n_k}, \quad \|f\| = \lim \|f_{n_k}\| = 1$$

и, согласно (3),

$$Af - \mu_1 f = 0, \quad Af = \mu_1 f;$$

кроме того,

$$|(Af, f)| = |(\mu_1 f, f)| = |\mu_1| = \|A\|, \quad \|Af\| = \|\mu_1 f\| = |\mu_1| = \|A\|.$$

Итак, доказана

Теорема[1]). *Если A — вполне непрерывный симметричный оператор, то экстремальная задача:*

$$|(Af, f)| = \text{maximum } \textit{при условии } \|f\| = 1$$

[1]) Гильберт [1]; прямое доказательство, приведенное здесь, предложено Риссом [6] (§ 14). См. также Реллих [1].

имеет решения. Всякое ее решение $f=\varphi$ является собственным элементом оператора A. Соответствующее собственное значение μ_1 по абсолютной величине равно наибольшему значению $|(Af, f)|$ или наибольшему значению $\|Af\|$ при условии, что $\|f\|=1$, иначе говоря, $|\mu_1|=\|A\|$. Таким образом, всякий вполне непрерывный симметричный оператор $A\neq 0$ имеет по крайней мере одно отличное от нуля собственное значение.

Фиксируем какое-нибудь решение φ_1 и попытаемся отыскать другие собственные элементы, ортогональные φ_1. Для этого рассмотрим подпространство $\mathfrak{H}_1$ пространства $\mathfrak{H}$, состоящее из элементов, ортогональных φ_1. Это подпространство отображается оператором A само в себя; действительно, если элемент f принадлежит $\mathfrak{H}_1$, то

$$(Af, \varphi_1)=(f, A\varphi_1)=(f, \mu_1\varphi_1)=\mu_1(f, \varphi_1)=0,$$

т. е. его образ Af также принадлежит $\mathfrak{H}_1$. Оператор A, если рассматривать его в пространстве $\mathfrak{H}_1$, остается симметричным и вполне непрерывным. Следовательно, в $\mathfrak{H}_1$ существует собственный элемент φ_2, $\|\varphi_2\|=1$, и соответствующее собственное значение μ_2 равно по абсолютной величине наибольшему значению $|(Af, f)|$ или $\|Af\|$ при условии, что f принадлежит подпространству $\mathfrak{H}_1$ и $\|f\|=1$.

Повторив это рассуждение, т. е. выделив подпространство $\mathfrak{H}_2$, состоящее из элементов, ортогональных одновременно φ_1 и φ_2, мы получим еще один собственный элемент φ_3 и соответствующее собственное значение μ_3 и т. д. Вообще, *если найдены собственные элементы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, то собственный элемент φ_n может быть получен как решение экстремальной задачи:*

$$|(Af, f)|=\text{maximum } \textit{при условиях}$$
$$\|f\|=1, \quad (f, \varphi_i)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, n-1);$$

соответствующее собственное значение μ_n по абсолютной величине равно наибольшему значению $|(Af, f)|$ или $\|Af\|$ при тех же условиях.

Оставляя в стороне очевидный случай конечномерного $\mathfrak{H}$, мы получим бесконечную систему $\{\varphi_n\}$ собственных элементов; эта система — ортонормированная. Соответствующие собственные значения удовлетворяют неравенствам

$$|\mu_1|\geqslant|\mu_2|\geqslant\ldots.$$

Покажем, что $\mu_n\to 0$. Допустим противное; тогда последовательность $\left\{\frac{1}{\mu_n}\varphi_n\right\}$ будет ограничена и последовательность образов $\{\varphi_n\}$ будет содержать сходящуюся подпоследовательность, что невозможно, так как $\|\varphi_i-\varphi_k\|^2=2$ при $i\neq k$.

Возьмем произвольный элемент f пространства $\mathfrak{H}$ и положим

$$g_n = f - \sum_{i=1}^{n} (f, \varphi_i) \varphi_i.$$

Так как каждый g_n принадлежит подпространству $\mathfrak{H}_n$, образованному элементами, ортогональными элементам $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, то

$$\|Ag_n\| \leqslant |\mu_{n+1}| \|g_n\|;$$

кроме того,

$$\|g_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(f, \varphi_i)|^2 \leqslant \|f\|^2 \text{ и } \mu_{n+1} \to 0,$$

поэтому

$$Ag_n = Af - \sum_{i=1}^{n} (f, \varphi_i) A\varphi_i \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

что можно представить в виде

$$Af = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (f, \varphi_i) \varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} (f, A\varphi_i) \varphi_i \tag{4}$$

или

$$Af = \sum_{i=1}^{\infty} (Af, \varphi_i) \varphi_i.$$

Такой ряд сводится, разумеется, к конечной сумме, если все μ_i, начиная с некоторого номера, равны нулю.

Последовательность (конечная или бесконечная) чисел $\mu_i \neq 0$ содержит каждое отличное от нуля собственное значение оператора A столько раз, какова его кратность, так как в противном случае существовал бы собственный элемент φ, отвечающий некоторому собственному значению $\mu \neq 0$, ортогональный всем φ_i. Применив (4) к $f = \varphi$, мы пришли бы к противоречию.

Отсюда следует, в частности, что любое собственное значение $\mu \neq 0$ имеет конечную кратность. Итак, доказана следующая

Теорема[1]). *Если A — вполне непрерывный симметричный оператор, то все его собственные значения, отличные от нуля, могут быть получены описанным методом, каждое столько раз, какова его кратность. Каждое из них имеет конечную кратность, и число их конечно или счетно; в последнем случае они образуют последовательность, стремящуюся к нулю. Всякий элемент вида Af может быть разложен по ортонормированной системе соответствующих собственных элементов $\{\varphi_i\}$:*

$$Af = \sum_{i=1}^{\infty} (Af, \varphi_i) \varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (f, \varphi_i) \varphi_i. \tag{4'}$$

[1]) Случай оператора интегрального типа рассмотрен Гильбертом [1] и Шмидтом [1]. См. также Реллих [1].

Полезно заметить, что в нашем доказательстве мы не пользовались свойством **B** гильбертова пространства, т. е. полнотой. Действительно, всякий раз, когда утверждалось существование предела какой-нибудь последовательности элементов, это утверждение основывалось не на критерии Коши, а на том, что эта последовательность возникла в результате преобразования некоторой ограниченной последовательности посредством вполне непрерывного оператора A; поэтому существование предела вытекало из определения вполне непрерывного оператора. Следовательно, *наши теоремы справедливы также в пространствах, удовлетворяющих лишь условиям* **A** *и* **B**, *входящим в определение гильбертова пространства* (п. 83); это — так называемые *неполные гильбертовы пространства.* Заметим, что неполное пространство может быть пополнено путем присоединения к нему идеальных элементов; осуществляется это тем же способом (с помощью фундаментальных последовательностей), каким система рациональных чисел расширяется до множества всех действительных чисел.

Если $\mathfrak{H}$ — *полное* гильбертово пространство, то, каков бы ни был элемент g из $\mathfrak{H}$, ряд

$$\sum_i (g, \varphi_i)\varphi_i$$

сходится и его сумма f также принадлежит $\mathfrak{H}$. Почленно применив к этому ряду оператор A, получим

$$Af = \sum_i \mu_i (g, \varphi_i)\varphi_i.$$

С другой стороны, согласно только что доказанной теореме,

$$Ag = \sum_i \mu_i (g, \varphi_i)\varphi_i,$$

следовательно, $Af = Ag$. Положив $h = g - f$, получим $Ah = 0$ и

$$g = h + f = h + \sum_i (g, \varphi_i)\varphi_i,$$

причем элемент h, очевидно, ортогонален всем φ_i. Отсюда вытекает следующее предложение:

Теорема. *Для того чтобы последовательность собственных элементов φ_i оператора A, соответствующих собственным значениям μ_i, отличным от нуля, являлась полной ортонормированной системой в (полном) гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, необходимо и достаточно, чтобы 0 не был собственным значением оператора A, т. е. чтобы элемент Af был отличен от нуля при $f \neq 0$.*

В заключение заметим еще, что *возможность представить Af в виде* (4′) *с $\mu_i \to 0$ характеризует вполне непрерывные симметричные операторы.* В самом деле, пусть оператор A таков, что для него имеет место разложение (4′), где $\{\varphi_k\}$ — ортонормированная последовательность и $\mu_k \to 0$. Тогда A, очевидно, симметричен. Покажем теперь, что он вполне непрерывен. Пусть $\{f\}$ — какое-нибудь бесконечное ограниченное множество, $\|f\| \leqslant C$. Выделим из него слабо сходящуюся последовательность $\{f_n\}$. Тогда будем иметь

$$\|A(f_n-f_m)\|^2=\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 |(f_n-f_m, \varphi_k)|^2 = S_r + R_r,$$

где

$$S_r=\sum_{k=1}^{r} \mu_k^2 |(f_n-f_m, \varphi_k)|^2, \qquad R_r=\sum_{k=r+1}^{\infty} \mu_k^2 |(f_n-f_m, \varphi_k)|^2.$$

При достаточно большом r слагаемое R_r меньше, чем

$$\varepsilon^2 \sum_{k=r+1}^{\infty} |(f_n-f_m, \varphi_k)|^2 \leqslant \varepsilon^2 \|f_n-f_m\|^2 \leqslant \varepsilon^2 (2C)^2,$$

в силу того, что $\mu_k \to 0$. Фиксировав такое r, мы найдем (так как последовательность $\{f_n\}$ слабо сходится) такой номер N, что при $n, m > N$ каждое слагаемое суммы S_r будет меньше $\frac{\varepsilon^2}{r}$. Тогда будет выполняться неравенство

$$\|A(f_n-f_m)\| \leqslant \varepsilon (1+4C^2)^{1/2}.$$

Следовательно, $\{Af_n\}$ сходится, и полная непрерывность оператора A тем самым доказана.

94. Решение функционального уравнения $f-\lambda Af=g$. Если собственные значения $\mu_i \neq 0$ и соответствующие собственные элементы вполне непрерывного симметричного оператора A известны, то функциональное уравнение

$$f-\lambda Af=g \tag{5}$$

может быть решено следующим методом, с формальной точки зрения вполне очевидным.

Если для заданного g уравнение (5) имеет решение f, то, согласно предыдущей теореме,

$$f=g+\lambda Af=g+\lambda \sum_i \mu_i (f, \varphi_i) \varphi_i; \tag{6}$$

отсюда следует, что

$$(f, \varphi_k)=(g, \varphi_k)+\lambda\mu_k (f, \varphi_k)$$

и

$$(1-\lambda\mu_k)(f, \varphi_k)=(g, \varphi_k) \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Рассмотрим сначала случай, когда λ^{-1} не равно ни одному собственному значению; тогда будем иметь

$$(f, \varphi_k)=\frac{1}{1-\lambda\mu_k}(g, \varphi_k) \quad (k=1, 2, \ldots)$$

и, в силу (6),

$$f=g+\lambda\sum_i \frac{\mu_i}{1-\lambda\mu_i}(g,\ \varphi_i)\,\varphi_i. \tag{8}$$

Обратно, если ряд (8) сходится, то его сумма служит, очевидно, решением уравнения (5). Сходимость его, в случае полного пространства $\mathfrak{H}$, следует из того, что частичные суммы u_n ряда (8) удовлетворяют критерию Коши:

$$\|u_n-u_m\|^2=\sum_{m+1}^{n}\left|\frac{\lambda\mu_i}{1-\lambda\mu_i}(g,\ \varphi_i)\right|^2\leqslant\alpha^2\sum_{m+1}^{n}|(g,\ \varphi_i)|^2\to 0$$

при $n,\ m\to\infty$, где α означает верхнюю грань чисел

$$\left|\frac{\lambda\mu_i}{1-\lambda\mu_i}\right|\quad (i=1,\ 2,\ \ldots)$$

(она существует, так как $\lambda\mu_i\neq 1$ и $\mu_i\to 0$).

Если не предполагать, что пространство $\mathfrak{H}$ полно, то можно рассуждать следующим образом. Последовательность элементов

$$v_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\lambda\mu_i}(g,\ \varphi_i)\,\varphi_i$$

ограничена, так как

$$\|v_n\|^2=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{1-\lambda\mu_i}(g,\varphi_i)\right|^2\leqslant\beta^2\sum_{i=1}^{n}|(g,\ \varphi_i)|^2\leqslant\beta^2\|g\|^2,$$

где β означает верхнюю грань чисел

$$\left|\frac{1}{1-\lambda\mu_i}\right|\quad (i=1,\ 2,\ \ldots).$$

Поэтому последовательность элементов $u_n=g+\lambda A v_n$ содержит подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому элементу u пространства $\mathfrak{H}$. Так как

$$\|u-u_k\|\leqslant\|u-u_{n_k}\|+\|u_{n_k}-u_k\|\to 0 \text{ при } k\to\infty,$$

то u служит пределом исходной последовательности $\{u_n\}$.

Теперь рассмотрим случай, когда λ равно обратной величине некоторого собственного значения кратности r:

$$\lambda=\frac{1}{\mu_k}\quad (k=s,\ s+1,\ \ldots,\ s+r-1).$$

В силу (7), элемент g должен быть ортогонален элементам φ_s, φ_{s+1}, ..., φ_{s+r-1} и, следовательно, всем собственным элементам, соответствующим собственному значению $\frac{1}{\lambda}$; при этом для $k=s$, $s+1$, ..., $s+r-1$ коэффициенты $c_k=\lambda\mu_k(f,\ \varphi_k)$ оказываются неопределенными, а для $k<s$ и $k\geqslant s+r$ действует формула

$$c_k=\frac{\lambda\mu_k}{1-\lambda\mu_k}(g,\ \varphi_k).$$

Обратно, если g ортогонален элементам $\varphi_s, \varphi_{s+1}, \ldots, \varphi_{s+r-1}$ и коэффициенты c_k определены указанным образом, то ряд

$$f = g + \sum_k c_k \varphi_k$$

сходится и его сумма является решением уравнения (5).

95. Непосредственное отыскание n-го собственного значения заданного знака. Из теоремы о разложении по собственным элементам следует, что

$$(Af, f) = \sum_i \mu_i |(f, \varphi_i)|^2, \tag{9}$$

каков бы ни был элемент f из $\mathfrak{H}$.

Мы говорим, что A — *положительный* оператор, и пишем $A \geqslant 0$, если $(Af, f) \geqslant 0$ для всех f. Из формулы (9) следует, что *оператор A положителен тогда и только тогда, когда все его собственные значения $\geqslant 0$.*

До сих пор мы располагали собственные значения так, что их абсолютные величины убывали, и не обращали внимания на их знаки. Мы имели на это право, так как, в силу того, что μ_i ограничены, *абсолютная сходимость* разложения (9) обеспечивается неравенством Бесселя. Теперь же мы расположим положительные и отрицательные собственные значения в отдельные последовательности

$$\mu_1^+, \mu_2^+, \ldots \text{ и } \mu_1^-, \mu_2^-, \ldots;$$

из них первая последовательность — невозрастающая, вторая — неубывающая. Любая из этих последовательностей может быть конечной (даже пустой) или бесконечной. Пусть

$$\varphi_1^+, \varphi_2^+, \ldots \text{ и } \varphi_1^-, \varphi_2^-, \ldots$$

— соответствующие собственные элементы. В силу (9),

$$(Af, f) = \sum_i \mu_i^+ |(f, \varphi_i^+)|^2 + \sum_i \mu_i^- |(f, \varphi_i^-)|^2,$$

откуда вытекает следующее уточнение одной из теорем п. 93:

Теорема[1]). *n-е положительное собственное значение μ_n^+ равно наибольшему значению квадратичной формы (Af, f) при f, подчиненном условиям*

$$\|f\| = 1 \ \text{и} \ (f, \varphi_i^+) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Это наибольшее значение достигается на собственном элементе φ_n^+, соответствующем собственному значению μ_n^+. Аналогично, n-е отрицательное собственное значение μ_n^- равно наименьшему значе-

[1]) Гильберт [1].

нию (Af, f) при условиях

$$\|f\|=1 \text{ и } (f, \varphi_i^-)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, n-1);$$

это наименьшее значение достигается на φ_n^-.

Этой теоремой неудобно пользоваться при отыскании n-го собственного значения и n-го собственного элемента, так как для этого нужно знать все собственные элементы с меньшими номерами. Следующая теорема (доказанная Фишером[1]) для квадратичных форм в конечномерном пространстве) дает прямой метод отыскания n-го собственного значения.

Теорема. *Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$* — любые $n-1$ *элементов пространства $\mathfrak{H}$ и $\nu=\nu(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1})$ — наибольшее значение (Af, f) на множестве элементов f, подчиненных условиям*

$$\|f\|=1 \text{ и } (f, h_i)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, n-1).$$

Тогда наименьшее значение функции ν на всевозможных h_i равно μ_n^+ и достигается оно при

$$h_i=\varphi_i^+ \quad (i=1, 2, \ldots, n-1).$$

Аналогичное предложение относительно μ_n^- получится, если поменять местами „наименьшее значение" и „наибольшее значение".

Достаточно доказать предложение, относящееся к μ_n^+. Известно, что $\nu(\varphi_1^+, \varphi_2^+, \ldots, \varphi_{n-1}^+)=\mu_n^+$. Остается только показать, что $\nu \geqslant \mu_n^+$ при произвольных $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$. Для этого выберем ненулевое решение системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (\varphi_i^+, h_k)=0 \quad (k=1, 2, \ldots, n-1),$$

подчинив его условию

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2=1.$$

Тогда для

$$\varphi=\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i^+$$

будем иметь

$$\|\varphi\|=1 \text{ и } (\varphi, h_k)=0 \quad (k=1, 2, \ldots, n-1),$$

откуда вытекает, что

$$(A\varphi, \varphi) \leqslant \nu(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}).$$

С другой стороны,

$$(A\varphi, \varphi)=\sum_{i,j=1}^{n} x_i \bar{x}_j (A\varphi_i^+, \varphi_j^+)=\sum_{i=1}^{n} \mu_i^+ |x_i|^2 \geqslant \mu_n^+ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2=\mu_n^+,$$

следовательно, $\nu \geqslant \mu_n^+$, и на этом доказательство завершается.

---

[1]) См. Фишер [2]; Курант [2]; Курант и Гильберт [1] (стр. 112—113).

Доказанная теорема дает возможность сравнивать между собой собственные значения различных операторов. Приведем некоторые результаты такого типа, принадлежащие Г. Вейлю и Куранту[1]):

Теорема. *Пусть A_1 и A_2 — вполне непрерывные симметричные операторы и $A = A_1 + A_2$. Обозначим n-е положительные собственные значения операторов A_1, A_2 и A соответственно μ_{1n}^+, μ_{2n}^+ и μ_n^+, а их n-е отрицательные собственные значения обозначим μ_{1n}^-, μ_{2n}^- и μ_n^-. Тогда будем иметь*

$$\mu_{p+q-1}^+ \leqslant \mu_{1p}^+ + \mu_{2q}^+, \tag{10}$$

$$\mu_{p+q-1}^- \geqslant \mu_{1p}^- + \mu_{2q}^-. \tag{11}$$

Если, кроме того, число N^+ положительных собственных значений или число N^- отрицательных собственных значений оператора A_2 конечно, то

$$\mu_{p+N^+}^+ \leqslant \mu_{1p}^+ \tag{12}$$

или соответственно

$$\mu_{p+N^-}^- \geqslant \mu_{1p}^-. \tag{13}$$

Собственные значения операторов A_1 и $A = A_1 + A_2$ с одинаковыми номерами, положительные или отрицательные, отличаются друг от друга не больше чем на $\|A_2\|$. Если $A_2 \geqslant 0$, то каждое собственное значение оператора A не меньше собственного значения оператора A_1, имеющего тот же номер. Если $A_2 \leqslant 0$, что означает $-A_2 \geqslant 0$, то каждое собственное значение оператора A не больше собственного значения оператора A_1, имеющего тот же номер.

Соотношение (10) следует из очевидных неравенств

$$\mu_{p+q-1}^+ \leqslant \max_{12}(Af, f) \leqslant \max_{12}(A_1f, f) + \max_{12}(A_2f, f) \leqslant$$
$$\leqslant \max_1(A_1f, f) + \max_2(A_2f, f) = \mu_{1p}^+ + \mu_{2q}^+,$$

в которых индексы 1, 2 и 12 означают, что соответствующий максимум берется лишь по тем f, которые не только удовлетворяют условию $\|f\| = 1$, но, кроме того, ортогональны соответственно собственным элементам

$$\varphi_{11}^+, \ \varphi_{12}^+, \ \ldots, \ \varphi_{1,p-1}^+$$

оператора A_1, отвечающим собственным значениям

$$\mu_{11}^+, \ \mu_{12}^+, \ \ldots, \ \mu_{1,p-1}^+,$$

или собственным элементам

$$\varphi_{21}^+, \ \varphi_{22}^+, \ \ldots, \ \varphi_{2,q-1}^+$$

оператора A_2, отвечающим собственным значениям

$$\mu_{21}^+, \ \mu_{22}^+, \ \ldots, \ \mu_{2,q-1}^+,$$

или, наконец, тем и другим одновременно.

[1]) Г. Вейль [2], [3]; Курант [2].

Предоставив читателю самому доказать остальные утверждения теоремы, отметим одно следствие неравенств (12) и (13):

Если оператор A_2 имеет лишь конечное число N отличных от нуля собственных значений, то собственные значения μ_{1n} и μ_n операторов A_1 и $A = A_1 + A_2$, если все они занумерованы в порядке убывания абсолютной величины, удовлетворяют неравенствам

$$|\mu_{p+N}| \leqslant |\mu_{1p}| \quad (p = 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

В самом деле, пусть, например,

$$\mu_{1p} = \mu_{1r}^{+};$$

тогда, очевидно,

$$\mu_{1p} \geqslant |\mu_{1, p-r+1}^{-}|.$$

Таким образом, число собственных значений μ_k^{+}, больших μ_{1r}^{+}, в силу (12), не превосходит $r + N^{+} - 1$, а число μ_k^{-}, меньших $\mu_{1, p-r+1}^{-}$, в силу (13), не превосходит $p - r + N^{-}$; следовательно, число собственных значений μ_k, удовлетворяющих неравенству

$$|\mu_k| > |\mu_{1p}|,$$

не превосходит

$$(r + N^{+} - 1) + (p - r + N^{-}) = p + N^{+} + N^{-} - 1 = p + N - 1,$$

что и требовалось доказать.

96. Другой способ отыскания собственных значений и собственных элементов. Метод отыскания отличных от нуля собственных значений вполне непрерывного симметричного оператора $A \neq O$, который мы изложим ниже, принадлежит Келлогу [1].

Пусть f_0 — произвольный элемент, такой, что $Af_0 \neq 0$. Положим

$$f_n = A^n f_0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Равенства

$$(f_n, f_n) = (Af_{n-1}, f_n) = (f_{n-1}, Af_n) = (f_{n-1}, f_{n+1}) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{15}$$

показывают, что $f_{n+1} \neq 0$, коль скоро $f_n \neq 0$. Так как $f_0 \neq 0$ и $f_1 \neq 0$, то, следовательно, $f_n \neq 0$ при любом n.

Обозначив

$$\frac{\|f_n\|}{\|f_{n-1}\|} = r_n$$

и положив $\|f_0\| = r_0$, получим

$$f_n = (r_0 r_1 \ldots r_n) g_n,$$

где g_n — некоторый элемент пространства $\mathfrak{H}$ с нормой 1. Очевидно, что

$$Ag_n = r_{n+1} g_{n+1} \quad \text{и} \quad A^2 g_n = r_{n+1} r_{n+2} g_{n+2}. \tag{16}$$

Вследствие первого из этих равенств $r_{n+1} \leqslant \|A\|$. С другой стороны, в силу (15), $r_n = (g_{n-1}, g_{n+1}) r_{n+1}$, откуда вытекает, что

$r_n \leqslant r_{n+1}$. Таким образом, последовательность $\{r_n\}$ сходится к некоторому положительному r.

С помощью соотношений (16) получим

$$\|g_n - g_{n+2}\|^2 = 2 - (g_n, g_{n+2}) - (g_{n+2}, g_n) = 2 - \left(g_n, \frac{A^2 g_n}{r_{n+1} r_{n+2}}\right) - \\ - \left(\frac{A^2 g_n}{r_{n+1} r_{n+2}}, g_n\right) = 2 - 2\frac{(Ag_n, Ag_n)}{r_{n+1} r_{n+2}} = 2 - 2\frac{r_{n+1}^2}{r_{n+1} r_{n+2}} = \\ = 2\left(1 - \frac{r_{n+1}}{r_{n+2}}\right) \to 0,$$

откуда следует, что

$$g_n - g_{n+2} = g_n - \frac{1}{r_{n+1} r_{n+2}} A^2 g_n \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{17}$$

Последовательность элементов

$$h_n = \frac{1}{r_{n+1} r_{n+2}} g_n,$$

будучи ограниченной, содержит подпоследовательность, для которой $A^2 h_n$ сходятся к некоторому элементу φ из $\mathfrak{H}$. В силу (17), соответствующие g_n также сходятся к φ, а

$$g_n - \frac{1}{r_{n+1} r_{n+2}} A^2 g_n$$

— к элементу

$$\varphi - \frac{1}{r^2} A^2 \varphi.$$

Следовательно,

$$\varphi - \frac{1}{r^2} A^2 \varphi = 0, \qquad A^2 \varphi = r^2 \varphi.$$

Как предел последовательности элементов $\{g_n\}$ с нормой 1, элемент φ также имеет норму, равную 1. Мы видим, что φ является собственным элементом оператора A^2. С его помощью мы найдем сейчас собственный элемент оператора A. Положив

$$\psi = \varphi + \frac{1}{r} A\varphi, \quad \chi = \varphi - \frac{1}{r} A\varphi,$$

будем иметь

$$A\psi = r\psi, \qquad A\chi = -r\chi.$$

Так как $\psi + \chi = 2\varphi \neq 0$, то элементы ψ и χ не могут быть одновременно равны нулю; следовательно, из чисел r и $-r$ хотя бы одно является собственным значением оператора A.

Более подробное изучение последовательности $\{g_n\}$ провел Вавр; он же применил описанный метод к некоторым *не вполне непрерывным* симметричным операторам[1]). Тот же метод с успехом может быть применен к вполне непрерывным линейным операто-

[1]) Вавр [1], [2].

рам, *не симметричным*, но дающим симметричные произведения по умножении слева на некоторый положительный симметричный оператор (так называемые *симметризуемые* операторы)[1]).

§ 2. ОПЕРАТОРЫ С СИММЕТРИЧНЫМ ЯДРОМ

97. Теоремы Гильберта и Шмидта. Применим теорию вполне непрерывных симметричных операторов к частному случаю оператора A в функциональном пространстве $L^2(a, b)$, порожденного ядром $A(x, y)$, *симметричным*, или *эрмитовым*, т. е. удовлетворяющим условию

$$A(x, y) = \overline{A(y, x)},$$

и принадлежащим пространству L^2 функций двух переменных с суммируемым квадратом в области $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$. Согласно замечанию, сделанному в п. 69, оператор A может быть равным нулю тождественно только в том случае, когда само ядро $A(x, y)$ равно нулю почти всюду. Итак, имеет место следующая

Теорема. *Если ядро $A(x, y)$ не равно нулю почти всюду, то оператор A имеет хотя бы одно отличное от нуля собственное значение, и все его ненулевые собственные значения имеют конечную кратность. Существует ортонормированная (конечная или бесконечная) последовательность собственных функций $\varphi_i(x)$ оператора A, соответствующих собственным значениям $\mu_i \neq 0$, и для любой функции $g(x)$, принадлежащей пространству L^2, существует сходящееся в среднем разложение*

$$g(x) = h(x) + \sum_i (g, \varphi_i)\varphi_i(x), \tag{18}$$

где $h(x)$ — некоторая функция (зависящая от $g(x)$), обладающая тем свойством, что $Ah(x) = 0$; отсюда следует, что

$$Ag(x) = \sum_i \mu_i (g, \varphi_i)\varphi_i(x). \tag{19}$$

Эту теорему мы дополним некоторыми предложениями, справедливыми только для операторов рассматриваемого здесь вида. Функции

$$\Phi_i(x, y) = \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

образуют в пространстве L^2 ортонормированную систему, поэтому ряд

$$\sum_i (A, \Phi_i)\Phi_i(x, y)$$

---

[1]) См. Заанен [1]. Интегральные уравнения с „симметризуемым" ядром после Гильберта [1] изучались многими авторами; см. статью Хеллингера и Теплица [2] (стр. 1536—1543). В работе Райда [1] читатель найдет более поздние результаты, а также библиографические указания.