рам, *не симметричным*, но дающим симметричные произведения по умножении слева на некоторый положительный симметричный оператор (так называемые *симметризуемые* операторы)[1]).

§ 2. ОПЕРАТОРЫ С СИММЕТРИЧНЫМ ЯДРОМ

97. Теоремы Гильберта и Шмидта. Применим теорию вполне непрерывных симметричных операторов к частному случаю оператора A в функциональном пространстве $L^2(a, b)$, порожденного ядром $A(x, y)$, *симметричным*, или *эрмитовым*, т. е. удовлетворяющим условию

$$A(x, y) = \overline{A(y, x)},$$

и принадлежащим пространству L^2 функций двух переменных с суммируемым квадратом в области $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$. Согласно замечанию, сделанному в п. 69, оператор A может быть равным нулю тождественно только в том случае, когда само ядро $A(x, y)$ равно нулю почти всюду. Итак, имеет место следующая

Теорема. *Если ядро $A(x, y)$ не равно нулю почти всюду, то оператор A имеет хотя бы одно отличное от нуля собственное значение, и все его ненулевые собственные значения имеют конечную кратность. Существует ортонормированная (конечная или бесконечная) последовательность собственных функций $\varphi_i(x)$ оператора A, соответствующих собственным значениям $\mu_i \neq 0$, и для любой функции $g(x)$, принадлежащей пространству L^2, существует сходящееся в среднем разложение*

$$g(x) = h(x) + \sum_i (g, \varphi_i)\varphi_i(x), \tag{18}$$

где $h(x)$ — некоторая функция (зависящая от $g(x)$), обладающая тем свойством, что $Ah(x) = 0$; отсюда следует, что

$$Ag(x) = \sum_i \mu_i (g, \varphi_i)\varphi_i(x). \tag{19}$$

Эту теорему мы дополним некоторыми предложениями, справедливыми только для операторов рассматриваемого здесь вида.

Функции

$$\Phi_i(x, y) = \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

образуют в пространстве L^2 ортонормированную систему, поэтому ряд

$$\sum_i (A, \Phi_i)\Phi_i(x, y)$$

---

[1]) См. Заанен [1]. Интегральные уравнения с „симметризуемым" ядром после Гильберта [1] изучались многими авторами; см. статью Хеллингера и Теплица [2] (стр. 1536—1543). В работе Райда [1] читатель найдет более поздние результаты, а также библиографические указания.

сходится в среднем к некоторой функции $S(x, y)$, принадлежащей L^2. Так как

$$(A, \Phi_i) = \int_a^b \int_a^b A(x, y)\, \varphi_i(y)\, \overline{\varphi_i(x)}\, dx\, dy = (A\varphi_i, \varphi_i) = \mu_i,$$

то

$$S(x, y) = \sum_i \mu_i \Phi_i(x, y).$$

Каковы бы ни были f и g из L^2, их произведение $F(x, y) = g(x)\overline{f(y)}$ является элементом из L^2, причем

$$(S, F) = \sum_i \mu_i (\Phi_i, F).$$

С другой стороны, из $Ah = 0$ следует, что $(Af, h) = (f, Ah) = 0$, поэтому, в силу (18),

$$(Af, g) = \sum_i (Af, \varphi_i)(\varphi_i, g) = \sum_i (f, A\varphi_i)(\varphi_i, g) = \sum_i \mu_i (f, \varphi_i)(\varphi_i, g),$$

откуда вытекает, что

$$(A, F) = (Af, g) = \sum_i \mu_i (\Phi_i, F)$$

и, следовательно,

$$(A, F) = (S, F).$$

Таким образом, разность $A(x, y) - S(x, y)$ ортогональна всем функциям вида $F(x, y)$ и, следовательно, всем ядрам конечного ранга, а так как эти последние всюду плотны в L^2, то $A(x, y) - S(x, y) = 0$ почти всюду. Итак, доказана

Теорема[1]). *Всякая функция $A(x, y)$ с суммируемым квадратом, симметричная относительно своих аргументов, разлагается в смысле сходимости в среднем в ряд*

$$A(x, y) = \sum_i \mu_i \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}, \tag{20}$$

где $\{\varphi_i(x)\}$ — ортонормированная последовательность собственных функций, а $\{\mu_i\}$ — последовательность соответствующих собственных значений оператора A, порожденного ядром $A(x, y)$.

Отсюда, в частности, следует, что

$$\| A(x, y) \|^2 = \sum_i \mu_i^2 \tag{21}$$

или

$$\| A(x, y) - S_N(x, y) \|^2 = \sum_{i > N} \mu_i^2,$$

где $S_N(x, y)$ означает N-ю частичную сумму ряда (20).

[1]) Шмидт [1].

До сих пор мы не делали никаких предположений относительно порядка, в котором занумерованы собственные значения μ_i. В том случае, когда они расположены в порядке убывания абсолютной величины, т. е.

$$|\mu_1| \geqslant |\mu_2| \geqslant \ldots,$$

частичные суммы $S_N(x, y)$, представляющие собой, очевидно, ядра конечного ранга, обладают замечательным минимальным свойством:

Каково бы ни было симметричное ядро $A_N(x, y)$ ранга N, выполняется неравенство

$$|A(x, y) - A_N(x, y)| \geqslant |A(x, y) - S_N(x, y)|.$$

В самом деле, так как число отличных от нуля собственных значений оператора A_N, порожденного ядром $A_N(x, y)$, не превосходит N, то собственное значение оператора $A = (A - A_N) + A_N$, имеющее номер $p + N$, т. е. μ_{p+N}, не превосходит по абсолютной величине p-е собственное значение оператора $A - A_N$, которое мы обозначим χ_p [см. п. 95, неравенство (14)]. Применив соотношение (21) к оператору $A - A_N$, получим требуемое неравенство

$$|A - A_N|^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \chi_p^2 \geqslant \sum_{p=1}^{\infty} \mu_{p+N}^2 = |A - S_N|^2.$$

Вернемся к разложению (19), которое имеет место в смысле сходимости в среднем для всех функций вида

$$Ag(x) = \int_a^b A(x, y)\, g(y)\, dy.$$

Важно знать, в каких случаях ряд (19) сходится в обычном смысле или даже абсолютно и равномерно. Это, в частности, имеет место тогда, когда существует постоянная C, такая, что

$$\int_a^b |A(x, y)|^2 dy < C^2 \tag{22}$$

при всех x. $\left(\text{Пример: } A(x, y) = |x - y|^{-\alpha},\ \alpha < \frac{1}{2}.\right)$

Действительно, если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к некоторой функции $f(x)$, то, в силу (22), последовательность $\{Af_n(x)\}$ сходится к $Af(x)$ равномерно, так как

$$|Af(x) - Af_n(x)|^2 = \left| \int_a^b A(x, y)\,[f(y) - f_n(y)]\, dy \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |A(x, y)|^2 dy \cdot \int_a^b |f(y) - f_n(y)|^2 dy \leqslant C^2 \|f - f_n\|^2.$$

Ряд (18) сходится в среднем, следовательно, ряд (19), который получается применением к обеим частям (18) оператора A, сходится равномерно в интервале $a \leqslant x \leqslant b$.

Далее, ряд (19) сходится абсолютно, т. е. его члены могут быть произвольным образом переставлены. В самом деле, обычная сходимость ряда (19), как мы только что видели, вытекала из сходимости в среднем ряда (18), а сходимость в среднем ряда $\sum \psi_i$ с взаимно ортогональными членами эквивалентна сходимости числового ряда $\sum \|\psi_i\|^2$ с неотрицательными членами; следовательно, сумма такого ряда не зависит от расположения его членов.

Таким образом, доказана

Теорема[1]). *Если симметричное ядро $A(x, y)$ удовлетворяет условию* (22), *то ряд* (19) *сходится абсолютно и равномерно, какова бы ни была функция $g(x)$, принадлежащая L^2.*

98. Теорема Мерсера. Разложение (20) ядра $A(x, y)$ не всегда сходится равномерно, даже если фуикция $A(x, y)$ непрерывна. Однако для одиого класса непрерывных ядер сходимость такого ряда ранномерна. А именно, справедлива следующая теорема Мерсера [1]:

Теорема. *Если оператор A, порожденный непрерывным симметричным ядром $A(x, y)$, положителен, т. е. $(Af, f) \geqslant 0$ при любых f, или, что эквивалентно, все собственные значения $\mu_i \neq 0$ положительны, то ряд* (20) *сходится равномерно.*

Эта теорема справедлива н в том случае, когда все собственные значения, за исключением конечного числа их, имеют одинаковый знак.

Заметим, что н силу непрерывности ядра $A(x, y)$, все функции вида

$$Af(x) = \int_a^b A(x, y) f(y) \, dy$$

и, в частиости, все собственные функции $\varphi_i(x) = \frac{1}{\mu_i} A\varphi_i(x)$ непрерывны. Следовательио, нсе „остатки" ряда (20)

$$A_n(x, y) = A(x, y) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

также представляют собой непрерывные функцни. Так как

$$A_n(x, y) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_i \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}$$

в смысле сходимости в среднем, то

$$\int_a^b \int_a^b A_n(x, y) f(y) \overline{f(x)} \, dx \, dy = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_i (\varphi_i, f)(f, \varphi_i) \geqslant 0, \tag{23}$$

каков бы ни был элемент f пространства L^2.

Отсюда следует, что $A_n(x, x) \geqslant 0$. В самом деле, если бы в какой-нибудь точке (x_0, x_0) было справедливо неравеиство $A_n(x_0, x_0) < 0$, то, в силу непрерывности, нераненство $A_n(x, y) < 0$ выполнялось бы в некоторой ее окрестности

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \quad x_0 - \delta < y < x_0 + \delta.$$

---
[1]) Шмидт [1].

Тогда для функции $f(x)$, равной 1 в интервале $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ и 0 в остальных точках, интеграл (23) был бы отрицателен, что невозможно.

Итак,

$$A_n(x, x)=A(x, x)-\sum_{i=1}^{n}\mu_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(x)}\geqslant 0$$

для $n=1, 2, \ldots$. Отсюда вытекает, что ряд с положительными членами

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(x)}$$

сходится и его сумма не превосходит $A(x, x)$. Если M — наибольшее значение непрерывной функции $A(x, x)$, то, в силу неравенства Коши,

$$\left|\sum_{i=m}^{n}\mu_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}\right|^2\leqslant\sum_{i=m}^{n}\mu_i|\varphi_i(x)|^2\sum_{i=m}^{n}\mu_i|\varphi_i(y)|^2\leqslant M\sum_{i=m}^{n}\mu_i|\varphi_i(x)|^2; \tag{24}$$

следовательно, ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)} \tag{25}$$

сходится при любом x равномерно относительно y. Его сумма $B(x, y)$ является, таким образом, непрерывной функцией от y, и, какова бы ни была непрерывная функция $f(y)$,

$$\int_a^b B(x, y)f(y)\,dy=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\varphi_i(x)\int_a^b\overline{\varphi_i(y)}f(y)\,dy.$$

Согласно теоремам, доказанным в предыдущем пункте, ряд в правой части последнего равенства сходится к $Af(x)$. Следовательно,

$$\int_a^b[B(x, y)-A(x, y)]f(y)\,dy=0.$$

Положив, в частности, $f(y)=\overline{B(x, y)-A(x, y)}$ (где x фиксировано), получим $B(x, y)-A(x, y)=0$ для $a\leqslant y\leqslant b$, откуда будем иметь

$$A(x, x)=B(x, x)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i|\varphi_i(x)|^2.$$

Члены этого ряда представляют собой положительные непрерывные функции от x, и сумма его $A(x, x)$ также непрерывна, поэтому, согласно известной теореме Дини, этот ряд сходится равномерно. Еще раз применив неравенство Коши, мы получим, что ряд (25) сходится равномерно как по x, так и по y, что и требовалось доказать.

Каково бы ни было непрерывное симметричное ядро $A(x, y)$, итерированное ядро

$$A_2(x, y)=\int_a^b A(x, z)A(z, y)\,dz$$

— положительного типа и симетрично; действительно,

$$(A_2f, f)=(A^2f, f)=(Af, Af)\geqslant 0.$$

Собственные функции $\varphi_i(x)$ оператора A являются одновременно собственными функциями его квадрата A^2, а соответствующие собственные значения равны квадратам собственных значений μ_i оператора A:

$$A^2\varphi_i = A(A\varphi_i) = A(\mu_i\varphi_i) = \mu_i^2\varphi_i.$$

Последовательность $\mu_1^2, \mu_2^2, \ldots$ охватывает все собственные значения оператора A^2, отличные от нуля, причем каждое столько раз, какова его кратность. В самом деле, в противном случае существовала бы собственная функция φ оператора A^2, соответствующая некоторому собственному значению $\mu \neq 0$, которая была бы ортогональна всем φ_i; а это противоречит тому, что

$$\mu\varphi = A^2\varphi = \sum_{i=1}^{\infty}(A^2\varphi, \varphi_i)\varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty}(\varphi, A^2\varphi_i)\varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty}\mu_i^2(\varphi, \varphi_i)\varphi_i = 0.$$

В силу теоремы Мерсера, каково бы ни было непрерывное ядро $A(x, y)$, его итерация разлагается в равномерно сходящийся ряд:

$$A_2(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu_i^2\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}.$$

§ 3. ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ СТРУНЫ И К ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

99. Задача о колебаниях струны. Пространства D и H. Из многочисленных приложений изложенной здесь теории к математической физике мы укажем одно из самых простых, но типичных, а именно, приложение к задаче о малых поперечных колебаниях струны, однородной или неоднородной[1]).

Предположим, что колебания происходят в плоскости (x, y), а концы струны находятся в точках $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Движение струны будет описываться функцией $y(x, t)$ — ординатой точки струны, имеющей абсциссу x в момент t.

Кинетическая энергия струны выражается интегралом Стильтьеса[2])

$$E_c = \frac{1}{2}\int_0^1 \dot{y}^2\, dm(x),$$

где $m(x)$ означает массу отрезка струны $(0, x)$. Потенциальная энергия пропорциональна величине

$$\Delta = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2}\, dy - 1,$$

т. е. удлинению струны, причем коэффициент пропорциональности равен натяжению, которое мы для простоты считаем равным 1. Ограничимся рассмотрением малых колебаний, т. е. будем считать возможным заменить $\sqrt{1 + y'^2}$ в указанном выше

[1]) Наше изложенне следует статье С.-Надя [7].

[2]) Условимся писать здесь $\dot{y}$ вместо $\frac{\partial y}{\partial t}$ и y' вместо $\frac{\partial y}{\partial x}$.