равны квадратам собственных значений μ_i оператора A:

$$A^2\varphi_i = A(A\varphi_i) = A(\mu_i\varphi_i) = \mu_i^2\varphi_i.$$

Последовательность $\mu_1^2, \mu_2^2, \ldots$ охватывает все собственные значения оператора A^2, отличные от нуля, причем каждое столько раз, какова его кратность. В самом деле, в противном случае существовала бы собственная функция φ оператора A^2, соответствующая некоторому собственному значению $\mu \neq 0$, которая была бы ортогональна всем φ_i; а это противоречит тому, что

$$\mu\varphi = A^2\varphi = \sum_{i=1}^{\infty}(A^2\varphi, \varphi_i)\,\varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty}(\varphi, A^2\varphi_i)\,\varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty}\mu_i^2(\varphi, \varphi_i)\,\varphi_i = 0.$$

В силу теоремы Мерсера, каково бы ни было непрерывное ядро $A(x, y)$, его итерация разлагается в равномерно сходящийся ряд:

$$A_2(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu_i^2\varphi_i(x)\,\overline{\varphi_i(y)}.$$

§ 3. ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ СТРУНЫ И К ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

99. Задача о колебаниях струны. Пространства D и H. Из многочисленных приложений изложенной здесь теории к математической физике мы укажем одно из самых простых, но типичных, а именно, приложение к задаче о малых поперечных колебаниях струны, однородной или неоднородной[1]).

Предположим, что колебания происходят в плоскости (x, y), а концы струны находятся в точках $(0, 0)$ и $(1, 0)$. Движение струны будет описываться функцией $y(x, t)$ — ординатой точки струны, имеющей абсциссу x в момент t.

Кинетическая энергия струны выражается интегралом Стильтьеса[2])

$$E_c = \frac{1}{2}\int_0^1 \dot{y}^2\,dm(x),$$

где $m(x)$ означает массу отрезка струны $(0, x)$. Потенциальная энергия пропорциональна величине

$$\Delta = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2}\,dy - 1,$$

т. е. удлинению струны, причем коэффициент пропорциональности равен натяжению, которое мы для простоты считаем равным 1. Ограничимся рассмотрением малых колебаний, т. е. будем считать возможным заменить $\sqrt{1+y'^2}$ в указанном выше

[1]) Наше изложенне следует статье С.-Надя [7].

[2]) Условимся писать здесь $\dot{y}$ вместо $\frac{\partial y}{\partial t}$ и y' вместо $\frac{\partial y}{\partial x}$.

интеграле приближенным выражением $1+\frac{1}{2}y'^2$. Тогда выражение потенциальной энергии примет вид

$$E_p=\frac{1}{2}\int_0^1 y'^2\,dx.$$

Функции $y(x, t)$, соответствующие тем движениям, которые струна способна совершать за время $0\leqslant t\leqslant T$, должны, согласно принципу Гамильтона, сообщать стационарные значения интегралу

$$\int_0^T (E_c-E_p)\,dt=\int_0^T dt\left[\frac{1}{2}\int_0^1 \dot{y}^2\,dm(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 y'^2\,dx\right], \tag{26}$$

причем начальное и конечное положения струны, т. е. $y(x, 0)$ и $y(x, T)$, считаются заданными. Следовательно,

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int_0^T dt\left[\frac{1}{2}\int_0^1 (\dot{y}+\varepsilon\dot{\eta})^2\,dm(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 (y'+\varepsilon\eta')^2\,dx\right]=0$$

при $\varepsilon=0$, т. е.

$$\int_0^T dt\left[\int_0^1 \dot{y}\dot{\eta}\,dm(x)-\int_0^1 y'\eta'\,dx\right]=0, \tag{27}$$

и это условие должно выполняться для любой *допустимой* функции $\eta(x, t)$, такой, что

$$\eta(x, 0)=0, \quad \eta(x, T)=0. \tag{28}$$

Функцию $y(x, t)$ мы условимся называть допустимой, если она удовлетворяет некоторым условиям, выдвинутым самим существом задачи, а именно, *краевым условиям*

$$y(0, t)=0, \quad y(1, t)=0, \tag{29}$$

и, кроме того, определенным условиям, обеспечивающим существование производных и интегралов в выражении (26).

Для того чтобы сформулировать эти условия точно, введем функциональные пространства D и H, представляющие собой реализации абстрактного действительного гильбертова пространства.

Пространство D состоит из действительных функций $u(x)$, определенных в интервале $0\leqslant x\leqslant 1$, абсолютно непрерывных и обращающихся в нуль в точках 0 и 1, производные которых существуют почти всюду и суммируемы в квадрате; скалярное произведение и норма определяются формулами

$$(u, v)_D=\int_0^1 u'(x)\,v'(x)\,dx, \qquad \|u\|_D=\sqrt{(u, u)_D}.$$

Легко проверить, что D удовлетворяет всем условиям, определяющим (действительное) гильбертово пространство; в частности, оно полно.

Пусть H — пространство действительных функций $f(x)$, определенных в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ и интегрируемых в квадрате, причем интеграл берется по функции $m(x)$; скалярное произведение и норма в пространстве H определяются следующим образом:

$$(f, g)_H = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dm(x), \qquad \|f\|_H = \sqrt{(f, f)_H}.$$

С помощью этих определений условия, описывающие *допустимые* функции, могут быть сформулированы так:

а) $y(x, t)$ *как функция переменного x представляет собой элемент пространства D, зависящий слабо непрерывно от параметра t; это означает, что $(y, u)_D$ есть непрерывная функция от t при любом выборе элемента u из D;*

б) $y(x, t)$ *как элемент пространства H, зависящий от t, имеет слабую производную, слабо непрерывную по t; это означает, что $(y, f)_H$ имеет непрерывную производную по t при любом выборе элемента f пространства H.*

Допустимые функции образуют, очевидно, линейное множество. Из условия а) следует, что $\|y\|_D^2$ является функцией от t, полунепрерывной сверху и, следовательно, суммируемой в любом конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant T$; таким образом,

$$(y_1, y_2)_D = \frac{1}{4}\|y_1 + y_2\|_D^2 - \frac{1}{4}\|y_1 - y_2\|_D^2$$

также суммируема, каковы бы ни были допустимые функции $y_1(x, t)$ и $y_2(x, t)$. Из условия б) вытекает, что отношение

$$z(x; t, h) = \frac{y(x, t+h) - y(x, t)}{h},$$

рассматриваемое как элемент пространства H, при $h \to 0$ удовлетворяет условию сходимости Коши в слабом смысле; следовательно, оно имеет слабый предел в пространстве H, который мы обозначим $\dot{y}(x, t)$. Так как, согласно определению,

$$(\dot{y}, f)_H = [(y, f)_H]^{\boldsymbol{\cdot}},$$

то элемент $\dot{y}$ является слабо непрерывной функцией параметра t. Следовательно, $\|\dot{y}\|_H^2$ и $(\dot{y}_1, \dot{y}_2)_H$ суммируемы по t в любом конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant T$.

Из неравенства Шварца вытекают следующие неравенства, относящиеся к элементам $u(x)$ пространства D, которые понадобятся нам в дальнейшем:

$$\max|u(x)| \leqslant \frac{1}{2}\|u\|_D, \tag{30}$$

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leqslant \sqrt{|x_1 - x_2|}\,\|u\|_D. \tag{31}$$

В самом деле,

$$2|u(x)|=\left|\int_0^x u'(\xi)\,d\xi-\int_x^1 u'(\xi)\,d\xi\right|=\left|\int_0^1 [\operatorname{sgn}(\xi-x)]\,u'(\xi)\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int_0^1 [\operatorname{sgn}(\xi-x)]^2\,d\xi\cdot\int_0^1 [u'(\xi)]^2\,d\xi\right\}^{1/2}=\|u\|_D$$

и

$$|u(x_1)-u(x_2)|=\left|\int_{x_2}^{x_1} u'\,dx\right|\leqslant\left\{\left|\int_{x_2}^{x_1}dx\right|\cdot\int_0^1 u'^2\,dx\right\}^{1/2}=\sqrt{|x_1-x_2|}\,\|u\|_D.$$

В силу неравенства (30), если последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится в смысле метрики пространства D, то она сходится и в обычном смысле, притом даже равномерно, в интервале $0\leqslant x\leqslant 1$; далее, в силу тех же неравенств (30) и (31), функции, удовлетворяющие условию $\|u\|_D\leqslant C$, ограничены в совокупности и равностепенно непрерывны.

Известная теорема Арцела [2] утверждает, что из всякой последовательности функций, ограниченных в совокупности и равностепенно непрерывных, можно извлечь равномерно сходящуюся подпоследовательность. Итак, *всякая последовательность $\{u_k(x)\}$, ограниченная в смысле метрики пространства D, содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность.*

В силу неравенства (30), для любых двух элементов u и v пространства D выполняются соотношения

$$|(u, v)_H|=\left|\int_0^1 uv\,dm(x)\right|\leqslant\max|u|\cdot\max|v|\cdot M\leqslant\frac{M}{4}\|u\|_D\|v\|_D,$$

где $M=m(1)$ — масса всей струны. Выражение $(u, v)_H$, симметричное относительно u и v, представляет собой ограниченную билинейную форму в пространстве D (см. п. 84); следовательно, существует линейный оператор A, очевидно симметричный, отображающий пространство D само в себя, такой, что

$$(u, v)_H=(Au, v)_D.$$

Этот оператор, кроме того, *вполне непрерывен*. В самом деле, если последовательность $\{u_n(x)\}$ ограничена в смысле метрики пространства D, то, как мы видели, из нее можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{w_n(x)\}$; тогда при $m, n\to\infty$ будем иметь

$$(A(w_n-w_m),\ w_n-w_m)_D=(w_n-w_m,\ w_n-w_m)_H=$$

$$=\int_0^1 (w_n-w_m)^2\,dm(x)\to 0.$$

Таким образом, оператор A удовлетворяет признаку полной непрерывности, указанному в п. 85.

Воспользовавшись результатами п. 93, мы придем к следующему выводу:

Существуют ортонормированная последовательность $\{u_n\}$ элементов пространства D и числовая последовательность $\{\mu_n\}$, такие, что для любой пары элементов u, v из D

$$(u, v)_H = \sum \mu_n (u, u_n)_D (u_n, v)_D. \tag{32}$$

Так как $(u, u)_H \geqslant 0$, то все μ_n положительны, $\mu_n = \frac{1}{\varkappa_n^2}$. Далее, $(u, u)_H$ обращается в нуль только при $u(x) \equiv 0$, так как функция $m(x)$—строго возрастающая; следовательно, $\{u_n\}$—полная ортонормированная последовательность, т. е. любая функция $u(x)$, принадлежащая D, представляется в виде ряда

$$u(x) = \sum a_n u_n(x),$$

где $a_n = (u, u_n)_D$, сходящегося в смысле нормы пространства D, а следовательно, и равномерно. Кроме того, этот ряд сходится абсолютно, так как его сумма не зависит от порядка его членов.

Из (32) следует, в частности, что

$$(u_n, u_n)_H = \mu_n \quad \text{и} \quad (u_n, u_m)_H = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m,$$

т. е. что *функции*

$$\varphi_n(x) = \varkappa_n u_n(x)$$

образуют ортонормированную систему в пространстве H. Эта последовательность также полная. Действительно, известно, что кусочно-линейные непрерывные функции, обращающиеся в нуль на концах интервала (0, 1), расположены в пространстве H всюду плотно. Но такие функции могут быть приближены равномерно, а следовательно, и в смысле метрики пространства H, линейными комбинациями функций u_n или φ_n, что и требовалось доказать.

Итак, *всякая функция $f(x)$, принадлежащая пространству H, разлагается в ряд*

$$f(x) = \sum b_n \varphi_n(x),$$

где $b_n = (f, \varphi_n)_H$, сходящийся в смысле метрики пространства H.

100. Задача о колебаниях струны. Собственные колебания. Вернемся к нашей задаче об отыскании возможных движений $y(x, t)$ струны. Пусть

$$y(x, t) = \sum c_k(t) u_k(x), \quad \dot{y}(x, t) = \sum d_k(t) \varphi_k(x),$$

где оба ряда сходятся, первый в смысле метрики пространства D, второй в смысле метрики H; коэффициенты

$$c_k(t) = (y, u_k)_D \quad \text{и} \quad d_k(t) = (\dot{y}, \varphi_k)_H$$

являются непрерывными функциями от t, причем

$$d_k(t) = (\dot{y}, \varphi_k)_H = [(y, \varphi_k)_H]^{\cdot} = \left[\sum_n \frac{1}{\varkappa_n^2}(y, u_n)_D (u_n, \varphi_k)_D\right]^{\cdot} = \\ = \frac{1}{\varkappa_k}[(y, u_k)_D]^{\cdot} = \frac{1}{\varkappa_k}\dot{c}_k(t).$$

Пусть $\gamma_n(t)$ — произвольная функция, имеющая непрерывную производную и обращающаяся в нуль в точках $t=0$ и $t=T$. Тогда

$$\eta(x, t) = \gamma_n(t)\, u_n(x)$$

будет допустимой функцией, удовлетворяющей условиям (28); записав для нее уравнение (27), получим

$$\int_0^T dt\left(\frac{\dot{c}_n\dot{\gamma}_n}{\varkappa_n^2} - c_n\gamma_n\right) = 0.$$

Если $C_n(t)$ — первообразная функция $c_n(t)$, то, интегрируя по частям, придем к равенству

$$\int_0^T \left(\frac{\ddot{C}_n}{\varkappa_n^2} + C_n\right)\dot{\gamma}_n\, dt = 0.$$

Так как $\dot{\gamma}_n$ — произвольная функция, интеграл которой на $(0, T)$ равен нулю, то непрерывная функция $\ddot{C}_n + \varkappa_n^2 C_n$ должна быть постоянна, откуда следует, что

$$c_n(t) = a_n \cos \varkappa_n t + b_n \sin \varkappa_n t.$$

Таким образом, функция $y(x, t)$, описывающая движение струны, должна иметь вид

$$y(x, t) = \sum_n (a_n \cos \varkappa_n t + b_n \sin \varkappa_n t)\, u_n(x),$$

где коэффициенты подчинены условию, что ряды

$$\sum_n a_n^2 \quad \text{и} \quad \sum_n b_n^2$$

сходятся; в самом деле,

$$\sum_n a_n^2 = \sum_n c_n^2(0) = \|y(x, 0)\|_D^2, \qquad \sum_n b_n^2 = \sum_n \frac{\dot{c}_n^2(0)}{\varkappa_n^2} = \|\dot{y}(x, 0)\|_H^2.$$

Это условие и достаточно, т. е. если оно выполнено, то уравнение (27) удовлетворяется, какова бы ни была допустимая функция $\eta(x, t)$, подчиненная условиям (28). Применяя разложения

$$\eta(x, t) = \sum_k \gamma_k(t)\, u_k(x), \qquad \dot{\eta}(x, t) = \sum_k \delta_k(t)\, \varphi_k(x),$$

где

$$\delta_k = \frac{\dot{\gamma}_k}{\varkappa_k}, \quad \gamma_k(0) = \gamma_k(T) = 0,$$

мы сможем придать уравнению (27) вид

$$\int_0^T dt \sum_k \left[\frac{\dot{c}_k \dot{\gamma}_k}{\varkappa_k^2} - c_k \gamma_k\right] = 0,$$

где

$$c_k(t) = a_k \cos \varkappa_k t + b_k \sin \varkappa_k t.$$

Каждый из таких членов в отдельности имеет интеграл, равный нулю; поэтому остается только доказать, что составленный из них ряд можно интегрировать почленно. А это следует из того факта, что частичные суммы этого ряда мажорируются выражением

$$\left\{\sum_k (a_k^2 + b_k^2) \sum_k \frac{\dot{\gamma}_k^2}{\varkappa_k^2}\right\}^{1/2} + \left\{\sum_k (a_k^2 + b_k^2) \sum_k \gamma_k^2\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\sum_k (a_k^2 + b_k^2)\right\}^{1/2} (\|\dot{\eta}\|_H + \|\eta\|_D),$$

являющимся ограниченной функцией от t.

Итак, мы получили следующий результат:

Теорема. *Возможные движения струны описываются функциями, допускающими представление в виде*

$$y(x, t) = \sum (a_k \cos \varkappa_k t + b_k \sin \varkappa_k t)\, u_k(x), \tag{*}$$

где коэффициенты подчинены единственному условию, состоящему в том, что ряд $\sum_k (a_k^2 + b_k^2)$ сходится. При выполнении этого условия ряд (*) сходится в смысле метрики пространства D, а следовательно, абсолютно и равномерно.

Если заданы какие-нибудь две функции

$$f(x) = \sum_k a_k u_k(x), \quad g(x) = \sum_k b_k \varphi_k(x),$$

принадлежащие соответственно пространствам D и H, то существует движение $y(x, t)$, удовлетворяющее *начальным условиям*

$$y(x, 0) = f(x), \quad \dot{y}(x, 0) = g(x);$$

таковым служит функция (*) с коэффициентами a_k и b_k, заимствованными из разложений функций $f(x)$ и $g(x)$.

Таким образом, движение струны составляется из чисто гармонических колебаний $(a_k \cos \varkappa_k t + b_k \sin \varkappa_k t)\, u_k(x)$, называемых *собственными колебаниями*.

Оператор A в пространстве D, связанный с билинейной формой $(u, v)_H$ соотношением $(u, v)_H = (Au, v)_L$, легко может быть записан в явном виде:

$$Au(x) = -\int_0^x dz\left[\int_0^z u(s)\,dm(s) - \int_0^1 dt\int_0^t u(r)\,dm(r)\right].$$

Функции $u_k(x)$ представляют собой собственные функции оператора A:

$$Au_k(x) = \frac{1}{\varkappa_k^2}u_k(x).$$

Последнему уравнению можно, очевидно, придать дифференциальную форму

$$du_k'(x) + \varkappa_k^2 u_k(x)\,dm(x) = 0;$$

если же функция распределения массы $m(x)$ имеет плотность $\rho(x)$, интегралом которой она является, то это уравнение можно записать еще проще в виде

$$u_k''(x) + \varkappa_k^2\rho(x)\,u_k(x) = 0.$$

В частности, если $\rho(x) \equiv 1$, т. е. струна *однородна*, то получаем дифференциальное уравнение

$$u'' + \varkappa^2 u = 0.$$

С учетом краевых условий $u(0) = 0$, $u(1) = 0$ получаем

$$\varkappa_k = k\pi \quad \text{и} \quad \varphi_k(x) = \varkappa_k u_k(x) = \sqrt{2}\sin k\pi x \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Можно показать, что и в общем случае все собственные значения $\mu_k = \frac{1}{\varkappa_k^2}$ *простые*, т. е. собственные колебания, соответствующие заданной „собственной частоте“, все имеют одинаковую „форму“ $u_k(x)$ и могут отличаться только фазами и амплитудами. Кроме того, число нулей функции $u_k(x)$ внутри интервала $(0, 1)$ равно $n-1$, и между любыми двумя последовательными нулями функции $u_{n-1}(x)$ непременно находится нуль функции $u_n(x)$ *(осцилляционная теорема Штурма)*.

101. Пространство почти периодических функций. Одно из самых интересных применений теории вполне непрерывных симметричных операторов к задачам анализа относится к теории почти периодических функций.

Согласно первоначальному определению, принадлежащему Г. Бору, *непрерывная функция* $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ *называется почти периодической, если, каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *можно найти число* $l > 0$, *такое, что любой интервал оси* x *длины* l *содержит хотя бы одну точку* τ, *обладающую следующим свойством:*

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \quad \textit{для} \quad -\infty < x < \infty.$$

Позднее Бохнер дал эквивалентное определение: *непрерывная функция* $f(x)$ *почти периодична, если любая бесконечная последовательность функций* $\{f(x+\xi_n)\}$, *полученных из* $f(x)$ *путем сдвигов вдоль оси* x, *содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность.*

Введение в теорию почти периодических функций, включающее, между прочим, доказательство эквивалентности обоих определений, содержится в книге Фавара [1].

Изложение теории начинается со следующих теорем, более или менее просто доказываемых:

а) Всякая непрерывная почти периодическая функция ограничена и равномерно непрерывна на всей оси x.

б) Всякая периодическая непрерывная функция почти периодична.

в) Суммы и произведения почти периодических функций, а также пределы равномерно сходящихся последовательностей почти периодических функций представляют собой почти периодические функции.

г) Для любой непрерывной почти периодической функции $f(x)$ интегральные средние

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x+t)\,dt$$

при $T \to \infty$ стремятся равномерно относительно x к определенному пределу, не зависящему от x; этот предел, который принято обозначать

$$\underset{t}{M}\{f(t)\},$$

является линейным функционалом, заданным на почти периодических функциях. В частности, $\underset{t}{M}\{1\}=1$. Этот функционал принимает одинаковые значения на всех функциях вида $f(a \pm t)$, где a — какая угодно постоянная. Если $f(t)$ действительна, неотрицательна и не равна нулю тождественно, то $\underset{t}{M}\{f(t)\}>0$.

д) Если f и g — почти периодические функции, то их свертка

$$f \times g = \underset{t}{M}\{f(x-t)\,g(t)\}$$

также почти периодична; при этом

$$f \times g = g \times f, \quad f \times (g \times h) = (f \times g) \times h.$$

Совокупность непрерывных почти периодических функций обозначим $\mathfrak{P}$. Если положить

$$(f, g) = \underset{t}{M}\{f(t)\,\overline{g(t)}\} \quad \text{и} \quad \|f\| = (f, f)^{1/2},$$

то при таких определениях скалярного произведения и нормы $\mathfrak{P}$ становится неполным гильбертовым пространством. Его можно было бы пополнить путем присоединения идеальных элементов, но так как эти последние не выражаются в виде функций, то мы предпочтем иметь дело с неполным пространством.

Размерность пространства $\mathfrak{P}$ равна мощности континуума. В самом деле, она не может быть выше мощности континуума, так как множество всех непрерывных функций имеет мощность континуума. С другой стороны, $\mathfrak{P}$ содержит ортонормированную систему, имеющую мощность континуума, систему, образованную функциями

$$e_\nu(x) = e^{i\nu x},$$

где ν пробегает всевозможные действительные значения; в самом деле, такая система ортонормирована, так как

$$\|e_\nu\|^2 = \underset{t}{M}\{|e_\nu|^2\} = \underset{t}{M}\{1\} = 1,$$

$$(e_\nu, e_\mu) = \underset{t}{M}\{e^{i(\nu-\mu)t}\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{e^{i(\nu-\mu)T} - e^{-i(\nu-\mu)T}}{i(\nu-\mu)} = 0 \quad \text{при} \quad \nu \neq \mu.$$

Непрерывной почти периодической функции $f(x)$ соответствуют „обобщенные коэффициенты Фурье“

$$c_\nu = (f, e_\nu).$$

Каковы бы ни были действительные числа μ_k $(k = 1, 2, \ldots, r)$, выполняется неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{r} |c_{\mu_k}| \leqslant \|f\|^2,$$

откуда вытекает, что множество значений ν, для которых $|c_\nu| \geqslant p$, где p — произвольное фиксированное положительное число, не превосходит $\frac{1}{p^2}\|f\|^2$. Следовательно, $c_\nu = 0$ для всех ν, за исключением конечного или счетного множества значений $\nu_1, \nu_2, \ldots$. Ряд

$$\sum_k c_{\nu_k} e_{\nu_k}(x)$$

называется „обобщенным рядом Фурье“ функции $f(x)$.

Основной вопрос теории состоит в том, определяет ли такой ряд, в свою очередь, функцию $f(x)$. Ответ на этот вопрос утвердительный.

Теорема. *Обобщенный ряд Фурье непрерывной почти периодической функции $f(x)$ сходится к этой функции в смысле метрики пространства $\mathfrak{P}$.*

В силу „тождества Бесселя“

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_{\nu_k} e_{\nu_k} \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_{\nu_k}|^2,$$

для доказательства достаточно установить „формулу Парсеваля":

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_{\nu_k}|^2. \tag{33}$$

Существуют несколько способов доказательства этой основной теоремы, принадлежащей Бору. Мы воспользуемся здесь способом, найденным Г. Вейлем и опирающимся на теорию вполне непрерывных симметричных операторов; окончательное оформление этого доказательства принадлежит Реллиху [1]).

102. Доказательство основиой теоремы о почти периодических функциях. Введем следующее обозначение:

$$f^*(x) = \overline{f(-x)}.$$

Ясно, что одновременно с $f(x)$ функция $f^*(x)$ иепрерывна и почти периодична. При этом

$$(f^*)^* = f, \quad (f \times g)^* = g^* \times f^*, \quad f \times g^*(0) = (f, g)$$

и

$$(f^*, g^*) = \overline{(f, g)}. \tag{34}$$

Условимся называть функцию $f(x)$ *симметричной*, если $f = f^*$. Симметричны, в частности, функции $e_\nu(x) = e^{i\nu x}$. Скалярное произведение двух симметричных элементов пространства $\mathfrak{P}$ имеет, в силу (34), действительное значение. Любой элемент $f(x)$ пространства $\mathfrak{P}$ допускает представление вида $f = f_1 + if_2$, где f_1 и f_2 симметричны; для этого достаточно положить

$$f_1 = \frac{1}{2}(f + f^*), \quad f_2 = \frac{1}{2i}(f - f^*).$$

Приняв во внимание, что скаляриые произведеиия (f_1, f_2), (f_1, e_ν) и (f_2, e_ν) действительны, можно без труда доказать равеиства

$$\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 \quad \text{и} \quad |(f, e_\nu)|^2 = |(f_1, e_\nu)|^2 + |(f_2, e_\nu)|^2.$$

Отсюда вытекает, что *соотношение* (33) *достаточно доказать для симметричных функций.*

Пусть $a(x)$ — какая-нибудь симметричная непрерывная почти периодическая функция. Положив

$$Ah = a \times h,$$

мы получим некоторый оператор A, отображающий простраиство $\mathfrak{P}$ само в себя. Этот оператор, очевидно, аддитивеи и одиороден; кроме того, он *ограничен*, так как

$$|Ah(x)|^2 = |\underset{t}{M}\{a(x-t)h(t)\}|^2 \leqslant \underset{t}{M}\{|a(x-t)|^2\}\underset{t}{M}\{|h(t)|^2\},$$

[1]) См. Г. Вейль [5]; Винтнер [1]; Реллих [1].

следовательно,

$$|Ah(x)| \leqslant \|a\| \|h\| \tag{35}$$

и тем более

$$\|Ah\| \leqslant \|a\| \|h\|.$$

Оператор A *симметричен*:

$$(Ag, h) = (a \times g) \times h^* (0) = h^* \times (a \times g)(0) = (h^* \times a) \times g(0) =$$
$$= (a \times h^*) \times g(0) = g \times (a \times h)^* (0) = (g, Ah).$$

Наконец, A *вполне непрерывен*. В самом деле, мы покажем, что из всякого бесконечного ограниченного множества $\{h\}$ ($\|h\| \leqslant C$) элементов пространства $\mathfrak{P}$ можно извлечь такую последовательность $\{h_n\}$, для которой $\{Ah_n\}$ равномерно сходится; предел этой последней является непрерывной почти периодической функцией, т. е. элементом пространства $\mathfrak{P}$. К этому элементу последовательность $\{Ah_n\}$ будет сходиться и в смысле метрики пространства $\mathfrak{P}$.

Положим $a_m(x) = a(x - r_m)$, где $\{r_m\}$ — какая-нибудь последовательность действительных чисел, всюду плотная на числовой оси. Из множества $\{h\}$ выделим с помощью диагонального метода последовательность $\{h_n\}$, такую, что $\{(h_n, a_m)\}$ сходится, когда n стремится к ∞, при любом m. Покажем теперь, что последовательность $\{Ah_n\}$ сходится равномерно на всей оси x.

Допустим противное; тогда существуют число $\varepsilon_0 > 0$, две последовательиости целых чисел $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$, стремящиеся к ∞, и последовательность действительиых чисел $\{x_k\}$, такие, что для $k = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$|Ah_{n_k}(x_k) - Ah_{m_k}(x_k)| > \varepsilon_0,$$

т. е.

$$|\underset{t}{M} \{a(x_k - t)[h_{n_k}(t) - h_{m_k}(t)]\}| > \varepsilon_0. \tag{36}$$

Так как функция $a(x)$ равномерно непрерывна, то мы вправе предположить, что x_k принадлежат последовательности $\{r_m\}$. Согласно второму определению почти периодической функции, последовательность $\{a_{x_k}(x)\}$ содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность; мы можем предположить, что сама $\{a_{x_k}(x)\}$ равномерно сходится. Выберем номер j так, чтобы для $k \geqslant j$ выполнялось неравенство

$$|a_{x_k}(x) - a_{x_j}(x)| < \frac{\varepsilon_0}{4C};$$

фиксировав такое j, выберем N так, чтобы неравенство

$$|(h_n - h_{n'}, a_{x_j})| < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

было справедливо при $n, n' \geqslant N$. Тогда при $k \geqslant j$ и $n_k, m_k \geqslant N$

будем иметь

$$|(h_{n_k}-h_{m_k},\ a_{x_k})|\leqslant|(h_{n_k},\ a_{x_k}-a_{x_j})|+|(h_{n_k}-h_{m_k},\ a_{x_j})|+$$
$$+|(h_{m_k},\ a_{x_j}-a_{x_k})|\leqslant C\frac{\varepsilon_0}{4C}+\frac{\varepsilon_0}{2}+C\frac{\varepsilon_0}{4C}=\varepsilon_0,$$

что противоречит (36). Наше утверждение доказано.

Итак, A представляет собой вполне непрерывный симметричный линейный оператор. Следовательно, согласно п. 93, существует ортонормированная последовательность $\{\varphi_k\}$ собственных элементов оператора A, соответствующих собственным значениям μ_k; при этом, каков бы ни был элемент g пространства $\mathfrak{P}$,

$$Ag=\sum_k \mu_k(g,\ \varphi_k)\varphi_k \tag{37}$$

в смысле метрики $\mathfrak{P}$.

В силу неравенства (35),

$$\left|\sum_{k=m}^{n}\mu_k(g,\ \varphi_k)\varphi_k(x)\right|=\left|A\sum_{k=m}^{n}(g,\ \varphi_k)\varphi_k(x)\right|\leqslant\|a\|\left\|\sum_{k=m}^{n}(g,\ \varphi_k)\varphi_k\right\|=$$
$$=\|a\|\left(\sum_{k=m}^{n}|(g,\ \varphi_k)|^2\right)^{1/2}\longrightarrow 0$$

при $m,\ n\longrightarrow\infty$. Следовательно, ряд (37) сходится равномерно, и его сумма „в среднем“ $Ag(x)$ совпадает с суммой в обычном смысле.

Положив в (37) $g=a$ и $x=0$, получим

$$Aa(0)=\sum_k \mu_k(a,\ \varphi_k)\varphi_k(0),$$

а так как

$$Aa(0)=a\times a(0)=(a,\ a)=\|a\|^2$$

и

$$\mu_k\varphi_k(0)=a\times\varphi_k(0)=\varphi_k\times a(0)=(\varphi_k,\ a),$$

то

$$\|a\|^2=\sum_k|(a,\ \varphi_k)|^2. \tag{38}$$

Теперь нам остается показать, что функции $\varphi_k(x)$ имеют вид $e^{i\nu x}$ или, по крайней мере, их можно заменить функциями такого вида. Действительно, в выборе системы $\{\varphi_k\}$ мы располагаем известной свободой: собственному значению μ кратности $p\ (p\geqslant 1)$ мы можем поставить в соответствие p произвольных собственных функций, образующих ортонормированную систему в p-мерном собственном подпространстве E_μ, соответствующем μ. Выберем эти функции следующим образом.

Заметим сначала, что одновременно с $\varphi(x)$ пространству E_μ принадлежат и $\varphi(x+\xi)$; в самом деле,

$$A[\varphi(x+\xi)]=\underset{t}{M}\{a(x-t)\varphi(t+\xi)\}=\underset{\tau}{M}\{a(x+\xi-\tau)\varphi(\tau)\}=$$
$$=(A\varphi)(x+\xi)=\mu\varphi(x+\xi).$$

Итак, всякому действительному ξ отвечает оператор

$$U_\xi \varphi(x) = \varphi(x+\xi),$$

преобразующий пространство E_μ само в себя; оператор U_ξ — линейный и обладает следующими свойствами:

$$U_0 = I, \quad U_\xi U_\eta = U_{\xi+\eta}, \tag{39}$$

$$U_\xi \varphi \longrightarrow U_\eta \varphi \quad \text{при} \quad \xi \longrightarrow \eta, \tag{40}$$

$$(U_\xi \varphi, U_\xi \psi) = (\varphi, \psi). \tag{41}$$

Согласно теореме об изометричных операторах в конечномерном пространстве, которая будет доказана в следующем пункте, можно указать такую ортонормированную систему $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ $\ldots, \psi_p(x)$ в пространстве E_μ и такую систему действительных чисел $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$, что

$$U_\xi[\psi_k(x)] = e^{i\omega_k \xi}\psi_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

В частности,

$$\psi_k(\xi) = (U_\xi \psi_k)(0) = e^{i\omega_k \xi}\psi_k(0),$$

т. е.

$$\psi_k(\xi) = a_k e^{i\omega_k \xi}.$$

Так как ψ_k образуют ортонормированную систему, то все ω_k различны и $|a_k| = 1$. Следовательно, функции $\psi_k(x)$ могут быть заменены функциями $e_{\omega_k}(x)$, также образующими ортонормированную систему в пространстве E_μ.

Итак, мы можем предположить, что система собственных элементов $\{\varphi_k\}$ оператора A имеет вид $\{e_{\nu_k}\}$, где все „частоты" $\nu_1, \nu_2, \ldots$ различны. При этом, в силу (38),

$$\|a\|^2 = \sum_k |c_{\nu_k}|^2,$$

что завершает доказательство.

103. Изометричные операторы в конечномерном пространстве. Здесь мы дадим доказательство вспомогательной теоремы, которой только что воспользовались, относительно удовлетворяющего условиям (39)—(41) семейства операторов $\{U_\xi\}$ $(-\infty < \xi < \infty)$ в p-мерном комплексном пространстве E.

Условие (41) означает, что оператор U_ξ не изменяет скалярных произведений и что, следовательно, он *изометричен*. Это условие может быть, очевидно, записано в виде $U_\xi^* U_\xi = I$. Поэтому

$$U_\xi^* = U_\xi^{-1};$$

само существование оператора, обратного для U_ξ, обеспечено условием (39). Операторы, для которых справедливо последнее равенство, носят название *унитарных*. Очевидно, что всякий изометричный оператор в конечномерном пространстве имеет обратный и, следовательно, представляет собой унитарный оператор.

Из условия (39) вытекает также, что все операторы, принадлежащие семейству $\{U_\xi\}$, перестановочны между собой:

$$U_\xi U_\eta = U_\eta U_\xi.$$

Справедлива следующая

Теорема. *Семейство перестановочных между собой унитарных операторов $\{U\}$ в конечномерном комплексном пространстве всегда имеет полную ортонормированную систему собственных элементов, общих для всех операторов заданного семейства.*

В случае, когда число измерений пространства $p=1$, теорема очевидна. Теперь предположим, что теорема верна для пространств, число измерений которых меньше p. Оставляя в стороне тривиальный случай, когда все операторы, входящие в семейство $\{U\}$, отличаются от тождественного оператора I только постоянными числовыми множителями, рассмотрим один из заданных операторов U_0, который не может быть представлен как I с числовым множителем. Пусть ρ — одно из собственных значений оператора U_0 и E_ρ — соответствующее собственное подпространство. В силу предположения, высказанного относительно U_0, размерность E_ρ меньше p.

Все операторы U, принадлежащие заданному семейству $\{U\}$, преобразуют подпространство E_ρ само в себя; в самом деле,

$$U_0(U\varphi)=UU_0\varphi=U(\rho\varphi)=\rho(U\varphi).$$

Так как U — изометричный оператор, то он не может преобразовать какое-либо подпространство в истинную его часть; следовательно, образ подпространства E_ρ совпадает с E_ρ.

Пусть ψ — произвольный элемент, ортогональный E_ρ. Опять-таки в силу того, что U изометричен, элемент $U\psi$ ортогонален подпространству $UE_\rho=E_\rho$. Таким образом, ортогональное дополнение F_ρ подпространства E_ρ преобразуется оператором U само в себя.

Размерность подпространств E_ρ и F_ρ меньше p, поэтому, согласно предположению, теорема справедлива в каждом из них, а следовательно, и во всем пространстве E; теорема доказана.

Вернемся к семейству операторов $\{U_\xi\}$; пусть $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$ — полная ортонормированная система их общих собственных векторов. Тогда

$$U_\xi\psi_k=\rho_k(\xi)\psi_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ p);$$

в силу условий (39)—(41),

$$\rho_k(0)=1,\ \rho_k(\xi)\rho_k(\eta)=\rho_k(\xi+\eta),\ \rho_k(\xi)\to\rho_k(\eta)\ \text{при}\ \xi\to\eta$$

и

$$|\rho_k(\xi)|=1.$$

Но известно, что из комплексных функций только функции $e^{i\omega\xi}$ обладают такими свойствами. Следовательно,

$$\rho_k(\xi)=e^{i\omega_k\xi} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ p),$$

что и требовалось доказать.