Глава VII

ОГРАНИЧЕННЫЕ СИММЕТРИЧНЫЕ, УНИТАРНЫЕ И НОРМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. СИММЕТРИЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

104. Некоторые основные свойства. *Симметричные* операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ были определены в п. 92 и там же были установлены их простейшие свойства, но после этого мы сразу же перешли к рассмотрению вполне непрерывных симметричных операторов и получили для них разложения в ряды по собственным элементам. Возникает вопрос, нельзя ли получить аналогичные разложения для произвольных симметричных операторов. Эта задача была решена Гильбертом: для таких операторов было получено так называемое *спектральное разложение*. В настоящее время мы располагаем несколькими методами решения этой задачи; из них два будут рассмотрены здесь (п. 107 и 108).

В этом пункте будут устаиовлены некоторые основиые свойства симметричных операторов, которыми мы будем постоянно пользоваться в дальнейшем.

Сначала заметим, что линейные комбинации и пределы (равномерные, сильные и даже слабые) симметричных операторов являются симметричными операторами; что же касается произведения симметричных операторов, то оно симметрично только тогда, когда множители перестановочны.

Целесообразно ввести специальное обозначение: условимся писать

$$T \smile S,$$

если операторы T и S *перестановочны*, т. е. $TS = ST$. Далее, если $\{S\}$ — какое-нибудь семейство операторов, то мы пишем

$$T \smile \{S\},$$

если оператор T перестановочен с любым оператором S, принадлежащим этому семейству $\{S\}$.

Между симметричными операторами определяется *отношение порядка*: мы пишем

$$A \geqslant B \quad \text{или} \quad B \leqslant A,$$

если

$$(Af, f) \geqslant (Bf, f)$$

для любого элемента f пространства $\mathfrak{H}$.

Линейный оператор A, обладающий тем свойством, что $(Af, f) \geqslant \geqslant 0$, называется *положительным* (это понятие было уже введено в п. 95). Всякий положительный оператор в *комплексном* гильбертовом пространстве симметричен; в самом деле, мы видели в п. 92, что всякий линейный оператор A, для которого квадратичная форма (Af, f) принимает только действительные значения, симметричен.

Каковы бы ни были положительный симметричный оператор A и элементы f и g, выполняется *обобщенное неравенство Шварца*:

$$|(Af, g)|^2 \leqslant (Af, f)(Ag, g); \tag{1}$$

доказывается оно так же, как и неравенство Шварца в собственном смысле слова (см. п. 83); основывается доказательство на том, что

$$0 \leqslant (Ah_\lambda, h_\lambda) = (Af, f) + 2\lambda |(Af, g)|^2 + \lambda^2 |(Af, g)|^2 (Ag, g),$$

где $h_\lambda = f + \lambda (Af, g) g$ и λ — любое действительное число.

Нижняя и *верхняя грани* симметричного оператора A определяются соответственно как наибольшее из чисел m и наименьшее из чисел M, для которых выполняются неравенства

$$m(f, f) \leqslant (Af, f) \leqslant M(f, f),$$

т. е. неравенства

$$mI \leqslant A \leqslant MI,$$

где I — тождественный оператор. Иначе говоря, m служит нижней гранью, а M — верхней гранью значений квадратичной формы (Af, f), когда f подчинено условию $\|f\| = 1$. При этом условии верхняя грань $|(Af, f)|$ равна норме оператора A (см. п. 92), следовательно,

$$\|A\| = \max\{|m|, |M|\}.$$

Отсюда, в частности, следует, что *соотношения $A \geqslant B$ и $A \leqslant B$ могут выполняться одновременно только тогда, когда $A = B$*. В самом деле, если они оба выполняются, то для оператора $C = A - B$ будем иметь: $(Cf, f) \equiv 0$, откуда $m_C = M_C = 0$, $\|C\| = \max\{|m_C|, |M_C|\} = 0$, $C = 0$.

Введенное выше отношение порядка, очевидно, *транзитивно*. Кроме того, если $A \geqslant B$, то

$$A + C \geqslant B + C \quad \text{и} \quad cA \geqslant cB$$

для любого симметричного оператора C и для любого числа $c > 0$.

Мы обнаруживаем некоторое сходство между отношениями порядка в области симметричных операторов и в области действительных чисел. Между тем и другим есть, однако, существенное различие: два действительных числа всегда сравнимы, тогда как существуют пары симметричных операторов, ни один из которых не превосходит другого в указанном смысле. Таким образом, множество симметричных операторов лишь *частично упорядочено*.

Впрочем, для симметричных операторов справедлив следующий аналог теоремы о монотонных ограниченных последовательностях действительных чисел:

Теорема[1]). *Всякая монотонная ограниченная последовательность симметричных операторов A_n сходится (в сильном смысле) к некоторому симметричному оператору A.*

Достаточно, очевидно, рассмотреть случай, когда

$$O \leqslant A_1 \leqslant A_2 \leqslant \ldots \leqslant I.$$

При $m < n$ имеем $A_{mn} = A_n - A_m \geqslant O$; воспользовавшись обобщенным неравенством Шварца (1), получим для любого f

$$\|A_{mn}f\|^4 = (A_{mn}f, A_{mn}f)^2 \leqslant (A_{mn}f, f)(A_{mn}^2 f, A_{mn}f).$$

Так как

$$O \leqslant A_{mn} \leqslant I$$

и, следовательно,

$$\|A_{mn}\| \leqslant 1,$$

то

$$\|A_n f - A_m f\|^4 \leqslant [(A_n f, f) - (A_m f, f)] \|f\|^2.$$

Таким образом, числовая последовательность $\{(A_n f, f)\}$ ограничена и не убывает, следовательно, она сходится; в силу последнего неравенства, последовательность элементов $A_n f$ также сходится. Оператор A, определенный равенством $Af = \lim A_n f$, очевидно, симметричен, и наша теорема доказана.

Квадрат симметричного оператора всегда является положительным оператором, так как

$$(A^2 f, f) = (Af, Af) \geqslant 0.$$

Возьмем теперь произвольный положительный симметричный оператор A и попробуем извлечь из него *квадратный корень*, т. е. найти такой симметричный оператор X, для которого $X^2 = A$.

Можно, очевидно, предположить, что $A \leqslant I$. Положив $A = I - B$ ($O \leqslant B \leqslant I$) и $X = I - Y$, мы сведем задачу к уравнению

$$Y = \frac{1}{2}(B + Y^2), \tag{2}$$

которое попытаемся решить методом последовательных приближений. Положив

$$Y_0 = 0, \quad Y_1 = \frac{1}{2} B$$

и

$$Y_{n+1} = \frac{1}{2}(B + Y_n^2) \quad (n \geqslant 0), \tag{3}$$

[1]) В книге С.-Надя [1] эта теорема доказана при дополнительном предположении, что операторы A_n перестановочны. В своей общей формулировке теорема принадлежит Вижье [1].

покажем теперь, что последовательность $\{Y_n\}$ сходится и предел ее служит решением уравнения (2).

Прежде всего покажем, что Y_n представляет собой многочлен относительно B с неотрицательными действительными коэффициентами; такой же вид имеет и оператор $Y_n - Y_{n-1}$. Эти предложения, очевидно, верны для $n=1$, и, коль скоро они справедливы для n, оправдываются и для $n+1$; это вытекает из формул (3), а также из соотношений[1])

$$Y_{n+1} - Y_n = \frac{1}{2}(B+Y_n^2) - \frac{1}{2}(B+Y_{n-1}^2) = \frac{1}{2}(Y_n^2 - Y_{n-1}^2) =$$
$$= \frac{1}{2}(Y_n + Y_{n-1})(Y_n - Y_{n-1}).$$

Если $B \geqslant O$, то $B^n \geqslant O$ для $n=2, 3, \dots$ [2]), поэтому $Y_n \geqslant O$ и $Y_n - Y_{n-1} \geqslant O$. Наконец, $\|Y_n\| \leqslant 1$ при всех n; это верно для $n=0$ и от n к $n+1$ доказывается с помощью равенств (3).

Применив теперь только что доказанную теорему о монотонных ограниченных последовательностях симметричных операторов, мы убедимся в том, что последовательность $\{Y_n\}$ сходится и ее предел удовлетворяет уравнению (2); последнее утверждение получается предельным переходом из (3).

Мы построили, таким образом, решение уравнения (2); это решение симметрично, положительно и, кроме того, является пределом некоторой последовательности многочленов относительно A.

Докажем теперь *единственность* „положительного квадратного корня". Пусть X' — положительный симметричный оператор, такой, что $X'^2 = A$; покажем, что $X' = X$. Действительно, так как

$$X'A = AX' = X'^3,$$

то X' перестановочен со всеми многочленами от A, а также с пределами таких многочленов и, в частности, с X. Рассмотрим положительные квадратные корни Z и Z' соответственно из X и из X', построенные так, как только что был построен корень из A. Возьмем произвольный элемент f пространства $\mathfrak{H}$ и положим $g = (X - X')f$; тогда будем иметь

$$\|Zg\|^2 + \|Z'g\|^2 = (Z^2g, g) + (Z'^2g, g) = (Xg, g) + (X'g, g) =$$
$$= ((X+X')(X-X')f, g) = ((X^2 - X'^2)f, g) = ((A-A)f, g) = 0,$$

откуда вытекает, что $Zg = Z'g = 0$ и, следовательно, $Xg = ZZg = 0$ и $X'g = Z'Z'g = 0$. Отсюда получаем, что

$$\|(X-X')f\|^2 = ((X-X')^2f, f) = ((X-X')g, f) = 0,$$

т. е. $(X-X')f = 0$. Так как это справедливо для любого f, то $X' = X$.

---

[1]) Оператор Y_n, будучи многочленом относительно B, перестановочен с Y_m.

[2]) В самом деле, $(B^{2m}f, f) = \|B^m f\|^2 \geqslant 0$ и $(B^{2m+1}f, f) = (BB^m f, B^m f) \geqslant 0$.

Таким образом, доказана

Теорема[1]). *Каждому положительному симметричному оператору A соответствует единственный положительный симметричный квадратный корень, который обозначается $A^{1/2}$. Он представляет собой предел (в сильном смысле) некоторой последовательности многочленов от A и, в силу этого, перестановочен со всеми операторами, перестановочными с A.*

Отметим одно из приложений этой теоремы. Пусть A и B — перестановочные положительные симметричные операторы. При этом A перестановочен также с $B^{1/2}$ и, следовательно, каков бы ни был элемент f,

$$(ABf, f) = (AB^{1/2}B^{1/2}f, f) = (B^{1/2}AB^{1/2}f, f) = (AB^{1/2}f, B^{1/2}f) \geqslant 0.$$

Таким образом, доказано следующее предложение:

Произведение двух перестановочных положительных симметричных операторов представляет собой положительный симметричный оператор.

Отсюда вытекает более общая теорема[2]):

Неравенство $A \geqslant B$ сохранится, если обе его части умножить на один и тот же положительный симметричный оператор C, перестановочный с A и B:

$$AC = CA \geqslant CB = BC.$$

Рассмотрим теперь задачу *обращения* симметричного оператора A. Если оператор A^{-1} существует, то он также симметричен, так как

$$(A^{-1}f, g) = (A^{-1}f, AA^{-1}g) = (AA^{-1}f, A^{-1}g) = (f, A^{-1}g).$$

A^{-1} существует, в частности, тогда, когда $\|I - A\| < 1$, и в этом случае он представляется рядом Неймана

$$A^{-1} = [I - (I - A)]^{-1} = I + (I - A) + (I - A)^2 + \ldots,$$

сходящимся по норме. Такое представление справедливо и для несимметричных операторов. Если оператор A симметричен, то условие $\|I - A\| < 1$ эквивалентно следующему:

$$0 < m \leqslant M < 2, \tag{4}$$

где m и M — нижняя и верхняя грани оператора A.

Если $m > 0$, то можно подобрать такое положительное число c, что нижняя и верхняя грани m' и M' оператора $A' = cA$ будут удовлетворять условию (4); для этого достаточно положить $c <$

---

[1]) Приведенное в тексте построение квадратного корня принадлежит Виссеру [1]; единственность доказана так, как в статье С.-Надя [4]. Другое построение осуществлено Веккеном [1].

[2]) Другое доказательство было дано Риссом [14].

$<\frac{2}{M}$. *При этом будет справедливо разложение*[1])

$$A^{-1}=(c^{-1}A')^{-1}=c(A')^{-1}=cI+c(I-cA)+c(I-cA)^2+\ldots. \qquad (5)$$

Так как члены этого ряда являются положительными операторами, то оператор A^{-1} также положителен. Умножив неравенство

$$mI\leqslant A\leqslant MI$$

на A^{-1}, получим

$$mA^{-1}\leqslant I\leqslant MA^{-1},$$

откуда следует, что

$$M^{-1}I\leqslant A^{-1}\leqslant m^{-1}I.$$

Применим полученные результаты к задаче обращения линейного *несимметричного* оператора T. Допустим, что операторы T^*T и TT^* (очевидно, симметричные) имеют положительные нижние грани. Тогда существуют обратные операторы $(T^*T)^{-1}$ и $(TT^*)^{-1}$ и, в силу равенств

$$(T^*T)^{-1}T^*T=I, \qquad TT^*(TT^*)^{-1}=I,$$

оператор T имеет левый обратный $(T^*T)^{-1}T^*$ и правый обратный $T^*(TT^*)^{-1}$, которые непременно совпадают (см. п. 67); итак,

$$T^{-1}=(T^*T)^{-1}T^*=T^*(TT^*)^{-1}.$$

Условие, что нижние грани операторов T^*T и TT^* положительны, также *необходимо* для существования T^{-1}. В самом деле, если нижняя грань оператора T^*T равна нулю, то существует последовательность $\{f_n\}$, такая, что

$$\|f_n\|=1 \text{ и } \|Tf_n\|^2=(Tf_n, Tf_n)=(T^*Tf_n, f_n)\rightarrow 0.$$

Если бы оператор T^{-1} существовал, то выполнялось бы соотношение

$$\|f_n\|=\|T^{-1}Tf_n\|\leqslant\|T^{-1}\|\|Tf_n\|\rightarrow 0,$$

противоречащее условию $\|f_n\|=1$. Следовательно, T не имеет обратного. Точно так же, если нижняя грань оператора TT^* равна нулю, то для T^* не существует обратного; поэтому и T обратного не имеет.

Мы получили, таким образом, следующий результат:

Теорема. *Для того чтобы линейный оператор T в гильбертовом пространстве имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы нижние грани симметричных операторов T^*T и TT^* были положительны.*

105. Проекционные операторы. Простейший класс симметричных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ образуют так называемые проекционные операторы.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — два подпространства гильбертова пространства, служащие ортогональными дополнениями один другого, т. е.

$$\mathfrak{N}=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{M}, \qquad \mathfrak{M}=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{N}.$$

Тогда любой элемент f пространства $\mathfrak{H}$ может быть представлен, притом единственным образом, в виде суммы $f=g+h$, где g принадлежит $\mathfrak{M}$, а h принадлежит $\mathfrak{N}$. Оператор P, определенный равенством $Pf=g$, очевидно, линеен, и $P^2=P$. P называется

[1]) См. Хильб [1].

проекционным оператором; мы говорим о нем, что он проектирует $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{M}$. Оператор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{M}$, есть $I-P$.

Оператор P *симметричен.* В самом деле, если $f=g+h$ и $f'=g'+h'$, где f и f' принадлежат подпространствам $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, то $(g, h')=0$ и $(h, g')=0$, следовательно,

$$(Pf, f')=(g, f')=(g, f')-(g, h')=(g, g')=(g, g')+(h, g')= \\ =(f, g')=(f, Pf').$$

Обратно, *всякий симметричный оператор P, обладающий тем свойством, что $P^2=P$, является проекционным оператором.* При этом подпространство $\mathfrak{M}$, на которое P проектирует пространство $\mathfrak{H}$, образовано элементами вида $h=Pf$ или, что то же самое, элементами h, для которых $(I-P)h=0$. В самом деле, произвольный элемент f из $\mathfrak{H}$ можно представить в виде $f=Pf+(f-Pf)$, где Pf принадлежит $\mathfrak{M}$, а $f-Pf$ ортогонально $\mathfrak{M}$:

$$(f-Pf, Pg)=(Pf-P^2f, g)=(0, g)=0,$$

каково бы ни было g.

Для всех f справедливо равенство $(Pf, f)=\|Pf\|^2$, которым часто приходится пользоваться. Действительно,

$$(Pf, f)=(P^2f, f)=(Pf, Pf)=\|Pf\|^2.$$

Отсюда, в частности, следует, что $O\leqslant P\leqslant I$; $P=O$ только в том случае, когда $\mathfrak{M}$ состоит из одного элемента 0, и $P=I$, когда $\mathfrak{M}$ совпадает с $\mathfrak{H}$.

Пусть P_1 и P_2 проектируют $\mathfrak{H}$ на подпространства $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. Нетрудно проверить справедливость следующих утверждений:

а) Если $P_1\smile P_2$, то P_1P_2 является проекционным оператором, проектирующим $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{M}_1\cap\mathfrak{M}_2$ — пересечение подпространств $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$.

б) Если $P_1P_2=O$, то $P_2P_1=(P_1P_2)^*=O^*=O$, и подпространства $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ ортогональны; в этом случае говорят, что операторы P_1 и P_2 *взаимно ортогональны.* При этом P_1+P_2 также является проекционным оператором, областью значений которого служит $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2$ [1]).

в) Если P_1 и P_2 перестановочны, хотя и не ортогональны, то $P_1+P_2-P_1P_2$ представляет собой проекционный оператор с областью значений $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2$, которая и в этом случае является подпространством $\mathfrak{H}$. В самом деле, P_1 и $(I-P_1)P_2$ — ортогональные друг другу проекционные операторы, поэтому их сумма — также проекционный оператор, область значений которого

[1]) Легко проверить, что векторная сумма двух взаимно ортогональных подпространств представляет собой *замкнутое* линейное множество, т. е. некоторое подпространство.

есть

$$\mathfrak{M}_1 + (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_1) \cap \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 \text{ [1]}.$$

г) Если $P_1P_2 = P_2$, то $P_2P_1 = (P_1P_2)^* = P_2^* = P_2$, откуда следует, что $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2$, т. е. $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}_1$. В этом случае $P_1 - P_2$ является проекционным оператором, проектирующим $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{M}_1 \ominus \mathfrak{M}_2$, состоящее из элементов подпространства $\mathfrak{M}_1$, ортогональных $\mathfrak{M}_2$.

Из $P_1P_2 = P_2$ следует, таким образом, что $P_1 - P_2 \geqslant O$, $P_1 \geqslant P_2$. Обратно, если $P_1 \geqslant P_2$, то $I - P_1 \leqslant I - P_2$ и, следовательно,

$$\|(I - P_1) P_2 f\|^2 = ((I - P_1) P_2 f, P_2 f) \leqslant ((I - P_2) P_2 f, P_2 f) = 0,$$

откуда вытекает, что $(I - P_1) P_2 = O$, $P_1P_2 = P_2$. Итак, *для проекционных операторов соотношения $P_1P_2 = P_2$ и $P_1 \geqslant P_2$ эквивалентны.*

Из теоремы об ограниченных монотонных последовательностях симметричных операторов (см. п. 104) следует, что *любая монотонная последовательность проекционных операторов сходится.* В частности, так как частичные суммы ряда попарно ортогональных проекционных операторов образуют возрастающую последовательность операторов, также являющихся проекционными, то такой ряд всегда сходится; сумма его является проекционным оператором, проектирующим $\mathfrak{H}$ на подпространство, порожденное совокупностью подпространств, соответствующих членам этого ряда.

По определению, последовательность подпространств *сходится,* если сходится (в сильном смысле) последовательность соответствующих проекционных операторов. Может случиться, что последовательность бесконечномерных подпространств сходится, в смысле этого определения, к некоторому конечномерному подпространству. Примером может служить последовательность подпространств $\{\mathfrak{M}_n\}$ координатного гильбертова пространства, где $\mathfrak{M}_n$ образовано векторами, первые n координат которых равны нулю. С другой стороны, последовательность конечномерных подпространств может сходиться к бесконечномерному подпространству; такова последовательность ортогональных дополнений подпространств $\mathfrak{M}_n$, описанных в только что приведенном примере.

Такого рода явления исключены в случае *равномерной сходимости* подпространств, которая определяется с помощью равномерной сходимости соответствующих проекционных операторов. Действительно, если последовательность подпространств $\{\mathfrak{M}_n\}$ сходится равномерно, то размерность этих подпространств по-

[1] Ясно, что левая часть этого равенства заключена в правой. Для того чтобы показать, что они совпадают, достаточно заметить, что если $f_1 \in \mathfrak{M}_1$, $f_2 \in \mathfrak{M}_2$, то $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$, где

$$g_1 = f_1 + P_1 f_2 \in \mathfrak{M}_1, \quad g_2 = f_2 - P_1 f_2 \in (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_1) \cap \mathfrak{M}_2.$$

стоянна, начиная с некоторого n. Это вытекает из следующего предложения:

Теорема[1]). *Если операторы P и Q, проектирующие $\mathfrak{H}$ соответственно на подпространства $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$, удовлетворяют условию*

$$\|P-Q\|<1,$$

то $\mathfrak{P}$ может быть отображено на $\mathfrak{Q}$ линейно и изометрично.

Из нашего предположения вытекает, что $\|P(Q-P)P\|<1$ и, следовательно, симметричный оператор

$$A=I+P(Q-P)P$$

имеет положительную нижнюю грань. Поэтому A^{-1} и $A^{-1/2}=(A^{-1})^{1/2}$ существуют и оба они симметричны и положительны. Рассмотрим операторы

$$U=QA^{-1/2}P \quad \text{и} \quad U^*=PA^{-1/2}Q.$$

Так как $P\smile A$, то $P\smile A^{-1/2}$; далее,

$$PQQP=PQP=P+P(Q-P)P=PA$$

и поэтому

$$U^*U=PA^{-1/2}QQA^{-1/2}P=A^{-1/2}PAA^{-1/2}=PA^{-1/2}AA^{-1/2}=P.$$

Отсюда следует, что на подпространстве $\mathfrak{P}$ оператор U *изометричен*. В самом деле, если f и g принадлежат $\mathfrak{P}$, то

$$(Uf,\ Ug)=(U^*Uf,\ g)=(Pf,\ g)=(f,\ g).$$

Так как $\mathfrak{P}$—замкнутое множество, то оператор U преобразует его в замкнутое же множество $\mathfrak{Q}''$; это последнее является, таким образом, подпространством, причем $\mathfrak{Q}'$, очевидно, заключено в $\mathfrak{Q}$. Так как U обращается в нуль на всех элементах, ортогональных $\mathfrak{P}$, то все пространство $\mathfrak{H}$ отображается оператором U также на $\mathfrak{Q}'$.

Пусть h—какой-нибудь элемент, ортогональный $\mathfrak{Q}'$, т. е. такой, что $(h,\ Uf)=0$ для всех f из $\mathfrak{H}$. Тогда $U^*h=0$ и

$$PQh=A^{1/2}A^{-1/2}PQh=A^{1/2}PA^{-1/2}Qh=A^{1/2}U^*h=0,$$

следовательно, $(Q-P)Qh=Qh$. В силу предположения, что $\|Q-P\|<1$, последнее уравнение удовлетворяется только при $Qh=0$, т. е. когда h ортогонален также подпространству $\mathfrak{Q}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{Q}'=\mathfrak{Q}$, и теорема доказана.

Мы воспользуемся этой теоремой ниже, когда будем заниматься теорией возмущений (гл. IX). Заметим еще, что оператор U удовлетворяет соотношениям

$$U^*U=P, \quad UU^*=Q;$$

[1]) С.-Надь [1] (стр. 58) и [5] (стр. 350).

из них второе является следствием того, что UU^* оставляет инвариантными все элементы подпространства $\mathfrak{Q}$:

$$UU^*(Uf) = U(U^*U)f = UPf = Uf,$$

и UU^*, так же как U^*, отображает в нуль все элементы h, ортогональные $\mathfrak{Q}$. Таким образом, на подпространстве $\mathfrak{Q}$ оператор U^* является обратным для U.

106. Функции ограниченного симметричного оператора. Пусть A — симметричный оператор. Произвольному многочлену с действительными коэффициентами

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_n\lambda^n$$

поставим в соответствие симметричный оператор

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n.$$

Такое соответствие, очевидно, *однородно*, *аддитивно и мультипликативно*; это означает, что многочленам

$$cp(\lambda), \quad p(\lambda) + q(\lambda), \quad p(\lambda)\,q(\lambda)$$

соответствуют

$$cp(A), \quad p(A) + q(A), \quad p(A)\,q(A).$$

Далее, это соответствие *положительного типа*, т. е. если

$$p(\lambda) \geqslant 0 \text{ при } m \leqslant \lambda \leqslant M,$$

где m и M — нижняя и верхняя грани оператора A, то

$$p(A) \geqslant O.$$

Для доказательства последнего утверждения представим $p(\lambda)$ в виде

$$p(\lambda) = c \prod_i (\lambda - \alpha_i) \prod_j (\beta_j - \lambda) \prod_k [(\lambda - \gamma_k)^2 + \delta_k^2],$$

где $c \geqslant 0$, $\alpha_i \leqslant m$, $\beta_j \geqslant M$, а квадратичные множители соответствуют попарно сопряженным комплексным корням и тем действительным корням, которые заключены между m и M; эти последние непременно четной кратности. Если теперь подставить A вместо λ, то мы получим представление $p(A)$ в виде произведения перестановочных положительных операторов; следовательно, оператор $p(A)$ положителен.

Вообще, если

$$p(\lambda) \geqslant q(\lambda) \quad \text{при} \quad m \leqslant \lambda \leqslant M,$$

то

$$p(A) \geqslant q(A);$$

для доказательства достаточно рассмотреть разность $p(\lambda) - q(\lambda) \geqslant 0$. Таким образом, описанное соответствие монотонно.

Поставим перед собой задачу *распространить* это соответствие, с сохранением отмеченных здесь свойств, на более широкие классы функций. Для этой цели можно воспользоваться методом, посредством которого в гл. II понятие интеграла, определенное первоначально для некоторых простых функций (ступенчатых или непрерывных), было распространено на функции более общей природы. Там мы прибегли к монотонным последовательностям таких простых функций, сходящимся почти всюду. Здесь мы рассмотрим монотонные последовательности, сходящиеся *всюду* (при этом, в отличие от гл. II, удобнее пользоваться убывающими последовательностями)[1].

Рассмотрим сначала класс C_1 неотрицательных действительных функций, заданных на интервале $m \leqslant \lambda \leqslant M$, непрерывных или хотя бы полунепрерывных сверху. Всякая функция $u(\lambda)$, принадлежащая этому классу, служит пределом некоторой убывающей последовательности многочленов $p_n(\lambda)$. Последовательность соответствующих операторов $p_n(A)$ — убывающая и ограничена снизу (оператором O), следовательно, она тоже сходится. Ее предел, который мы обозначим $u(A)$, поставим в соответствие функции $u(\lambda)$.

Оператор $u(A)$ не зависит от частного выбора последовательности $\{p_n(\lambda)\}$: если $\{q_n(\lambda)\}$ — другая последовательность такого же типа, то $\lim p_n(A) = \lim q_n(A)$. В самом деле, каково бы ни было целое число r, неравенства

$$p_s(\lambda) \leqslant q_r(\lambda) + \frac{1}{r}, \quad q_s(\lambda) \leqslant p_r(\lambda) + \frac{1}{r}$$

выполняются при достаточно больших s для всех λ из интервала $m \leqslant \lambda \leqslant M$; это следует из известной теоремы Дини о монотонных последовательностях непрерывных функций или из теоремы Бореля о покрытиях. Тогда

$$p_s(A) \leqslant q_r(A) + \frac{1}{r} I, \quad q_s(A) \leqslant p_r(A) + \frac{1}{r} I$$

и, переходя к пределу (сначала при $s \to \infty$, затем при $r \to \infty$), получим

$$\lim p_s(A) \leqslant \lim q_r(A), \quad \lim q_s(A) \leqslant \lim p_r(A),$$

т. е.

$$\lim p_n(A) = \lim q_n(A),$$

что и требовалось доказать.

То же рассуждение (вернее, его половина) показывает, что из

$$u_1(\lambda) \geqslant u_2(\lambda) \quad (m \leqslant \lambda \leqslant M)$$

вытекает неравенство

$$u_1(A) \geqslant u_2(A).$$

---

[1]) Этот метод распространения соответствия между функциями и операторами принадлежит Риссу (см. [7] гл. V и [16]).

Распространенное таким образом соответствие, как мы только что показали, монотонно; кроме того, оно положительно-однородно, аддитивно и мультипликативно. В самом деле, если последовательности $\{p_n(\lambda)\}$ и $\{q_n(\lambda)\}$, убывая, стремятся к $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$, то последовательности $\{cp_n(\lambda)\}$, где $c>0$, $\{p_n(\lambda)+q_n(\lambda)\}$ и $\{p_n(\lambda)q_n(\lambda)\}$ стремятся, убывая, соответственно к $cu(\lambda)$, $u(\lambda)+$ $+v(\lambda)$ и $u(\lambda)v(\lambda)$.

Теперь рассмотрим класс C_2 функций, которые можно представить в виде разностей функций, принадлежащих классу C_1. При этом функции $w(\lambda)=u(\lambda)-v(\lambda)$ мы ставим в соответствие оператор $w(A)=u(A)-v(A)$. Этот последний оказывается определенным однозначно: если

$$u_1(\lambda)-v_1(\lambda)=u_2(\lambda)-v_2(\lambda),$$

то

$$u_1(A)-v_1(A)=u_2(A)-v_2(A);$$

в этом можно убедиться, записав первое равенство в виде $u_1+v_2=$ $=v_1+u_2$ и воспользовавшись свойством аддитивности соответствия для функций класса C_1.

Для функций класса C_2 наше соответствие однородно, аддитивно и мультипликативно. Это вытекает из соответствующих свойств, установленных выше для функций класса C_1, а также из представлений:

$$\begin{aligned}
&c(u-v)=cu-cv \quad (\text{при } c>0),\\
&c(u-v)=(-c)v-(-c)u \quad (\text{при } c<0),\\
&(u_1-v_1)+(u_2-v_2)=(u_1+u_2)-(v_1+v_2),\\
&(u_1-v_1)(u_2-v_2)=(u_1u_2+v_1v_2)-(u_1v_2+u_2v_1).
\end{aligned}$$

Наконец, это соответствие монотонно, т. е. из неравенства

$$u_1(\lambda)-v_1(\lambda)\geqslant u_2(\lambda)-v_2(\lambda)$$

вытекает, что

$$u_1(A)-v_1(A)\geqslant u_2(A)-v_2(A);$$

для доказательства достаточно записать первое неравенство в виде $u_1+v_2\geqslant v_1+u_2$ и воспользоваться свойством монотонности, установленным выше для функций класса C_1.

107. Спектральное разложение ограниченного симметричного оператора. Среди „функций" симметричного оператора A, которые мы только что определили, имеются и проекционные операторы; они соответствуют функциям $e(\lambda)$, принимающим только значения 0 и 1, так как при этом $[e(\lambda)]^2=e(\lambda)$ и, следовательно, $[e(A)]^2=e(A)$.

Рассмотрим, в частности, функцию $e_\mu(\lambda)$, зависящую от параметра μ и принимающую значения 1 и 0 соответственно при $\lambda\leqslant\mu$ и при $\lambda>\mu$. Такая функция принадлежит классу C_1, следовательно, ей соответствует проекционный оператор $e_\mu(A)$, который мы обозначим E_μ. Так как $e_\mu(\lambda)e_\nu(\lambda)=e_\mu(\lambda)$ при $\mu<\nu$, то $E_\mu E_\nu=E_\nu E_\mu=E_\mu$ и, следовательно, $E_\mu \leqslant E_\nu$; так как в интервале $m\leqslant\lambda\leqslant M$, согласно нашему определению, $e_\mu(\lambda)=0$ при $\mu<m$ и $e_\mu(\lambda)=1$ при $\mu\geqslant M$, то $E_\mu=O$ при $\mu<m$ и $E_\mu=I$ при $\mu\geqslant M$.

Наконец, E_μ как функция параметра μ непрерывна справа. Чтобы это показать, фиксируем какое-нибудь значение μ и возьмем убывающую последовательность многочленов $p_n(\lambda)$, стремящуюся к $e_\mu(\lambda)$ в интервале $[m, M]$, притом так, чтобы выполнялись неравенства

$$p_n(\lambda)\geqslant e_{\mu+\frac{1}{n}}(\lambda).$$

Мы получим

$$p_n(A)\geqslant E_{\mu+\frac{1}{n}}\geqslant E_\mu.$$

Так как $p_n(A)\longrightarrow E_\mu$, то $E_{\mu+\frac{1}{n}}\longrightarrow E_\mu$ при $n\longrightarrow\infty$ и отсюда следует, в силу монотонности E_μ по μ, что

$$E_{\mu+\varepsilon}\longrightarrow E_\mu \quad \text{при} \quad 0<\varepsilon\longrightarrow 0.$$

Если $\mu<\nu$, то, очевидно,

$$\mu[e_\nu(\lambda)-e_\mu(\lambda)]\leqslant\lambda[e_\nu(\lambda)-e_\mu(\lambda)]\leqslant\nu[e_\nu(\lambda)-e_\mu(\lambda)],$$

откуда вытекает, что

$$\mu(E_\nu-E_\mu)\leqslant A(E_\nu-E_\mu)\leqslant\nu(E_\nu-E_\mu). \tag{6}$$

Выберем точки $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$, удовлетворяющие условию

$$\mu_0<m<\mu_1<\mu_2<\ldots<\mu_{n-1}<M\leqslant\mu_n.$$

Записав неравенства (6) для $\mu=\mu_{k-1}$, $\nu=\mu_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ и просуммировав, получим

$$\sum_{k=1}^{n}\mu_{k-1}(E_{\mu_k}-E_{\mu_{k-1}})\leqslant A\sum_{k=1}^{n}(E_{\mu_k}-E_{\mu_{k-1}})\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mu_k(E_{\mu_k}-E_{\mu_{k-1}}).$$

Из этих сумм вторая равна $A(E_{\mu_n}-E_{\mu_0})=A(I-O)=A$, и при $\max(\mu_k-\mu_{k-1})\leqslant\varepsilon$ разность между последним и первым членами этих неравенств не превосходит εI. Отсюда следует, что

$$\left\|A-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(E_{\mu_k}-E_{\mu_{k-1}})\right\|\leqslant\varepsilon,$$

где λ_k заключены между μ_{k-1} и μ_k.

Если число n частичных интервалов (μ_{k-1}, μ_k) неограниченно увеличивать так, чтобы наибольшая из длин стремилась к нулю, то суммы

$$\sum_k\lambda_k(E_{\mu_k}-E_{\mu_{k-1}})$$

будут стремиться по норме к A. Поскольку E_λ как функция λ постоянна при $\lambda\geqslant M$ и при $\lambda<m$, то полученный результат

можно записать, по аналогии с обычными интегралами Стильтьеса, в виде[1])

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE_\lambda=\int_{m-0}^{M}\lambda\, dE_\lambda.$$

Далее, каково бы ни было целое число $r>0$,

$$A^r=\int_{m-0}^{M}\lambda^r\, dE_\lambda,$$

так как

$$\left[\sum_k \lambda_k (E_{\mu_k}-E_{\mu_{k-1}})\right]^r=\sum_k \lambda_k^r (E_{\mu_k}-E_{\mu_{k-1}});$$

отсюда, в силу соотношения $E_\nu E_\mu=E_{\min\{\nu,\,\mu\}}$, в частности, следует, что разности $E_{\mu_k}-E_{\mu_{k-1}}$ представляют собой попарно ортогональные проекционные операторы. Последнее равенство справедливо также для $r=0$, поэтому, каков бы ни был многочлен $p(\lambda)$,

$$p(A)=\int_{m-0}^{M} p(\lambda)\, dE_\lambda.$$

Таким образом, формальное (или „алгебраическое") соответствие, из которого мы исходили, приняло теперь „аналитическую" форму.

От многочленов мы можем перейти к произвольным функциям $u(\lambda)$, *непрерывным* на $[m,\ M]$. В самом деле, для любого заданного $\varepsilon>0$ можно найти такой многочлен $p(\lambda)$, для которого

$$-\frac{\varepsilon}{3}\leqslant u(\lambda)-p(\lambda)\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$$

в интервале $[m,\ M]$; при этом

$$-\frac{\varepsilon}{3}I\leqslant u(A)-p(A)\leqslant\frac{\varepsilon}{3}I$$

и, следовательно,

$$\|u(A)-p(A)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

С другой стороны, при любом разбиении оси λ сумма

$$S_u=\sum_k u(\lambda_k)(E_{\mu_k}-E_{\mu_{k-1}})$$

и аналогичная сумма S_p, в которой вместо $u(\lambda_k)$ взяты $p(\lambda_k)$, подчиняются неравенствам

$$-\frac{\varepsilon}{3}I\leqslant S_u-S_p\leqslant\frac{\varepsilon}{3}I,$$

[1]) Интеграл берется в пределах от m до M, но по функции E_λ, которую в точке m мы условимся считать равной E_{m-0}, т. е. O. Кроме того, если отказаться от условия непрерывности справа, которое вообще мало существенно, то можно по определению положить $E_m=O$.

откуда следует, что

$$\|S_u - S_p\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Если разбиение настолько мелко, что

$$\|p(A) - S_p\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

то

$$\|u(A) - S_u\| \leqslant \|u(A) - p(A)\| + \|p(A) - S_p\| + \|S_p - S_u\| \leqslant \varepsilon.$$

Итак, для любой непрерывной функции $u(\lambda)$

$$u(A) = \int_{m-0}^{M} u(\lambda)\, dE_\lambda$$

в смысле сходимости по норме сумм стильтьесовского типа. Отсюда получаем, что для любых f и g из $\mathfrak{H}$

$$(u(A) f, g) = \int_{m-0}^{M} u(\lambda)\, d(E_\lambda f, g), \tag{7}$$

где правая часть равенства представляет собой обычный интеграл Стильтьеса.

В силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, формула (7) распространяется на функции $u(\lambda)$, принадлежащие классам C_1 и C_2, для которых было определено соответствие $u(\lambda) \to u(A)$. Интеграл (7) нужно при этом понимать в смысле Стильтьеса—Лебега.

Формула (7) дает нам возможность распространить понятие функции от оператора за пределы класса C_2; в самом деле, формула (7) определяет оператор $u(A)$ для любой функции $u(\lambda)$, ограниченной и суммируемой относительно функции (с ограниченным изменением) $(E_\lambda f, g)$ при любом выборе элементов f и g. Можно даже допустить неограниченные суммируемые функции $u(\lambda)$, но тогда следует отказаться от требования ограниченности оператора $u(A)$. Мы вернемся к этому вопросу позднее, в гл. VIII и IX.

Резюмируем основные результаты:

Теорема[1]). *Всякому симметричному оператору A в гиль-*

[1]) Эта основная теорема принадлежит Гильберту [1]. Приведенное здесь доказательство дано Риссом ([7] и [14]). Другие доказательства принадлежат Хеллингеру [2], Риссу [5], И. Нейману [1], Стоуну [2] (гл. V), Лендьелу и Стоуну [1], Винтнеру [1] (гл. V), С.-Надю [1] (гл. V), Лорчу [6]. Первое доказательство, предложенное Риссом ([5]; см. также Эберлейн [1]), сводит вопрос к проблеме моментов

$$\int_{m}^{M} \lambda^r\, d\alpha_f(\lambda) = (A^r f, f) \quad (r = 0, 1, 2, \ldots),$$

бертовом пространстве, имеющему нижнюю грань m и верхнюю грань M, можно поставить в соответствие некоторое „спектральное семейство“, заданное на интервале $[m, M]$, т. е. семейство проекционных операторов $\{E_\lambda\}$, зависящее от действительного параметра λ, которое обладает следующими свойствами:

а) $E_\lambda \leqslant E_\mu$ *или, что то же самое,* $E_\lambda E_\mu = E_\lambda$ *при* $\lambda \leqslant \mu$;

б) $E_{\lambda+0} = E_\lambda$;

в) $E_\lambda = O$ *при* $\lambda < m$ *и* $E_\lambda = I$ *при* $\lambda \geqslant M$.

С помощью E_λ оператор A представляется в виде

$$A = \int_{m-0}^{M} \lambda \, dE_\lambda. \tag{8}$$

Перечисленные свойства однозначно определяют семейство $\{E_\lambda\}$. При любом фиксированном значении параметра λ оператор E_λ является пределом (в сильном смысле) последовательности многочленов от A.

Единственность спектрального семейства предстоит еще доказать. Если семейство $\{E_\lambda\}$ удовлетворяет условию (8), то оно удовлетворяет также условию (7). А так как левая часть (7) определена независимо от $\{E_\lambda\}$, то, согласно нашим теоремам п. 51, функция $(E_\lambda f, g)$ при любых f и g однозначно, с точностью до постоянного слагаемого, определяется равенством (7) в ее точках непрерывности (а также при $\lambda = m - 0$ и $\lambda = M$). А так как эта функция непрерывна справа и в точке M принимает определенное значение (f, g), то она всюду определена однозначно.

где f — произвольный фиксированный элемент пространства $\mathfrak{H}$. Так как соответствие между многочленами от λ и многочленами от оператора A — положительного типа (см. п. 106), то и проблема моментов также положительного типа (см. п. 53). Поэтому она имеет неубывающее решение $\alpha_f(\lambda)$, которое определяется однозначно, если его надлежащим образом нормировать, например потребовать, чтобы $\alpha_f(\lambda)$ была непрерывна справа внутри интервала $[m, M]$ и обращалась бы в нуль в точке m. Далее доказывается существование неубывающего семейства проекционных операторов $\{E_\lambda\}$, такого, что $\alpha_f(\lambda) = (E_\lambda f, f)$ при любом f. После этого нетрудно перейти к формулам

$$(A^r f, g) = \int_m^M \lambda^r d(E_\lambda f, g) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots),$$

в которых f и g означают произвольные элементы пространства $\mathfrak{H}$. Таким образом получается разложение (8) с той разницей, что вместо сходимости *по норме* соответствующих интегральных сумм здесь устанавливается только их *слабая* сходимость. Если функции $\alpha(\lambda)$ нормированы указанным образом, то семейство $\{E_\lambda\}$ оказывается непрерывным справа, за исключением точки $\lambda = m$, в которой $E_m = O$.

Рассуждением, весьма близким к этому, мы воспользуемся ниже, в п. 138, при доказательстве теоремы Стоуна по методу Бохнера.

Представление оператора A в виде (8) или, говоря точнее, представление Af в виде

$$Af = \int_{m-0}^{M} \lambda \, dE_\lambda f \tag{9}$$

является обобщением формулы

$$Af = \sum_k \mu_k (f, \varphi_k) \varphi_k,$$

которую мы получили в п. 93 для случая вполне непрерывного оператора. В самом деле, такой ряд можно записать в виде интеграла Стильтьеса (9), если E_λ задать следующим образом:

$$E_\lambda \psi = \begin{cases} \sum\limits_{\mu_k \leqslant \lambda} (f, \varphi_k) \varphi_k & \text{при } \lambda < 0, \\ f - \sum\limits_{\mu_k > \lambda} (f, \varphi_k) \varphi_k & \text{при } \lambda \geqslant 0. \end{cases}$$

В этом частном случае E_λ как функция от λ постоянна между любыми двумя последовательными собственными значениями оператора A, равна O для значений λ, меньших всех собственных значений, и равна I для значений λ, больших всех собственных значений. Когда λ, изменяясь, переходит через собственное значение μ, E_λ претерпевает скачок, равный $E(\mu) = E_\mu - E_{\mu-0}$; это — проекционный оператор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на собственное подпространство, соответствующее данному собственному значению μ:

$$E(\mu) f = \sum_{\mu_k = \mu} (f, \varphi_k) \varphi_k \quad \text{при} \quad \mu \neq 0,$$

$$E(0) f = f - \sum_k (f, \varphi_k) \varphi_k.$$

В том случае, когда A не вполне непрерывен, функция E_λ может возрастать непрерывным образом. В качестве примера рассмотрим пространство $L^2(0, 1)$ и возьмем оператор A, преобразующий каждую функцию $f(x)$ в $xf(x)$. Очевидно, это — линейный симметричный оператор, нижняя и верхняя грани которого равны соответственно 0 и 1. При этом для любого многочлена $p(\lambda)$ и, следовательно, для любой функции $u(\lambda)$, полунепрерывной сверху,

$$u(A) f(x) = u(x) \cdot f(x).$$

В частности,

$$E_\mu f(x) = e_\mu(x) f(x),$$

где $e_\mu(x)$ — функция, определенная в начале этого пункта. Формула (9) дает следующий очевидный результат:

$$x = \int_0^1 \lambda \, de_\lambda(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

108. Положительная и отрицательная части симметричного оператора. Другой вывод спектрального разложения. Пусть A — симметричный оператор. Рассмотрим операторы, соответствующие, в смысле п. 106, функциям $|\lambda|$, λ^+ и λ^-; обозначим их $|A|$, A^+ и A^-. Так как $|\lambda|\geqslant 0$, $\lambda^+\geqslant 0$, $\lambda^-\geqslant 0$ и

$$|\lambda|^2=\lambda^2, \quad \lambda^+=\frac{1}{2}(|\lambda|+\lambda), \quad \lambda^-=\frac{1}{2}(|\lambda|-\lambda),$$

то $|A|\geqslant O$, $A^+\geqslant O$, $A^-\geqslant O$ и

$$|A|^2=A^2, \; A^+=\frac{1}{2}(|A|+A), \quad A^-=\frac{1}{2}(|A|-A). \tag{10}$$

Таким образом, $|A|$ является положительным квадратным корнем из положительного симметричного оператора A^2. Существование и единственность такого корня доказаны в п. 104. Поэтому мы можем *определить* $|A|$ прямо, не прибегая к результатам п. 106, но положив

$$|A|=(A^2)^{1/2}.$$

Операторы A^+ и A^- можно определить посредством формул (10); так как $(A^2)^{1/2}$ является пределом некоторой последовательности многочленов от A^2, то операторы $|A|$, A^+ и A^- перестановочны с A и друг с другом, а также со всеми операторами, перестановочными с A. При этом, в силу соотношения $|A|\smile A$,

$$A^+A^-=\frac{1}{4}(|A|+A)(|A|-A)=\frac{1}{4}(|A|^2-A^2)=O.$$

Пусть $\mathfrak{L}$ — множество элементов f пространства $\mathfrak{H}$, для которых $A^+f=0$; очевидно, $\mathfrak{L}$ является подпространством пространства $\mathfrak{H}$. Если E — проекционный оператор с областью значений $\mathfrak{L}$, то

$$A^+E=O \text{ и } EA^+=(A^+E)^*=O^*=O.$$

С другой стороны, из $A^+A^-=O$ следует, что все элементы вида A^-g принадлежат $\mathfrak{L}$, поэтому

$$EA^-=A^- \text{ и } A^-E=(EA^-)^*=(A^-)^*=A^-.$$

Итак,

$$EA^+=A^+E=O, \quad EA^-=A^-E=A^-. \tag{11}$$

Так как $A=A^+-A^-$, то

$$EA=AE=-A^-, \quad (I-E)A=A(I-E)=A^+. \tag{12}$$

В силу (11), оператор E перестановочен с A^+ и A^-, а следовательно, и с $|A|=A^++A^-$, и так как

$$E\geqslant O, \quad I-E\geqslant O, \quad |A|\geqslant O,$$

то

$$A^-=EA^++EA^-=E|A|\geqslant O,$$
$$A^+=|A|-A^-=|A|-E|A|=(I-E)|A|\geqslant O,$$

Таким образом, операторы A^+ и A^- положительны, следовательно,

$$|A| = A^+ + A^- \geqslant \pm A^+ \mp A^- = \pm A,$$
$$A^+ \geqslant A^+ - A^- = A, \quad A^- \geqslant A^- - A^+ = -A.$$

Далее, проекционный оператор E перестановочен с любым оператором T, который, в свою очередь, перестановочен с A. В самом деле, оператор T, будучи перестановочен с A, перестановочен и с A^+, поэтому

$$A^+TE = TA^+E = TO = O;$$

отсюда следует, что всякий элемент вида TEf принадлежит $\mathfrak{L}$; следовательно, $TE = ETE$ и $ET = (TE)^* = (ETE)^* = ETE$; таким образом, $ET = TE$.

Покажем теперь, что $|A|$ *представляет собой наименьший перестановочный с A симметричный оператор, мажорирующий одновременно и A и $-A$.*

Неравенства $|A| \geqslant \pm A$ уже установлены, поэтому остается только доказать, что из соотношений $T \smile A$ и $T \geqslant \pm A$ вытекает $T \geqslant |A|$. Проекционный оператор E перестановочен с A и T, следовательно, неравенства

$$T \geqslant A, \quad T \geqslant -A$$

можно помножить — первое на $I - E \geqslant O$, а второе на $E \geqslant O$ и получить таким образом

$$T(I-E) \geqslant A(I-E) = A^+, \quad TE \geqslant -AE = A^-.$$

Сложив последние неравенства почленно, получим

$$T \geqslant A^+ + A^- = |A|,$$

что и требовалось доказать.

Отсюда можно получить, что A^+ *является наименьшим из симметричных операторов, перестановочных с A и мажорирующих A, а A^- — наименьшим из симметричных операторов, перестановочных с A и мажорирующих $-A$.*

Все эти предложения являются частными случаями следующего:

Если A и B — перестановочные симметричные операторы, то $\frac{1}{2}(A + B + |A - B|)$ служит наименьшим из симметричных операторов, мажорирующих A и B и перестановочных с ними.

В самом деле, указанный оператор превосходит

$$\frac{1}{2}(A + B + (A - B)) = A \text{ и } \frac{1}{2}(A + B - (A - B)) = B;$$

с другой стороны, если C — какой-нибудь симметричный оператор, мажорирующий A и B и перестановочный с ними, то

$$C-\frac{1}{2}(A+B)\geqslant\begin{cases}A-\frac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{2}(A-B),\\ B-\frac{1}{2}(A+B)=-\frac{1}{2}(A-B)\end{cases}$$

и, следовательно,

$$C-\frac{1}{2}(A+B)\geqslant\frac{1}{2}|A-B|,\qquad C\geqslant\frac{1}{2}(A+B+|A-B|),$$

что и требовалось доказать.

Операторы $\frac{1}{2}(A+B+|A-B|)$ и $\frac{1}{2}(A+B-|A-B|)$ по аналогии с функциями обозначаются соответственно $\sup\{A,\ B\}$ и $\inf\{A,\ B\}$.

Покажем, как с помощью полученных здесь результатов можно по-другому доказать существование спектрального разложения (9)[1]).

Наряду с оператором A рассмотрим операторы $A_\lambda=A-\lambda I$, где λ — действительный параметр. При $\lambda<\mu$, очевидно, $A_\lambda^+\geqslant A_\lambda\geqslant A_\mu$ и $A_\lambda^+\geqslant O$, следовательно, $A_\lambda^+\geqslant A_\mu^+$ (условие перестановочности выполнено, так как A_λ^+ есть предел многочленов от A_λ, а значит, и предел многочленов от A_μ). При $\lambda<m$ имеем $A_\lambda\geqslant O$, откуда вытекает, что $A_\lambda^+=A_\lambda\geqslant(m-\lambda)I$. При $\lambda\geqslant M$ имеем $A_\lambda\leqslant O$, следовательно, $A_\lambda^+=O$.

Из полученных соотношений вытекает, что подпространство $\mathfrak{L}_\lambda$ элементов, на которых обращается в нуль оператор A_λ^+, при $\lambda<m$ состоит из единственного элемента 0, увеличивается с возрастанием λ и при $\lambda\geqslant M$ совпадает со всем пространством. В самом деле, если $\lambda<\mu$, то $A_\lambda^+\geqslant A_\mu^+$, $A_\mu^+A_\lambda^+\geqslant(A_\mu^+)^2$ и, следовательно,

$$(A_\mu^+A_\lambda^+f,\ f)\geqslant(A_\mu^{+2}f,\ f)=(A_\mu^+f,\ A_\mu^+f)=\|A_\mu^+f\|^2$$

для любого f. Таким образом, если $A_\lambda^+f=0$, то $A_\mu^+f=0$.

Пусть E_λ — проекционный оператор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{L}_\lambda$. Он также возрастает вместе с λ, равен O при $\lambda<m$ и равен I при $\lambda\geqslant M$. Положим $E_{\lambda\mu}=E_\mu-E_\lambda$, где $\lambda<\mu$. Тогда, в силу монотонности E_λ, будет выполняться равенство

$$E_\mu E_{\lambda\mu}=(I-E_\lambda)E_{\lambda\mu}=E_{\lambda\mu}. \tag{13}$$

Так как операторы A_λ^+, A_λ^- и $E_{\lambda\mu}$ положительны и перестановочны, то, согласно (11) и (12),

$$(\mu I-A)E_{\lambda\mu}=-A_\mu E_{\lambda\mu}=-A_\mu E_\mu E_{\lambda\mu}=A_\mu^-E_{\lambda\mu}\geqslant O,$$
$$(A-\lambda I)E_{\lambda\mu}=A_\lambda E_{\lambda\mu}=A_\lambda(I-E_\lambda)E_{\lambda\mu}=A_\lambda^+E_{\lambda\mu}\geqslant O.$$

---

[1]) См. С.-Надь [1] (гл. VI, § 1).

Записав эти соотношения в виде

$$\lambda E_{\lambda\mu} \leqslant A E_{\lambda\mu} \leqslant \mu E_{\lambda\mu}, \tag{14}$$

получим неравенства (6) предыдущего пункта, а мы видели, что из них вытекала формула

$$A = \int_{m-0}^{M} \lambda \, dE_\lambda .$$

Для того чтобы показать, что операторы E_λ, только что построенные, образуют спектральное семейство, остается обнаружить, что E_λ как функция переменного λ непрерывна справа, т. е.

$$P_\lambda = \lim_{\mu \to \lambda + 0} E_{\lambda\mu} = O.$$

Из (14) вытекает, что $\lambda P_\lambda \leqslant A P_\lambda \leqslant \lambda P_\lambda$ и, следовательно, $A P_\lambda = \lambda P_\lambda$, $A_\lambda P_\lambda = O$, а в силу (12), $A_\lambda^+ P_\lambda = (I - E_\lambda) A_\lambda P_\lambda = O$. Это означает, что $P_\lambda f$ при любом f принадлежит $\mathfrak{L}_\lambda$ и, следовательно, $P_\lambda = E_\lambda P_\lambda$. Сопоставив этот результат с $(I - E_\lambda) P_\lambda = P_\lambda$, предельным случаем равенства (13), получим $P_\lambda = O$, что и требовалось доказать.

§ 2. УНИТАРНЫЕ И НОРМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

109. Унитарные операторы. Линейный оператор U в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ называется *изометричным* (см. п. 103), если он оставляет инвариантными скалярные произведения, т. е. если

$$(Uf, \; Ug) = (f, \; g)$$

или, что эквивалентно,

$$U^* U = I.$$

Если при этом U отображает $\mathfrak{H}$ на все $\mathfrak{H}$ целиком, то оператор U называется *унитарным*. В этом случае при любом заданном f уравнение $Ug = f$ имеет решение g и

$$U U^* f = U (U^* U g) = U g = f,$$

откуда следует, что

$$U U^* = I.$$

Два условия

$$U^* U = I \quad \text{и} \quad U U^* = I$$

или одно, им эквивалентное,

$$U^* = U^{-1},$$

очевидно, характеризуют унитарные операторы.

Выше мы показали (см. п. 103), что в конечномерном пространстве всякий изометричный оператор является унитарным.