Записав эти соотношения в виде

$$\lambda E_{\lambda\mu} \leqslant A E_{\lambda\mu} \leqslant \mu E_{\lambda\mu}, \tag{14}$$

получим неравенства (6) предыдущего пункта, а мы видели, что из них вытекала формула

$$A = \int_{m-0}^{M} \lambda \, dE_\lambda .$$

Для того чтобы показать, что операторы E_λ, только что построенные, образуют спектральное семейство, остается обнаружить, что E_λ как функция переменного λ непрерывна справа, т. е.

$$P_\lambda = \lim_{\mu \to \lambda + 0} E_{\lambda\mu} = O.$$

Из (14) вытекает, что $\lambda P_\lambda \leqslant A P_\lambda \leqslant \lambda P_\lambda$ и, следовательно, $A P_\lambda = \lambda P_\lambda$, $A_\lambda P_\lambda = O$, а в силу (12), $A_\lambda^+ P_\lambda = (I - E_\lambda) A_\lambda P_\lambda = O$. Это означает, что $P_\lambda f$ при любом f принадлежит $\mathfrak{L}_\lambda$ и, следовательно, $P_\lambda = E_\lambda P_\lambda$. Сопоставив этот результат с $(I - E_\lambda) P_\lambda = P_\lambda$, предельным случаем равенства (13), получим $P_\lambda = O$, что и требовалось доказать.

§ 2. УНИТАРНЫЕ И НОРМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

109. Унитарные операторы. Линейный оператор U в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ называется *изометричным* (см. п. 103), если он оставляет инвариантными скалярные произведения, т. е. если

$$(Uf, Ug) = (f, g)$$

или, что эквивалентно,

$$U^* U = I.$$

Если при этом U отображает $\mathfrak{H}$ на все $\mathfrak{H}$ целиком, то оператор U называется *унитарным*. В этом случае при любом заданном f уравнение $Ug = f$ имеет решение g и

$$U U^* f = U (U^* U g) = U g = f,$$

откуда следует, что

$$U U^* = I.$$

Два условия

$$U^* U = I \quad \text{и} \quad U U^* = I$$

или одно, им эквивалентное,

$$U^* = U^{-1},$$

очевидно, характеризуют унитарные операторы.

Выше мы показали (см. п. 103), что в конечномерном пространстве всякий изометричный оператор является унитарным.

В общем случае это не так: например, оператор

$$U(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

в координатном гильбертовом пространстве изометричный, но не унитарный.

Для унитарных операторов справедлива теорема о разложении, аналогичная той, которая была установлена для симметричных операторов.

Теорема[1]). *Любой унитарный оператор U допускает спектральное разложение*

$$U = \int_{-0}^{2\pi} e^{i\varphi}\, dE_\varphi, \tag{15}$$

где $\{E_\varphi\}$ — спектральное семейство, заданное на отрезке $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. При дополнительном условии, что E_φ непрерывно в точке $\varphi = 0$, т. е. $E_0 = O$, семейство $\{E_\varphi\}$ определяется оператором U однозначно. При любом значении φ оператор E_φ является пределом (по норме) последовательности многочленов от U и U^{-1}.

Эту теорему можно вывести из соответствующей теоремы о симметричных операторах или из теоремы о тригонометрических моментах (п. 53), но мы предпочитаем наметить здесь прямое доказательство, аналогичное приведенному в п. 107 доказательству для симметричных операторов.

Начнем с того, что тригонометрическому многочлену

$$p(e^{i\varphi}) = \sum_{-n}^{n} c_k e^{ik\varphi}$$

поставим в соответствие оператор

$$p(U) = \sum_{-n}^{n} c_k U^k,$$

причем коэффициенты c_k могут быть любыми *комплексными* числами. Такое соответствие, очевидно, *линейно* (т. е. однородно и аддитивно), *мультипликативно* и, кроме того, обладает тем свойством, что сопряженному многочлену

$$\overline{p(e^{i\varphi})} = \sum_{-n}^{n} \bar{c}_k e^{-ik\varphi}$$

соответствует оператор, сопряженный оператору $p(U)$. Следовательно, если $p(e^{i\varphi})$ принимает только действительные значения, то оператор $p(U)$ симметричен. Далее, это соответствие — *поло-*

---

[1]) См. Винтнер [2]; И. Нейман [10] (стр. 281); Фридрихс [4]; Веккен [1]; Стоун [2] (стр. 302).

жительного типа, т. е.

$$p(U) \geqslant O \quad \text{при} \quad p(e^{i\varphi}) \geqslant 0.$$

В этом можно убедиться, воспользовавшись леммой Фейера и Рисса, утверждающей, что всякий положительный тригонометрический многочлен является квадратом модуля некоторого другого тригонометрического многочлена (см. п. 53). Итак, если

$$p(e^{i\varphi}) = |q(e^{i\varphi})|^2 = \overline{q(e^{i\varphi})}\, q(e^{i\varphi}),$$

то

$$p(U) = q(U)^* q(U)$$

и, следовательно,

$$(p(U)f, f) = (q(U)f, q(U)f) \geqslant 0, \quad p(U) \geqslant O.$$

Соответствие, установленное таким образом для тригонометрических многочленов, распространяется на более общие функции с периодом 2π, прежде всего на те, которые могут быть представлены как пределы убывающих последовательностей положительных тригонометрических многочленов, затем на линейные комбинации таких функций (с действительными или комплексными коэффициентами), подобно тому как это было сделано в п. 106 для симметричных операторов. Соответствие, таким образом распространенное, линейно, мультипликативно и положительного типа; кроме того, операторы, соответствующие двум сопряженным функциям, взаимно сопряжены.

Описанный класс функций охватывает, в частности, функции $e_\psi(\varphi)$, зависящие от действительного параметра $\psi\,(0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi)$ и определенные следующим образом: $e_0(\varphi) \equiv 0$, $e_{2\pi}(\varphi) \equiv 1$ и для $0 < \psi < 2\pi$

$$e_\psi(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{когда } 2k\pi < \varphi \leqslant 2k\pi + \psi \\ 0, & \text{когда } 2k\pi + \psi < \varphi \leqslant 2(k+1)\pi \end{cases} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Эти функции совпадают со своими квадратами, следовательно, им соответствуют проекционные операторы E_ψ. При этом, в частности, $E_0 = O$, $E_{2\pi} = I$ и, так как $e_\psi(\varphi) \leqslant e_\chi(\varphi)$ при $\psi < \chi$, то $E_\psi \leqslant E_\chi$.

Далее, E_ψ как функция от ψ непрерывна справа. Для того чтобы это показать, положим $0 \leqslant \psi < 2\pi$ и возьмем функции $e'_\psi(\varphi) = e_\psi(\varphi) + e'_0(\varphi)$, где $e'_0(\varphi)$ равна 1 в точках $\varphi = 2k\pi$ и равна нулю во всех остальных точках. Эти функции полунепрерывны сверху, поэтому для любого фиксированного ψ можно построить убывающую последовательность тригонометрических многочленов $p_n(e^{i\varphi})$, стремящуюся к $e'_\psi(\varphi)$, причем так, чтобы при достаточно больших n выполнялось неравенство

$$p_n(e^{i\varphi}) \geqslant e'_{\psi + \frac{1}{n}}(\varphi).$$

Отсюда для соответствующих операторов вытекает, что $E'_{\psi+\frac{1}{n}} \longrightarrow E'_\psi$. Следовательно, $E_{\psi+\frac{1}{n}} \longrightarrow E_\psi \ (n \longrightarrow \infty)$ и, наконец, $\lim\limits_{\chi \to \psi+0} E_\chi = E_\psi$.

Итак, E_ψ образуют спектральное семейство, заданное на $[0, 2\pi]$, причем $E_0 = O$. Согласно самому построению, E_ψ служит пределом последовательности многочленов от U и от $U^* = U^{-1}$.

Для того чтобы доказать формулу (15), рассмотрим разбиение отрезка $[0, 2\pi]$ точками

$$0 = \psi_0 < \psi_1 < \ldots < \psi_n = 2\pi,$$

удовлетворяющее условию $\max(\psi_k - \psi_{k-1}) \leqslant \varepsilon$. Выберем в каждом из интервалов $[\psi_{k-1}, \psi_k]$ произвольную точку φ_k. Для $\psi_{h-1} < \varphi \leqslant \psi_h$ получим

$$\left| e^{i\varphi} - \sum_{k=1}^{n} e^{i\varphi_k}[e_{\psi_k}(\varphi) - e_{\psi_{k-1}}(\varphi)] \right| = |e^{i\varphi} - e^{i\varphi_h}| \leqslant |\varphi - \varphi_h| \leqslant \varepsilon.$$

Для $\varphi = 0$ справедлив аналогичный результат. Итак, для любого φ

$$0 \leqslant \overline{\left(e^{i\varphi} - \sum_{k=1}^{n} e^{i\varphi_k}[e_{\psi_k}(\varphi) - e_{\psi_{k-1}}(\varphi)] \right)} \times$$
$$\times \left(e^{i\varphi} - \sum_{k=1}^{n} e^{i\varphi_k}[e_{\psi_k}(\varphi) - e_{\psi_{k-1}}(\varphi)] \right) \leqslant \varepsilon^2.$$

Перейдя к соответствующим операторам, получим

$$O \leqslant \left(U - \sum_{k=1}^{n} e^{i\varphi_k}(E_{\psi_k} - E_{\psi_{k-1}}) \right)^* \left(U - \sum_{k=1}^{n} e^{i\varphi_k}(E_{\psi_k} - E_{\psi_{k-1}}) \right) \leqslant \varepsilon^2 I;$$

отсюда вытекает неравенство

$$\left\| U - \sum_{k=1}^{n} e^{i\varphi_k}(E_{\psi_k} - E_{\psi_{k-1}}) \right\| \leqslant \varepsilon,$$

которое и доказывает формулу (15).

Проекционные операторы $E_{\psi_k} - E_{\psi_{k-1}}$ взаимно ортогональны; поэтому для любого целого $r \geqslant 0$

$$\sum e^{ir\varphi_k}(E_{\psi_k} - E_{\psi_{k-1}}) = [\sum e^{i\varphi_k}(E_{\psi_k} - E_{\psi_{k-1}})]^r \Rightarrow U^r,$$
$$\sum e^{-ir\varphi_k}(E_{\psi_k} - E_{\psi_{k-1}}) = [\sum e^{-i\varphi_k}(E_{\psi_k} - E_{\psi_{k-1}})]^r \Rightarrow (U^*)^r = U^{-r},$$

следовательно,

$$\int_0^{2\pi} e^{in\varphi}\, dE_\varphi = U^n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Отсюда вытекает, что для любого тригонометрического многочлена и даже для любой непрерывной функции $u(e^{i\varphi})$

$$u(U)=\int_0^{2\pi} u(e^{i\varphi})\,dE_\varphi,$$

причем интеграл в правой части понимается как предел по норме соответствующих стильтьесовских сумм. Для других функций, для которых справедливо установленное выше соответствие, имеет место аналогичная формула, но в ней интеграл следует понимать в слабом смысле, т. е., каковы бы ни были элементы f и g пространства $\mathfrak{H}$,

$$(u(U)f,\,g)=\int_0^{2\pi} u(e^{i\varphi})\,d(E_\varphi f,\,g), \tag{16}$$

причем интеграл берется в смысле Стильтьеса—Лебега.

Последняя формула, будучи следствием (15), справедлива для любого спектрального семейства $\{F_\varphi\}$, заданного иа $[0, 2\pi]$, для которого выполняется формула (15). Взяв, в частности, $u(e^{i\varphi}) = e_\psi(\varphi)$, получим

$$(E_\psi f,\,g)=\int_0^{2\pi} e_\psi(\varphi)\,d(F_\varphi f,\,g)=\int_0^{\psi} d(F_\varphi f,\,g)=((F_\psi-F_0)f,\,g).$$

Так как $F_0=O$, то $E_\psi=F_\psi$. Тем самым доказана *единственность* спектрального семейства, соответствующего оператору U.

110. Нормальные операторы. Представление их в виде произведений. Как симметричные, так и унитарные операторы представляют собой частные случаи нормальных операторов. Линейный оператор N называется *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряженным: $N^*N=NN^*$.

Любой нормальный оператор N может быть представлен в виде

$$N=X+iY, \tag{17}$$

где X и Y—перестановочные *симметричные* операторы; для этого достаточно положить

$$X=\frac{1}{2}(N+N^*),\quad Y=\frac{1}{2i}(N-N^*);$$

при этом, очевидно, $\|X\|\leqslant\|N\|$, $\|Y\|\leqslant\|N\|$.

Возможно еще такое, менее очевидное, представление:

$$N=RU=UR, \tag{18}$$

где R—*положительный* симметричный оператор, а U—*унитарный* оператор.

В то время как формула (17) аналогична выражению комплексного числа z через его действительную и мнимую части,

$z = x + iy$, представление (18) аналогично выражению z в виде произведения его модуля на множитель, модуль которого равен единице: $z = re^{i\varphi}$.

Формулу (18) можно получить, взяв в качестве R положительный квадратный корень из положительного оператора $N^*N = NN^*$; будучи пределом последовательности многочленов от N^*N, оператор R перестановочен с N и с N^*. При этом для любого элемента f

$$\|Rf\|^2 = (Rf, Rf) = (R^2f, f) = \begin{cases} (N^*Nf, f) = (Nf, Nf) = \|Nf\|^2, \\ (NN^*f, f) = (N^*f, N^*f) = \|N^*f\|^2, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$\|Nf\| = \|N^*f\| = \|Rf\|. \tag{19}$$

Пусть $\mathfrak{L}$ — подпространство пространства $\mathfrak{H}$, образованное элементами вида Rf и их пределами, а $\mathfrak{M}$ — ортогональное дополнение подпространства $\mathfrak{L}$. Очевидно, $\mathfrak{M}$ состоит из тех элементов h, для которых $Rh = 0$ или, что в силу (19) сводится к тому же, $Nh = 0$ или $N^*h = 0$. Но множество элементов h, для которых $N^*h = 0$, является ортогональным дополнением множества $\mathfrak{L}'$ элементов вида Nf и их пределов; следовательно, $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}'$.

Поставим в соответствие каждому элементу вида $g = Rf$ элемент $Ug = Nf$; последний определяется однозначно, так как если $Rf = Rf'$, то $R(f - f') = 0$, откуда, в силу (19), следует, что $N(f - f') = 0$ и $Nf = Nf'$. Такое соответствие однородно, аддитивно и, кроме того, изометрично: $\|Ug\| = \|g\|$. Продолжив его по непрерывности на все элементы, принадлежащие $\mathfrak{L}$, мы получим изометричный оператор U, отображающий подпространство $\mathfrak{L}$ само в себя; этот оператор — даже унитарный, так как элементы вида Nf и их пределы заполняют все $\mathfrak{L}$ целиком. Оператор U можно продолжить так, чтобы он стал унитарным оператором во всем пространстве $\mathfrak{H}$; для этого достаточно задать его на ортогональном дополнении $\mathfrak{M}$ в виде произвольного унитарного оператора, отображающего $\mathfrak{M}$ само в себя (хотя бы в виде тождественного оператора), а во всем пространстве $\mathfrak{H} = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{M}$ доопределить его естественным образом по свойству аддитивности.

Тождество $Nf = URf$ удовлетворяется, в силу самого определения оператора U, на элементах вида Rf. Что же касается тождества $Nf = RUf$, то оно очевидно для элементов подпространства $\mathfrak{M}$ и верно также для элементов g подпространства $\mathfrak{L}$, так как любой из них может быть представлен в виде

$$g = \lim_{n \to \infty} Rf_n,$$

откуда следует, что

$$Ng = \lim_{n \to \infty} NRf_n = \lim_{n \to \infty} RNf_n = R \lim_{n \to \infty} Nf_n = R \lim_{n \to \infty} URf_n = \\ = RU \lim_{n \to \infty} Rf_n = RUg.$$

Таким образом, $Nf = RUf$ для всех элементов f пространства $\mathfrak{H}$. Формула (18) доказана.

Заметим еще, что оператор R, очевидно, перестановочен со всяким оператором A, который, в свою очередь, перестановочен с N и с N^*. То же относится и к оператору U, если этот последний определен в подпространстве $\mathfrak{M}$ как тождественный оператор. В самом деле, с одной стороны,

$$AURf = ANf = NAf = URAf = UARf,$$

откуда вытекает, что

$$AUg = UAg$$

для всех элементов g вида Rf и, следовательно, во всем подпространстве $\mathfrak{L}$; с другой стороны, если g принадлежит $\mathfrak{M}$, то Ag также принадлежит $\mathfrak{M}$, так как $RAg = ARg = 0$, поэтому

$$AUg = Ag = UAg.$$

Проведенные здесь рассуждения частично применимы не только к нормальному оператору N, но и к произвольному оператору T. В этом общем случае также можно образовать положительный симметричный оператор $R = (T^*T)^{1/2}$, обладающий тем свойством, что $\|Tf\| = \|Rf\|$ для всех f; отсюда, так же как и выше, будет следовать, что оператор U, определенный на элементах вида $g = Rf$ с помощью равенства $Ug = Tf$, однороден, аддитивен и изометричен и что он может быть продолжен с сохранением этих свойств на все подпространство $\mathfrak{L}$. Но элементы Ug могут не принадлежать $\mathfrak{L}$, и продолжить U как унитарный оператор на все пространство $\mathfrak{H}$, вообще говоря, не удается. Положив $Ug = 0$ для элементов g, принадлежащих ортогональному дополнению $\mathfrak{M}$, можно продолжить U на все пространство $\mathfrak{H}$ как оператор *частично изометричный*; так называется линейный оператор в пространстве $\mathfrak{H}$, изометричный лишь в некотором его подпространстве и равный нулю на соответствующем ортогональном дополнении.

Резюмируем полученные результаты:

Теорема. *Всякий линейный оператор T в гильбертовом пространстве может быть представлен в виде $T = UR$, где R — положительный симметричный оператор, а U — частично изометричный оператор. Если оператор T нормален, $T = N$, то в качестве U можно взять унитарный оператор, причем U и R оказываются перестановочными как между собой, так и с любым линейным оператором, перестановочным одновременно с N и с N^*.*

111. Спектральное разложение нормальных операторов. Функции нескольких операторов. Любая из формул (17) и (18) приводит к *спектральному разложению* нормального оператора N.

Пусть $\{E_\lambda^X\}$ и $\{E_\lambda^Y\}$ — спектральные семейства симметричных операторов X и Y, заданные на отрезке $-\|N\| \leqslant \lambda \leqslant \|N\|$. При любых фиксированных значениях x и y операторы E_x^X и E_y^Y представляют собой пределы многочленов соответственно от X и от Y, а следовательно, пределы многочленов от N и N^*. Отсюда, в частности, следует, что $E_x^X \smile E_y^Y$. При этом

$$N = X + iY = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dE_x^X \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dE_y^Y + i \int_{-\infty}^{\infty} dE_x^X \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y\,dE_y^Y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x+iy)\,dE_x^X\,dE_y^Y. \quad (20)$$

Это равенство следует понимать в том смысле, что суммы

$$\sum_{h,\,k} z_{hk} \left(E_{x_h}^X - E_{x_{h-1}}^X\right) \left(E_{y_k}^Y - E_{y_{k-1}}^Y\right),$$

соответствующие разбиению комплексной плоскости на прямоугольники

$$\delta_{hk} = [x_{h-1} < x \leqslant x_h, \quad y_{k-1} < y \leqslant y_k],$$

в каждом из которых произвольным образом выбрана точка $z_{hk} = x_{hk} + iy_{hk}$, сходятся по норме к оператору N, когда указанные разбиения становятся бесконечно мелкими. Так как $E_x^X \smile E_h^Y$, то произведения

$$E(\delta_{hk}) = \left(E_{x_h}^X - E_{x_{h-1}}^X\right) \left(E_{y_k}^Y - E_{y_{k-1}}^Y\right)$$

представляют собой проекционные операторы, причем попарно ортогональные; им будет соответствовать представление пространства $\mathfrak{H}$ в виде векторной суммы попарно ортогональных подпространств.

По аналогии с (20) имеем

$$N^* = X - iY = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-iy)\,dE_x^X\,dE_y^Y. \quad (20a)$$

Вообще из соотношений

$$X^r Y^s = \int_{-\infty}^{\infty} x^r\,dE_x^X \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y^s\,dE_y^Y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s\,dE_x^X\,dE_y^Y \;(r,\ s = 0, 1, 2, \ldots)$$

следует, что

$$p(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,dE_x^X\,dE_y^Y, \quad (21)$$

где

$$p(x, y) = \sum_{r,\,s} c_{rs} x^r y^s$$

— произвольный многочлен, а

$$p(X, Y) = \sum_{r,\,s} c_{rs} X^r Y^s$$

— соответствующий оператор. Тот же самый результат можно выразить формулой

$$q(N, N^*) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(z, \bar{z})\, dE_x^X\, dE_y^Y, \tag{22}$$

где $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$,

$$q(z, \bar{z}) = \sum_{r, s} d_{rs} z^r \bar{z}^s$$

— произвольный многочлен, а

$$q(N, N^*) = \sum_{r, s} d_{rs} N^r N^{*s}$$

— соответствующий оператор. Формула (22) охватывает, очевидно, формулы (20) и (20а) как частные случаи.

Проекционный оператор $E(\delta)$ как функция переменного прямоугольника δ *аддитивен* и *мультипликативен*; это означает, что, каковы бы ни были прямоугольники δ_1 и δ_2, не имеющие общих точек и в объединении дающие новый прямоугольник, непременно

$$E(\delta_1) + E(\delta_2) = E(\delta_1 \cup \delta_2)$$

и при произвольных прямоугольниках δ_1 и δ_2

$$E(\delta_1) E(\delta_2) = E(\delta_1 \cap \delta_2),$$

где в правой части следует брать O в том случае, когда множество $\delta_1 \cap \delta_2$ пусто. Если δ охватывает замкнутый прямоугольник

$$\Delta = [m_X \leqslant x \leqslant M_X,\ m_Y \leqslant y \leqslant M_Y],$$

где m_X, M_X и m_Y, M_Y означают соответственно нижнюю и верхнюю грани операторов X и Y, то $E(\delta) = I$; следовательно, $E(\delta) = O$, если прямоугольник δ целиком лежит вне Δ. Во всех этих утверждениях, без труда поддающихся проверке, целесообразно рассматривать полуоткрытые прямоугольники

$$\delta = [x_1 < x \leqslant x_2, \quad y_1 < y \leqslant y_2],$$

так как пересечение таких прямоугольников, если только оно не пусто, всегда является прямоугольником того же типа.

На произвольные прямоугольники функция $E(\delta)$ распространяется очевидным образом; так, в случае открытого прямоугольника $\delta = [x_1 < x < x_2,\ y_1 < y < y_2]$ мы полагаем

$$E(\delta) = (E_{x_2-0}^X - E_{x_1}^X)(E_{y_2-0}^Y - E_{y_1}^Y);$$

в случае замкнутого прямоугольника $\delta = [x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\ y_1 \leqslant y \leqslant y_2]$

$$E(\delta) = (E_{x_2}^X - E_{x_1-0}^X)(E_{y_2}^Y - E_{y_1-0}^Y).$$

Аддитивное и мультипликативное свойства при этом сохраняются, и функция $E(\delta)$ оказывается даже счетно-аддитивной или, что эквивалентно, непрерывной в том смысле, что

$$\lim_{n\to\infty} E(\delta_n) = E\left(\bigcup_n \delta_n\right),$$

если $\delta_1 \subset \delta_2 \subset \ldots$, и

$$\lim_{n\to\infty} E(\delta_n) = E\left(\bigcap_n \delta_n\right),$$

если $\delta_1 \supset \delta_2 \supset \ldots$.

В формулах (20)—(22) интегралы берутся по этой аддитивной и мультипликативной функции прямоугольника $E(\delta)$, что можно подчеркнуть в обозначениях, написав $E(dx\,dy)$ вместо $dE^X_x\,dE^Y_y$.

Итак, сформулируем полученные результаты:

Теорема[1]). *Любому нормальному оператору N соответствует семейство проекционных операторов $\{E(\delta)\}$, являющихся аддитивной и мультипликативной функцией прямоугольника, таким образом, что*

$$N = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} z\,E(dx\,dy), \qquad N^* = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{z}\,E(dx\,dy)$$

и вообще

$$q(N, N^*) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q(z, \bar{z})\,E(dx\,dy),$$

где $q(z, \bar{z})$—произвольный многочлен от $z = x + iy$ и от $\bar{z} = x - iy$; при любом фиксированном прямоугольнике δ оператор $E(\delta)$ является пределом некоторой последовательности многочленов от операторов N и N^*.

Область интегрирования можно ограничить прямоугольником Δ или даже кругом $x^2 + y^2 = \bar{z}z \leqslant \|N\|^2$, так как для любого прямоугольника δ, находящегося на расстоянии $\varepsilon > 0$ от этого круга, $E(\delta) = O$. Чтобы в этом убедиться, возьмем произвольный элемент g вида $g = E(\delta) f$; для него будут выполняться соотношения

$$\|N\|^2\|g\|^2 \geqslant \|Ng\|^2 = (N^*Ng, g) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{z}z\,(E(dx\,dy)\,g, g) \geqslant$$

$$\geqslant (\|N\| + \varepsilon)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (E(dx\,dy)\,g, g) = (\|N\| + \varepsilon)^2 \|g\|^2,$$

так как для любого δ', не пересекающегося с δ, $E(\delta')\,g = E(\delta')\,E(\delta)\,f = 0$ и, следовательно, интеграл можно брать только по прямоугольнику δ, а в этом прямоугольнике $|z| \geqslant \|N\| + \varepsilon$.

---

[1]) См. Виитнер [1] (стр. 281); И. Нейман [2].

Полученное неравенство возможно только при $\|g\|=0$, т. е. при $g=0$.

В том случае, когда существует такая постоянная $m>0$, что $\|Nf\| \geqslant m\|f\|$ для всех f, подобным же рассуждением можно показать, что $E(\delta)=O$, каков бы ни был прямоугольник δ, лежащий целиком внутри круга $x^2+y^2=\bar{z}z \leqslant m^2$.

В частности, если N — *унитарный* оператор, $N=U$, то $\|Uf\|= =\|f\|$ для любого f, и, следовательно, $E(\delta)=O$ для любого прямоугольника δ, лежащего либо целиком внутри круга $x^2+y^2= =\bar{z}z=1$, либо целиком вне этого круга. Можно сказать, что в этом случае вся „спектральная масса" сосредоточена на единичной окружности $x^2+y^2=1$. Пусть $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ — прямоугольники, покрывающие дугу $0<\psi \leqslant \varphi$ единичной окружности так, что каждая точка такой дуги принадлежит только одному из δ_k и никаких других точек единичной окружности эти прямоугольники не содержат. Сумма $\sum_1^n E(\delta_k)$ зависит при этом только от выбранной дуги, т. е. от φ; если обозначить ее E_φ^U, то, как легко видеть, $\{E_\varphi^U\}$ будет представлять собой спектральное семейство унитарного оператора U, т. е.

$$U=\int_0^{2\pi} e^{i\varphi}\, dE_\varphi^U.$$

Обратно, если исходить из представления (18) заданного нормального оператора N, то с помощью спектральных семейств $\{E_r^R\}$ и $\{E_\varphi^U\}$ положительного симметричного оператора R и унитарного оператора U можно получить спектральное разложение оператора N в виде

$$N=RU=\int_0^\infty r\, dE_r^R \cdot \int_0^{2\pi} e^{i\varphi}\, dE_\varphi^U=\int_0^\infty \int_0^{2\pi} r e^{i\varphi}\, dE_r^R\, dE_\varphi^U=\int_0^\infty \int_0^{2\pi} z \widehat{E}\,(dr\, d\varphi),$$

где $z=re^{i\varphi}$ и $\widehat{E}(\widehat{\delta})$ означает аддитивную и мультипликативную функцию области

$$\widehat{\delta}=[r_1<r \leqslant r_2,\ \varphi_1<\varphi \leqslant \varphi_2],$$

определенную равенством

$$\widehat{E}(\widehat{\delta})=(E_{r_2}^R-E_{r_1}^R)(E_{\varphi_2}^U-E_\varphi^U).$$

Одну из полученных интегральных формул можно преобразовать в другую, перейдя от декартовых координат x, y к полярным r, φ, или обратно.

Исходя из формулы (21), справедливой для многочленов, можно определить операторы $u(X, Y)$, соответствующие более общим, в частности любым непрерывным, функциям $u(x, y)$; соответствие при этом остается однородным, аддитивным и мультипликативным.

Аналогичное построение осуществимо также в случае *n переменных*. Пусть заданы n перестановочных симметричных операторов

$$X_k = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda^{(k)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Произвольному „n-мерному прямоугольнику"

$$\delta = [a_k < x_k \leqslant b_k; \ k = 1, 2, \ldots, n]$$

ставим в соответствие оператор

$$E(\delta) = \prod_{k=1}^{n} (E_{b_k}^{(k)} - E_{a_k}^{(k)});$$

в случае открытого прямоугольника или прямоугольника, к которому присоединены какие-нибудь другие его „стороны", определение $E(\delta)$ видоизменяется очевидным образом. Как функция прямоугольника $E(\delta)$ оказывается аддитивной (даже счетно-аддитивной) и мультипликативной; далее, $E(\varnothing) = O$, где $\varnothing$ — пустое множество, и $E(\Delta) = I$, где

$$\Delta = [m_{X_k} \leqslant x_k \leqslant M_{X_k}; \quad k = 1, 2, \ldots, n].$$

Для любого многочлена $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет выполняться формула

$$p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \int \ldots \int_{\Delta} p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \, E(dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n),$$

где интеграл понимается как предел по норме соответствующих интегральных сумм типа Стильтьеса — Римана. Та же формула позволяет распространить соответствие между функциями и операторами на более широкий класс функций, в частности на всевозможные непрерывные в области Δ функции. Такое соответствие однородно, аддитивно и мультипликативно.

Описанный метод применим также в случае *бесконечного множества перестановочных симметричных операторов*

$$X_k = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda^{(k)} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

В соответствующем пространстве Q^∞, состоящем из точек $x = (x_1, x_2, \ldots)$ с бесконечным множеством координат, роль прямоугольника играет множество δ точек, некоторые выбранные координаты которых, в конечном числе, принадлежат заданным линейным интервалам $(a_k, b_k]$, а все остальные произвольны. Функция $E(\delta)$ определяется как произведение проекционных операторов $E_{b_k}^{(k)} - E_{a_k}^{(k)}$, соответствующих указанным интервалам (или аналогичное произведение с $b_k - 0$ и $a_k - 0$ вместо b_k и a_k). Аддитивное и мультипликативное свойства $E(\delta)$ устанавливаются без труда, и оператор $u(X_1, X_2, \ldots)$, соответствующий функции $u(x_1, x_2, \ldots)$, определяется как интеграл от u

по аддитивной функции прямоугольника $E(\delta)$. Такое построение осуществимо, по крайней мере для функций u, непрерывных в замкнутой области

$$\Delta=\left[m_{X_k}\leqslant x_k\leqslant M_{X_k};\quad k=1,\ 2,\ \ldots\right].$$

Непрерывность функции $u(x)$ в точке x^* в этом случае означает, что для всякого $\varepsilon>0$ существует прямоугольник, содержащий внутри себя точку x^*, такой, что для любой другой его точки x выполняется неравенство $|u(x)-u(x^*)|<\varepsilon$. Иначе говоря, функция непрерывна в точке $x^*=(x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots)$, если ее значение изменяется незначительно при малых изменениях конечного числа координат x_k^* и при произвольных изменениях остальных координат. Теорема Бореля справедлива в пространстве Q^∞, если речь идет о покрытиях замкнутой области Δ посредством открытых прямоугольников. Следовательно, если функция $u(x)$ непрерывна во всех точках области Δ, то, каково бы ни было $\varepsilon>0$, существует конечная система прямоугольников, покрывающая Δ, такая, что в любой части области Δ, если только она заключена в одном прямоугольнике, принадлежащем указанной системе, колебание функции $u(x)$ меньше ε. Существование интеграла непрерывной функции $u(x)$ по функции $E(\delta)$, т. е. предела соответствующих сумм типа Стильтьеса—Римана в смысле сходимости по норме, доказывается так же, как в случае обыкновенного интеграла. Разбиения области Δ следует выбрать таким образом, чтобы соответствующие разбиения любой фиксированной „стороны" Δ становились бесконечно мелкими.

§ 3. УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ L^2

112. Теорема Бохнера. Рассмотрим пространство L^2 функций, заданных на интервале $(a,\ b)$, где $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$. Унитарные операторы в этом пространстве могут быть следующим образом охарактеризованы „аналитически":

Теорема[1]). *Любому унитарному оператору $g=Uf$ в пространстве L^2 соответствуют функции $K(\xi,\ x)$ и $H(\xi,\ x)$, заданные в квадрате ($a<\xi<b$; $a<x<b$), принадлежащие, при любом фиксированном значении ξ, пространству L^2 и обладающие тем свойством, что*

$$\int_0^\xi g(x)\,dx=\int_a^b\overline{K(\xi,\ x)}\,f(x)\,dx\quad\text{и}\quad\int_0^\xi f(x)\,dx=\int_a^b\overline{H(\xi,\ x)}\,g(x)\,dx;\tag{23}$$

кроме того, эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned}&\text{а)}\ \int_a^b\overline{K(\xi,\ x)}\,K(\eta,\ x)\,dx\\&\text{б)}\ \int_a^b\overline{H(\xi,\ x)}\,H(\eta,\ x)\,dx\end{aligned}\right\}=\min\{|\xi|,\ |\eta|\}\ \text{или}\ 0\ \text{соответственно при}\ \xi\eta\geqslant0\ \text{и при}\ \xi\eta\leqslant0,$$

$$\text{в)}\ \int_0^\eta K(\xi,\ x)\,dx=\int_0^\xi\overline{H(\eta,\ x)}\,dx.$$

---

[1]) Бохнер [3].