по аддитивной функции прямоугольника $E(\delta)$. Такое построение осуществимо, по крайней мере для функций u, непрерывных в замкнутой области

$$\Delta=\left[m_{X_k}\leqslant x_k\leqslant M_{X_k};\quad k=1,\ 2,\ \ldots\right].$$

Непрерывность функции $u(x)$ в точке x^* в этом случае означает, что для всякого $\varepsilon>0$ существует прямоугольник, содержащий внутри себя точку x^*, такой, что для любой другой его точки x выполняется неравенство $|u(x)-u(x^*)|<\varepsilon$. Иначе говоря, функция непрерывна в точке $x^*=(x_1^*, x_2^*, \ldots)$, если ее значение изменяется незначительно при малых изменениях конечного числа координат x_k^* и при произвольных изменениях остальных координат. Теорема Бореля справедлива в пространстве Q^∞, если речь идет о покрытиях замкнутой области Δ посредством открытых прямоугольников. Следовательно, если функция $u(x)$ непрерывна во всех точках области Δ, то, каково бы ни было $\varepsilon>0$, существует конечная система прямоугольников, покрывающая Δ, такая, что в любой части области Δ, если только она заключена в одном прямоугольнике, принадлежащем указанной системе, колебание функции $u(x)$ меньше ε. Существование интеграла непрерывной функции $u(x)$ по функции $E(\delta)$, т. е. предела соответствующих сумм типа Стильтьеса—Римана в смысле сходимости по норме, доказывается так же, как в случае обыкновенного интеграла. Разбиения области Δ следует выбрать таким образом, чтобы соответствующие разбиения любой фиксированной „стороны" Δ становились бесконечно мелкими.

§ 3. УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ L^2

112. Теорема Бохнера. Рассмотрим пространство L^2 функций, заданных на интервале (a, b), где $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$. Унитарные операторы в этом пространстве могут быть следующим образом охарактеризованы „аналитически":

Теорема[1]). *Любому унитарному оператору $g=Uf$ в пространстве L^2 соответствуют функции $K(\xi, x)$ и $H(\xi, x)$, заданные в квадрате ($a<\xi<b$; $a<x<b$), принадлежащие, при любом фиксированном значении ξ, пространству L^2 и обладающие тем свойством, что*

$$\int_0^\xi g(x)\,dx=\int_a^b\overline{K(\xi, x)}\,f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^\xi f(x)\,dx=\int_a^b\overline{H(\xi, x)}\,g(x)\,dx; \tag{23}$$

кроме того, эти функции удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned}&\text{а)}\ \int_a^b\overline{K(\xi, x)}\,K(\eta, x)\,dx\\ &\text{б)}\ \int_a^b\overline{H(\xi, x)}\,H(\eta, x)\,dx\end{aligned}\right\}=\min\{|\xi|,\ |\eta|\}\ \textit{или}\ 0\ \textit{соответственно при}\ \xi\eta\geqslant0\ \textit{и при}\ \xi\eta\leqslant0,$$

$$\text{в)}\ \int_0^\eta K(\xi, x)\,dx=\int_0^\xi\overline{H(\eta, x)}\,dx.$$

[1]) Бохнер [3].

Обратно, всякая пара функций $K(\xi, x)$ и $H(\xi, x)$, обладающая перечисленными свойствами, порождает, согласно формулам (23), *некоторый унитарный оператор в пространстве L^2 и оператор, ему обратный.*

Имея некоторый заданный унитарный оператор U в пространстве L^2, определим функции K и H равенствами

$$H(\xi, x) = Ue_\xi(x) \quad \text{и} \quad K(\xi, x) = U^{-1}e_\xi(x),$$

где $e_\xi(x)$ означает функцию, равную $\operatorname{sgn}\xi$ для x, заключенных между 0 и ξ, и тождественно равную нулю вне этого интервала. Так как U и U^{-1} — изометричные операторы, то, положив $g = Uf$, получим

$$(g, e_\xi) = (Uf, e_\xi) = (f, U^{-1}e_\xi), \quad (f, e_\xi) = (U^{-1}g, e_\xi) = (g, Ue_\xi),$$

т. е. как раз формулы (23). Положив, в частности, сначала

$$f = U^{-1}e_\eta, \quad g = Uf = e_\eta,$$

а потом

$$f = e_\eta, \quad g = Uf = Ue_\eta,$$

мы сведем формулы (23) к уравнениям а) — в).

Перейдем к обратному предложению. Если функции $K(\xi, x)$ и $H(\xi, x)$ заданы, то определим некоторые операторы U и V сначала на функциях $e_\xi(x)$, положив

$$Ue_\xi(x) = H(\xi, x), \quad Ve_\xi(x) = K(\xi, x).$$

При этом, в силу (23), будем иметь

$$(Ve_\xi, Ve_\eta) = (e_\xi, e_\eta), \quad (Ue_\xi, Ue_\eta) = (e_\xi, e_\eta), \quad (Ve_\xi, e_\eta) = (e_\xi, Ue_\eta). \quad (24)$$

Пусть теперь $f(x)$ — какая-нибудь ступенчатая функция. Ее можно представить, притом единственным образом, в виде линейной комбинации функций $e_\xi(x)$; тогда Uf и Vf можно будет определить как линейные комбинации соответствующих Ue_ξ и Ve_ξ, взятых с теми же коэффициентами. Соотношения (24) распространятся при этом на произвольные ступенчатые функции f и g:

$$(Vf, Vg) = (f, g), \quad (Uf, Ug) = (f, g), \quad (Vf, g) = (f, Ug).$$

Это означает, что U и V представляют собой взаимно сопряженные симметричные операторы, по крайней мере в той области, где они в настоящий момент определены, т. е. на множестве линейных комбинаций ступенчатых функций. Но это множество всюду плотно в пространстве L^2, поэтому операторы U и V могут быть продолжены на все L^2 по непрерывности, притом так, что свойства взаимной сопряженности и изометрии сохраняются, т. е. выполняются равенства

$$U^*U = I, \quad V^*V = I \text{ и } U = V^*.$$

Отсюда видно, что оператор U имеет левый обратный U^* и правый обратный V, следовательно, U^{-1} существует и равен U^* и V (см. п. 67).

Таким образом, оператор U — унитарный, и так как функции K и H, которые ему соответствуют в смысле нашей теоремы, очевидно, совпадают с исходными K и H, то U и U^{-1} представляются аналитически формулами (23); на этом доказательство теоремы завершается.

113. Трансформации Фурье — Планшереля и Ватсона. Рассмотрим, в частности, функции

$$K(\xi, x) = \frac{\overline{\chi(\xi x)}}{x} \quad \text{и} \quad H(\xi, x) = \frac{\chi(\xi x)}{x},$$

где χ выбрана так, чтобы частное $\chi(x)/x$ принадлежало $L^2(-\infty, \infty)$ и чтобы для любых ξ и η из интервала (a, b) выполнялось равенство

$$\int_a^b \frac{\overline{\chi(\xi x)}\,\chi(\xi x)}{x^2}\,dx = \begin{cases} \min\{|\xi|, |\eta|\} & \text{при } \xi\eta \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } \xi\eta \leqslant 0. \end{cases}$$

Все условия обратной теоремы, только что доказанной, выполнены [в частности, условие в) выполнено автоматически], поэтому *формулы*

$$g(x) = \frac{d}{dx}\int_a^b \frac{\chi(xy)}{y} f(y)\,dy \quad \text{и} \quad f(x) = \frac{d}{dx}\int_a^b \frac{\overline{\chi(xy)}}{y} g(y)\,dy$$

определяют некоторый унитарный оператор, отображающий пространство $L^2(a, b)$ само в себя, и оператор, ему обратный.

Функции $g(x)$ и $f(x)$ являются, одна относительно другой, „обобщенными трансформациями“ Ватсона[1]). Они являются обобщением трансформации Фурье—Планшереля, соответствующей интервалу $(-\infty, \infty)$ и функции

$$\chi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-ix}-1}{-i}.$$

В самом деле, функция $(e^{-ix}-1)/x$ принадлежит $L^2(-\infty, \infty)$ и

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(e^{i\xi x}-1)(e^{i\eta x}-1)}{x^2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\xi-\eta)x - \cos\xi x - \cos\eta x + 1}{x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\{|\xi| + |\eta| - |\xi-\eta|\}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du = \frac{1}{2}\{|\xi| + |\eta| - |\xi-\eta|\} =$$

$$= \begin{cases} \min\{|\xi|, |\eta|\} & \text{при } \xi\eta \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } \xi\eta \leqslant 0. \end{cases}$$

[1]) Ватсон [1], Титчмарш [1], Планшерель [2].

Таким образом, получена

Теорема[1]). *Формулы*

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}f(y)\,dy,$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixy}-1}{iy}g(y)\,dy$$

определяют в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ некоторый унитарный оператор и его обратный. Этим формулам можно придать классическую форму

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixy}f(y)\,dy,\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixy}g(y)\,dy,$$

если под интегралами понимать пределы в среднем (по переменному x) соответствующих интегралов, распространенных на интервал от $-\omega$ до ω, при $\omega\to\infty$.

Для того чтобы доказать последнее утверждение, возьмем функцию $f_\omega(x)$, совпадающую с $f(x)$ на интервале $-\omega\leqslant x\leqslant\omega$ и равную нулю вне этого интервала, и рассмотрим ее трансформацию, которую мы обозначим $g_\omega(x)$. Тогда будем иметь

$$g_\omega(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{-\omega}^{\omega}\frac{e^{-i(x+h)y}-e^{-ixy}}{-iy}f(y)\,dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{h\to 0}\int_{-\omega}^{\omega}\frac{\sin\frac{hy}{2}}{\frac{hy}{2}}e^{-i\frac{hy}{2}}e^{-ixy}f(y)\,dy.$$

Функция, стоящая под знаком интеграла, не превосходит по модулю функцию $|f(x)|$, суммируемую в конечном интервале; поэтому, согласно теореме Лебега, возможен предельный переход под знаком интеграла. Таким образом,

$$g_\omega(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\omega}e^{-ixy}f(y)\,dy.$$

При $\omega\to\infty$ функция $f_\omega(x)$, очевидно, сходится в среднем к $f(x)$. Так как рассматриваемый оператор изометричен, то $g_\omega(x)$ также сходится в среднем к трансформации функции $f(x)$, т. е. к $g(x)$; тем самым первая формула доказана. Вторая, относящаяся к обратному оператору, может быть установлена подобным же образом.

---

[1]) Планшерель [1].

Пусть U есть оператор Фурье—Планшереля, определяемый только что доказанными формулами; легко видеть, что

$$\overline{U}f(x)=U^{-1}f(-x)$$

и, следовательно,

$$U^2f(x)=f(-x), \quad U^4f(x)=f(x).$$

С помощью несложных вычислений, основанных только на соотношениях

$$U^*=U^{-1}, \quad U^{k+4}=U^kU^4=U^k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

можно убедиться в том, что

$$P_0=\frac{1}{4}(I+U+U^2+U^3), \quad P_1=\frac{1}{4}(I-iU-U^2+iU^3),$$

$$P_2=\frac{1}{4}(I-U+U^2-U^3), \quad P_3=\frac{1}{4}(I+iU-U^2-iU^3)$$

представляют собой проекционные операторы, попарно ортогональные и в сумме дающие I; далее

$$UP_k=i^kP_k \quad (k=0, 1, 2, 3).$$

Отсюда следует, что оператор U имеет собственные значения

$$1, \ i, \ -1, \ -i$$

и любой элемент f прострайства L^2 представляется в виде суммы четырех взаимно ортогональных собственных элементов, соответствующих этим собственным значениям. „Спектральное разложение“ оператора U имеет, таким образом, очень простой вид

$$U=U(P_0+P_1+P_2+P_3)=P_0+iP_1-P_2-iP_3,$$

или, иначе,

$$U=\int_0^{2\pi} e^{i\lambda}\,dE_\lambda,$$

где E_λ равно

$$O, \ P_1, \ P_1+P_2, \ P_1+P_2+P_3, \ I$$

соответственно при

$$0\leqslant\lambda<\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}\leqslant\lambda<\pi, \quad \pi\leqslant\lambda<\frac{3\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}\leqslant\lambda<2\pi, \quad \lambda=2\pi.$$