Глава VIII

НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

114. Теорема Хеллиигера и Теплица. Общее поиятие лииейного оператора. До сих пор мы рассматривали линейные операторы в гильбертовом пространстве, которые, согласно определению, были заданы во всем пространстве и обладали свойствами аддитивности, однородиости и ограничеииости. Однако в аиализе и в математической физике встречаются примеры операторов, аддитивных и однородных, но определенных не на всех элементах пространства $\mathfrak{H}$ и не ограниченных. Таков, иапример, в пространстве L^2 оператор, ставящий в соответствие всякой абсолютно непрерывной функции ее производную, если только она тоже принадлежит простраиству L^2; этот оператор играет важиую роль в волновой механике. Ясно, что он задан на множестве, всюду плотном в пространстве L^2, но не исчерпывающем все L^2. Кроме того, этот оператор неограничен: в самом деле, функции $e^{2\pi inx}$ как элементы $L^2(0, 1)$ имеют нормы, равные 1, тогда как нормы их производных $2\pi ine^{2\pi inx}$ равны $2\pi n$ и неограниченно возрастают вместе с n.

Здесь уместно отметить связь, существующую, по крайней мере в случае симметричного оператора, между ограниченностью и свойством быть определенным всюду. Справедлива следующая теорема, принадлежащая Хеллингеру и Теплицу[1]):

Теорема. *Всякий оператор, определенный на всех элементах гильбертова пространства, если он аддитивен, однороден и симметричен, т. е. удовлетворяет условию $(Af, g) = (f, Ag)$, непременно ограничен.*

Допустим противное; тогда существует последовательность элементов g_n, такая, что

$$\|g_n\| = 1 \quad \text{и} \quad \|Ag_n\| \to \infty.$$

Рассмотрим последовательность лииейиых функционалов

$$L_n(f) = (Af, g_n) = (f, Ag_n).$$

Для них выполняются неравенства

$$|L_n(f)| \leqslant \|Af\| \|g_n\| = \|Af\| \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

[1]) Хеллиигер и Теплиц [1] (в частности, стр. 321—327); см. также Стоун [2] (теорема 2.23).

означающие, что, каков бы ни был элемент f, числовая последовательность $\{L_n(f)\}$ ограничена. Но отсюда следует (см. п. 31), что нормы функционалов L_n также ограничены. Итак, существует такая постоянная C, что

$$\|L_n(f)\| \leqslant C\|f\|$$

для $n=1, 2, \ldots$ и для всех элементов f пространства $\mathfrak{H}$. Положив, в частности, $f=Ag_n$, получим

$$\|Ag_n\|^2=(Ag_n, Ag_n)=L_n(Ag_n) \leqslant C\|Ag_n\|,$$

что противоречит предположениям относительно Ag_n. Теорема доказана.

Вскоре мы увидим, что эта теорема может быть распространена на некоторые несимметричные операторы.

После этого отступления вернемся к нашей задаче: обобщить понятие линейного оператора так, чтобы охватить неограниченные операторы, заданные к тому же не на всем пространстве $\mathfrak{H}$.

Введем следующее общее определение:

Назовем линейным оператором в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ всякую функцию T, которая любому элементу f из некоторого линейного подмножества $\mathfrak{D}_T$ пространства $\mathfrak{H}$ ставит в соответствие элемент Tf из $\mathfrak{H}$, причем это соответствие аддитивно и однородно, т. е.

$$1^\circ\ T(f_1+f_2)=Tf_1+Tf_2, \quad 2^\circ\ T(cf)=cTf.$$

Линейное множество $\mathfrak{D}_T$ называется при этом *областью определения* или просто *областью* оператора T; $\mathfrak{D}_T$ во всяком случае содержит элемент 0 и всегда $T0=0$.

Два линейных оператора считаются *равными* в том случае, когда их области совпадают и значения самих операторов всюду равны. Если область оператора T' содержит область оператора T и если на $\mathfrak{D}_T$ оба оператора совпадают, то T' называется *расширением* оператора T; это записывается в виде

$$T' \supseteq T \quad \text{или} \quad T \subseteq T'.$$

Если оператор T *ограничен*, т. е. существует постоянная C, такая, что

$$\|Tf\| \leqslant C\|f\|$$

для всех элементов f из $\mathfrak{D}_T$, то T всегда может быть продолжен по непрерывности на замыкание $[\mathfrak{D}_T]$ множества $\mathfrak{D}_T$. Если линейное множество $\mathfrak{D}_T$ не всюду плотно в $\mathfrak{H}$, т. е. его замыкание $[\mathfrak{D}_T]$ не совпадает с $\mathfrak{H}$, то T можно продолжить даже за пределы $[\mathfrak{D}_T]$, например, положив $Tf=0$ на ортогональном дополнении подпространства $[\mathfrak{D}_T]$ и далее продолжив T по свойству аддитивности. Продолженный таким образом оператор будет, очевидно, по-прежнему удовлетворять условию ограниченности с той же постоянной C.

Таким образом, не нарушая общности выводов, можно предполагать, что всякий ограниченный оператор задан во всем пространстве $\mathfrak{H}$. Поэтому мы условимся в дальнейшем, говоря об *ограниченном линейном операторе*, всегда предполагать, если только не оговорено противное, что *область определения такого оператора совпадает с* $\mathfrak{H}$, т. е. условимся называть этим термином то, что до сих пор мы называли просто линейным оператором.

Суммы и произведения операторов определяются, по крайней мере формально, так же, как и раньше:

$$(T_1+T_2)f=T_1f+T_2f, \quad (cT)f=cTf, \quad (T_1T_2)f=T_1(T_2f).$$

Некоторые трудности, однако, возникают в связи с тем, что области определения операторов не совпадают теперь со всем пространством. Теперь *областью оператора* T_1+T_2 *служит пересечение областей слагаемых, а область произведения* T_1T_2 *состоит из тех элементов области оператора* T_2, *для которых* T_2f *принадлежит области оператора* T_1. Может случиться, что сумма и произведение двух линейных операторов определены только для единственного элемента 0. Это возможно даже тогда, когда рассматривается квадрат линейного оператора, имеющего всюду плотную область определения.

Очевидным образом обобщается также понятие *обратного* оператора. Оператор T^{-1} можно определить для любого линейного оператора T, обладающего тем свойством, что в любых двух различных точках он принимает различные значения; если это условие выполнено, то, по определению,

$$T^{-1}g=f, \quad \text{если} \quad g=Tf.$$

Областью определения оператора T^{-1} служит „область значений“ исходного оператора T; последняя представляет собой линейное множество. Оператор T^{-1}, очевидно, линеен. Может случиться, что линейный оператор, даже ограниченный, имеет обратный (в этом общем смысле), который определен не во всем пространстве. Так, например, в координатном гильбертовом пространстве линейный оператор

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots)=(0, x_1, x_2, \ldots)$$

имеет обратный, который определен для векторов, первая компонента которых равна нулю. Заметим еще, что условие, обеспечивающее существование обратного оператора, может быть сформулировано так: *Tf равно нулю только при* $f=0$.

Перейдем теперь к обобщению понятия *предела* последовательности операторов. Пусть $\{T_n\}$ — *произвольная* последовательность операторов; ее предел

$$T=\lim_{n\to\infty} T_n$$

определяется формулой
$$Tf = \lim_{n\to\infty} T_n f,$$
которую следует понимать так: Tf определено для тех элементов f, которые принадлежат областям всех операторов T_n, по крайней мере начиная с некоторого n, и для которых сходится последовательность $\{T_n f\}$. Для других f предельный оператор не имеет смысла. Нетрудно проверить справедливость следующих соотношений:

а) $T_1 + T_2 = T_2 + T_1$;

б) $(T_1 + T_2) + T_3 = T_1 + (T_2 + T_3)$;

в) $OT \subseteq O$;

г) $(T_1 T_2) T_3 = T_1 (T_2 T_3)$;

д) $(T_1 + T_2) T_3 = T_1 T_3 + T_2 T_3$;

е) $T_1 (T_2 + T_3) \supseteq T_1 T_2 + T_1 T_3$ (равенство имеет место, в частности, тогда, когда T_1 определен всюду);

ж) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} T_n\right) T = \lim\limits_{n\to\infty} (T_n T)$;

наконец, если и T_1^{-1} и T_2^{-1} существуют, то

з) $(T_1 T_2)^{-1} = T_2^{-1} T_1^{-1}$.

115. Сопряженные операторы. В том случае, когда оператор T ограничен, *сопряженный оператор* T^* был определен посредством равенства
$$(Tf, g) = (f, T^* g),$$
которое предполагалось справедливым для всех элементов f и g из $\mathfrak{H}$. Для того чтобы иметь возможность воспользоваться этой формулой и в общем случае, необходимо дополнительно предположить, что область $\mathfrak{D}_T$ оператора T всюду плотна в $\mathfrak{H}$, так как иначе элемент $T^* g$ не будет определяться однозначно значениями $(f, T^* g)$, соответствующими всевозможным f из $\mathfrak{D}_T$.

Итак, мы приходим к следующему определению:

Пусть T — линейный оператор, область $\mathfrak{D}_T$ которого всюду плотна в $\mathfrak{H}$. Пусть g — какой-нибудь элемент из $\mathfrak{H}$, которому можно поставить в соответствие некоторый элемент g^* таким образом, чтобы равенство
$$(Tf, g) = (f, g^*)$$
выполнялось для всех f из $\mathfrak{D}_T$; при этом g^* однозначно определяется элементом g и формула
$$g^* = T^* g$$
задает некоторый оператор T^*, называемый сопряженным по отношению к оператору T.

Ясно, что T^* — линейный оператор; в самом деле, если g_1 и g_2 принадлежат его области определения, то

$$(Tf,\ c_1g_1+c_2g_2)=\bar{c}_1(Tf,\ g_1)+\bar{c}_2(Tf,\ g_2)=\bar{c}_1(f,\ T^*g_1)+\\ +\bar{c}_2(f,\ T^*g_2)=(f,\ c_1T^*g_1+c_2T^*g_2)$$

для всех f из $\mathfrak{D}_T$; поэтому $c_1g_1+c_2g_2$ также принадлежит $\mathfrak{D}_{T^*}$ и

$$T^*(c_1g_1+c_2g_2)=c_1T^*g_1+c_2T^*g_2.$$

Если оператор T ограничен, то его сопряженный, как мы показали выше (п. 84), всюду определен, ограничен и его норма равна норме оператора T.

В общем случае область оператора T^* не совпадает с $\mathfrak{H}$; она может даже не содержать элементов, отличных от 0. Однако в любом случае оператор T^* обладает следующим свойством:

Если $\{g_n\}$ — последовательность элементов из $\mathfrak{D}_{T^*}$, такая, что

$$g_n\to g \quad \text{и} \quad T^*g_n\to h,$$

то элемент g также принадлежит $\mathfrak{D}_{T^*}$ и $T^*g=h$.

Это вытекает непосредственно из того факта, что скалярное произведение является непрерывной функцией своих множителей; в самом деле,

$$(Tf,\ g)=\lim_n(Tf,\ g_n)=\lim_n(f,\ T^*g_n)=(f,\ h).$$

Это свойство сопряженного оператора принято называть „замкнутостью". Вообще, *линейный оператор S называется замкнутым, если, какова бы ни была последовательность элементов $\{g_n\}$, такая, что*

$$g_n\to g \quad \text{и} \quad Sg_n\to h,$$

элемент g также принадлежит $\mathfrak{D}_S$ и $Sg=h$.

Очевидно, что всякий *непрерывный* и, в частности, всякий линейный *ограниченный* оператор непременно *замкнут*; обратное, вообще говоря, неверно.

Отметим следующие очевидные соотношения:

а) $(cT)^*=\bar{c}T^*$ (при $c\neq 0$);

б) $(T_1+T_2)^*\supseteq T_1^*+T_2^*$;

в) $(T_1T_2)^*\supseteq T_2^*T_1^*$.

Разумеется, б) и в) имеют смысл только тогда, когда области операторов T_1+T_2 и соответственно T_1T_2 всюду плотны в $\mathfrak{H}$.

Не так просто указать случаи, когда в соотношениях б) и в) имеет место *равенство*. Покажем, что $(T_1+T_2)^*=T_1^*+T_2^*$ *и*

$(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$, *в частности, тогда, когда оператор* T_1 *ограничен.*
Для этого достаточно установить обратные включения:

б′) $(T_1+T_2)^* \subseteq T_1^* + T_2^*$;
в′) $(T_1T_2)^* \subseteq T_2^*T_1^*$.

Применим сначала формулу б) к сумме $(T_1+T_2)+(-T_1)$, которая равна T_2 именно потому, что оператор T_1 определен всюду. Прибавив к обеим частям полученного включения

$$T_2^* \supseteq (T_1+T_2)^* - T_1^*$$

оператор T_1^*, придем к соотношению

$$T_1^* + T_2^* \supseteq (T_1+T_2)^* - T_1^* + T_1^* = (T_1+T_2)^*;$$

здесь мы воспользовались тем, что и T_1^* определен всюду. Итак, свойство б′) доказано. Теперь возьмем какой-нибудь элемент f из области оператора $(T_1T_2)^*$; каков бы ни был элемент g, принадлежащий области оператора T_2, будем иметь

$$(T_2g,\ T_1^*f) = (T_1T_2g,\ f) = (g,\ (T_1T_2)^* f),$$

следовательно, T_1^*f принадлежит области оператора T_2^* и $T_2^*T_1^*f = (T_1T_2)^* f$. Соотношение в′) также доказано.

Отметим еще один очевидный факт:

г) Из $T_1 \subseteq T_2$ следует, что $T_1^* \supseteq T_2^*$.

116. Перестановочность. Приводимость. Рассмотрим теперь вопрос о *перестановочности* операторов. Казалось бы естественным определить это понятие посредством равенства $T_1T_2 = T_2T_1$, но тогда даже ограниченный оператор B не был бы перестановочен со своим обратным B^{-1}, если этот последний определен не во всем пространстве. Действительно, в этом случае $B^{-1}B = I$, но $BB^{-1} \neq I$, так как BB^{-1} определен только для элементов, входящих в область оператора B^{-1}. Чтобы избежать этого неудобства, примем следующее определение:

Пусть B — ограниченный линейный оператор, а T — линейный оператор общего вида; говорят, что B перестановочен с T, если

$$BT \subseteq TB.$$

Это отношение условимся записывать так: $B \smile T$.

Отношение перестановочности подчиняется следующим правилам:

д) *если* $B \smile T_1$, $B \smile T_2$, *то* $B \smile (T_1+T_2)$ *и* $B \smile T_1T_2$;
е) *если* $B_1 \smile T$, $B_2 \smile T$, *то* $(B_1+B_2) \smile T$ *и* $B_1B_2 \smile T$;
ж) *если* T^{-1} *существует, то из* $B \smile T$ *следует, что* $B \smile T^{-1}$;
з) *если* $B \smile T_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, *то* $B \smile \lim T_n$;
и) *если* $B_n \smile T$ $(n=1, 2, \ldots)$, *то* $\lim B_n \smile T$ *в предположении, что* $\lim B_n$ *ограничен, а* T *замкнут*;

к) *если* T^* *существует, то из* $B \smile T$ *следует, что* $B^* \smile T^*$.

Предложения д) и е) очевидны; для доказательства ж) заметим, что для любого элемента f из области оператора T^{-1}

$$Bf = BTT^{-1}f = TBT^{-1}f,$$

следовательно, Bf также принадлежит области оператора T^{-1} и

$$T^{-1}Bf = BT^{-1}f.$$

Предложение з) вытекает из непрерывности оператора B; в самом деле, если f принадлежит области оператора $\lim T_n$, то

$$B \cdot \lim T_n f = \lim BT_n f = \lim T_n Bf = (\lim T_n)\, Bf.$$

Для того чтобы проверить предложение и), достаточно заметить, что для любого элемента f из $\mathfrak{D}_T$

$$B_n f \to (\lim B_n) f, \qquad TB_n f = B_n Tf \to (\lim B_n)\, Tf;$$

так как оператор T замкнут, то $(\lim B_n) f$ принадлежит области оператора T и $T(\lim B_n) f = (\lim B_n)\, Tf$. Наконец, предложение к) можно доказать так: если f принадлежит $\mathfrak{D}_{T^*}$, то

$$(Tg,\ B^*f) = (BTg,\ f) = (TBg,\ f) = (Bg,\ T^*f) = (g,\ B^*T^*f)$$

для всех элементов g из $\mathfrak{D}_T$, а отсюда следует, что B^*f принадлежит $\mathfrak{D}_{T^*}$ и $T^*B^*f = B^*T^*f$.

Указанное здесь обобщение понятия перестановочности оправдывает себя, в частности, тогда, когда речь идет о перестановочности *проекционного оператора* P с произвольным линейным оператором T.

Итак, пусть $P \smile T$. Из $PT \subseteq TP$ следует, что

$$PTP = (PT)\, P \subseteq (TP)\, P = TP,$$

и так как PTP и TP имеют одну и ту же область определения, то

$$PTP = TP. \tag{1}$$

Дополнительный проекционный оператор $Q = I - P$ также перестановочен с T, поэтому

$$QTQ = TQ. \tag{2}$$

Далее,

$$T = (P + Q)\, T = PT + QT \subseteq TP + TQ \subseteq T\,(P + Q) = T,$$

и так как крайние члены этих соотношений совпадают, то

$$T = TP + TQ. \tag{3}$$

Рассмотрим взаимно ортогональные подпространства

$$\mathfrak{P} = P\mathfrak{H}, \quad \mathfrak{Q} = Q\mathfrak{H}.$$

Равенства (1) и (2) означают, что на элементах своей области определения, входящих в $\mathfrak{P}$ или $\mathfrak{Q}$, оператор T принимает значения, также принадлежащие соответственно $\mathfrak{P}$ или $\mathfrak{Q}$. Следовательно, рассматривая T только на множествах таких элементов, мы получим линейные операторы T_P и T_Q соответственно в подпространствах $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$. Равенство же (3) выражает тот факт, что оператор T может быть восстановлен, коль скоро известны его „части" T_P и T_Q, действующие в подпространствах $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$, причем область оператора T состоит как раз из тех элементов, проекции которых на $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ принадлежат соответственно областям определения операторов T_P и T_Q.

Это свойство оператора T выражают, говоря, что подпространства $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ *приводят* оператор T.

Введем еще одно обозначение, которое окажется полезным для дальнейшего. Условимся писать

$$T \smile\smile \{T_\alpha\},$$

если всякий ограниченный симметричный оператор, перестановочный со всеми операторами T_α, перестановочен также с T.

117. График оператора. Обычную функцию $y=f(x)$ удобно изображать графиком, т. е. множеством точек $\{x, f(x)\}$ в плоскости (x, y).

Для того чтобы применить аналогичный способ изображения к оператору в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, условимся прежде всего вместо плоскости рассматривать прямую сумму $\boldsymbol{H}=\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$, состоящую из всевозможных пар $\{f, g\}$ элементов пространства $\mathfrak{H}$. $\boldsymbol{H}$ само будет гильбертовым пространством, если определить в нем основные операции посредством формул

$$c\{f, g\}=\{cf, cg\},$$
$$\{f_1, g_1\}+\{f_2, g_2\}=\{f_1+f_2, g_1+g_2\},$$
$$(\{f_1, g_1\}, \{f_2, g_2\})=(f_1, f_2)+(g_1, g_2).$$

Тогда оператор T в пространстве $\mathfrak{H}$ изобразится в $\boldsymbol{H}$ множеством элементов

$$\{f, Tf\},$$

где f пробегает область $\mathfrak{D}_T$. Назовем это множество *графиком* оператора T и обозначим его $\boldsymbol{G}_T$ [1]).

Очевидно, что соотношения

$$T_1=T_2 \quad \text{и} \quad T_1 \supseteq T_2$$

эквивалентны соотношениям

$$\boldsymbol{G}_{T_1}=\boldsymbol{G}_{T_2} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{G}_{T_1} \supseteq \boldsymbol{G}_{T_2};$$

разумеется, в случае графиков значок $\supseteq$ указывает, что $\boldsymbol{G}_{T_2}$ является подмножеством множества $\boldsymbol{G}_{T_1}$.

---

[1]) Это понятие, так же как результаты п. 117 и 118, принадлежат И. Нейману [5].

Ясно также, что график G_T линейного оператора T представляет собой линейное множество; для того чтобы G_T было еще и замкнуто, т. е. являлось бы подпространством пространства $\boldsymbol{H}$, необходимо и достаточно, чтобы T был замкнутым оператором.

Рассмотрим в пространстве $\boldsymbol{H}$ такие операторы:

$$U\{f, g\} = \{g, f\}, \quad V\{f, g\} = \{g, -f\}.$$

Очевидно, это — унитарные операторы, обладающие следующими свойствами:

$$UV = -VU, \quad U^2 = -V^2 = I$$

(I означает тождественный оператор в $\boldsymbol{H}$).

В этих обозначениях уравнение

$$(Tf, g) = (f, g^*),$$

определяющее сопряженный оператор $T^*g = g^*$, может быть записано в виде

$$(V\{f, Tf\}, \{g, g^*\}) = 0.$$

Это означает, что элементы пространства $\boldsymbol{H}$, принадлежащие G_{T^*}, ортогональны VG_T. Таким образом, G_{T^*} представляет собой подпространство пространства $\boldsymbol{H}$, а именно, ортогональное дополнение замыкания $[VG_T]$ множества VG_T. Так как, очевидно,

$$[VG_T] = V[G_T],$$

то

$$G_{T^*} = \boldsymbol{H} \ominus V[G_T].$$

Последнее соотношение весьма облегчает изучение линейных операторов и их сопряженных.

Рассмотрим в качестве примера предложение:

Если существуют T^{-1}, T^* и $(T^{-1})^*$, где T — линейный оператор, то существует и $(T^*)^{-1}$, причем $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Его можно доказать „графически“ следующим образом. Заметим прежде всего, что график оператора T^{-1} может быть получен из графика T перестановкой координат, т. е. что

$$G_{T^{-1}} = UG_T.$$

Таким образом,

$$G_{(T^{-1})^*} = \boldsymbol{H} \ominus V[G_{T^{-1}}] = \boldsymbol{H} \ominus VU[G_T] = U(U\boldsymbol{H} \ominus V[G_T]) =$$
$$= U(\boldsymbol{H} \ominus V[G_T]) = UG_{T^*},$$

откуда следует, что $(T^*)^{-1}$ существует и равен $(T^{-1})^*$.

Далее, имеет место следующая важная

Теорема. *Если оператор T замкнут и его область плотна в $\mathfrak{H}$, то область сопряженного оператора T^* также плотна в $\mathfrak{H}$, следовательно, существует $T^{**} = (T^*)^*$; при этом $T^{**} = T$.*

Допустим противное, т. е. что множество $\mathfrak{D}_{T^*}$ не плотно в $\mathfrak{H}$; тогда существует элемент $h \neq 0$, ортогональный $\mathfrak{D}_{T^*}$. В пространстве $\boldsymbol{H}$ элемент $\{0, h\}$ будет ортогонален всем элементам вида $\{T^*g, -g\}$, где g пробегает $\mathfrak{D}_{T^*}$, следовательно, он будет ортогонален $\boldsymbol{V}\boldsymbol{G}_{T^*}$. Но мы видели, что подпространство, состоящее из элементов, ортогональных $\boldsymbol{G}_{T^*}$, есть $\boldsymbol{V}[\boldsymbol{G}_T]$, поэтому, в силу того что $\boldsymbol{V}$—изометричный оператор, ортогональное дополнение подпространства $\boldsymbol{V}\boldsymbol{G}_{T^*}$ равно

$$\boldsymbol{V}^2[\boldsymbol{G}_T] = -\boldsymbol{I}[\boldsymbol{G}_T] = [\boldsymbol{G}_T].$$

В то же время

$$[\boldsymbol{G}_T] = \boldsymbol{G}_T,$$

так как T—*замкнутый* оператор. Следовательно, $\{0, h\}$ принадлежит $\boldsymbol{G}_T$, откуда $h = T0 = 0$, что противоречит предположению.

Полученное предложение показывает, что $\mathfrak{D}_{T^*}$ плотно в $\mathfrak{H}$ и, следовательно, существует оператор T^{**}. Так как $\boldsymbol{G}_{T^{**}}$ является ортогональным дополнением подпространства $\boldsymbol{V}\boldsymbol{G}_{T^*}$, то

$$\boldsymbol{G}_{T^{**}} = \boldsymbol{G}_T,$$

откуда следует, что

$$T^{**} = T.$$

Мы предоставляем читателю, несколько дополнив это рассуждение, получить следующий более общий результат:

Теорема. *Если T—линейный оператор с областью определения, всюду плотной в $\mathfrak{H}$, то для того, чтобы область определения сопряженного оператора T^* также была плотна в $\mathfrak{H}$, необходимо и достаточно, чтобы оператор T обладал замкнутым линейным расширением. При выполнении этого условия T^{**} представляет собой наименьшее замкнутое расширение оператора T, т. е. всякое замкнутое линейное расширение оператора T одновременно является расширением T^{**}* [1]).

Рассмотрим теперь линейный оператор T, определенный *во всем* $\mathfrak{H}$. Покажем, что его сопряженный оператор T^* *ограничен* (в $\mathfrak{D}_{T^*}$).

Допустим противное, т. е. что существует последовательность элементов $\{g_n\}$, принадлежащих $\mathfrak{D}_{T^*}$, такая, что

$$\|g_n\| = 1 \quad \text{и} \quad \|T^*g_n\| \to \infty.$$

Выражения

$$L_n(f) = (Tf, g_n) = (f, T^*g_n) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

являются, очевидно, линейными функционалами, причем L_n имеет норму, равную $\|T^*g_n\|$. Числовая последовательность $\{L_nf\}$ огра-

[1]) Разумеется, „расширения" того или иного оператора, о которых идет речь в этой теореме, могут совпадать с исходным оператором.

ничена при любом фиксированном f:

$$|L_n(f)|\leqslant\|Tf\|\|g_n\|=\|Tf\|.$$

Следовательно, нормы этих функционалов ограничены (см. п. 31), т. е.

$$|L_n(f)|\leqslant C\|f\| \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Положив

$$f=T^*g_n \quad (n=1, 2, \ldots),$$

мы придем к противоречию.

Итак, оператор T^* ограничен в $\mathfrak{D}_{T^*}$, т. е. существует постоянная M, такая, что

$$\|T^*f\|\leqslant M\|f\|$$

для любого f из $\mathfrak{D}_{T^*}$.

Пусть f^* — предел какой-нибудь последовательности элементов $\{f_n\}$, принадлежащей $\mathfrak{D}_{T^*}$. Так как

$$\|T^*(f_n-f_m)\|\leqslant M\|f_n-f_m\|\to 0 \quad (\text{при } m,\ n\to\infty),$$

то последовательность $\{T^*f_n\}$ также сходится. Оператор T^* замкнут, следовательно, f принадлежит $\mathfrak{D}_{T^*}$. Мы показали, таким образом, что $\mathfrak{D}_{T^*}$ представляет собой замкнутое линейное множество — подпространство пространства $\mathfrak{H}$.

Если оператор T, кроме того, *замкнут*, то $\mathfrak{D}_{T^*}$ плотно в $\mathfrak{H}$ и, будучи замкнуто, совпадает с $\mathfrak{H}$, т. е. в этом случае сопряженный оператор T^* определен всюду и ограничен. Это же утверждение справедливо и в применении к $T^{**}=T$.

Итак, мы пришли к следующему выводу:

Теорема. *Всякий линейный оператор, если он определен всюду и замкнут, непременно ограничен.*

Теорема Хеллингера и Теплица (см. п. 114) является частным случаем этой теоремы; в самом деле, из условия симметрии $(Tf, g)=(f, Tg)$ следует, что оператор T совпадает с T^* и, следовательно, замкнут.

Доказанная теорема, в свою очередь, является частным случаем общей теоремы Банаха[1]), относящейся к операторам в банаховых пространствах и даже в пространствах более общего типа.

118. Операторы $B=(I+T^*T)^{-1}$ и $C=T(I+T^*T)^{-1}$. В том случае, когда линейный оператор T ограничен, оператор B, указанный в заголовке, также ограничен, симметричен и $O\leqslant B\leqslant I$; при этом оператор $C=TB$ также ограничен. Если T — линейный оператор со всюду плотной областью определения, то T^* и вместе с ним T^*T существуют, хотя об их областях определения ничего

[1]) Банах [1] и [3] (стр. 41, теорема 7).

нельзя сказать заранее. Тем не менее можно высказать следующее неожиданное утверждение:

Теорема. *Если линейный оператор T замкнут и его область определения плотна в $\mathfrak{H}$, то операторы*

$$B=(I+T^*T)^{-1}, \quad C=T(I+T^*T)^{-1}$$

всюду определены, ограничены и

$$\|B\|\leqslant 1, \quad \|C\|\leqslant 1;$$

кроме того, оператор B симметричен и положителен.

Для доказательства воспользуемся снова графиком оператора T, который в данном случае представляет собой *замкнутое* множество.

Пусть h — какой-нибудь элемент пространства $\mathfrak{H}$. Так как G_T и VG_{T^*} служат ортогональными дополнениями друг друга в H (см. п. 117), то элемент $\{h, 0\}$ пространства H можно представить, притом единственным образом, в виде суммы двух элементов, один из которых принадлежит подпространству G_T, а другой — подпространству VG_{T^*}:

$$\{h, 0\}=\{f, Tf\}+\{T^*g, -g\}. \tag{4}$$

Записав это равенство в компонентах, мы увидим, что система уравнений

$$h=f+T^*g, \quad 0=Tf-g$$

имеет единственное решение f, g, где f и g принадлежат соответственно $\mathfrak{D}_T$ и $\mathfrak{D}_{T^*}$. Положив

$$f=Bh, \quad g=Ch,$$

мы тем самым зададим в пространстве $\mathfrak{H}$ два линейных оператора B и C. С их помощью указанная система уравнений может быть представлена так:

$$I=B+T^*C, \quad O=TB-C,$$

откуда следует, что

$$C=TB, \quad I=B+T^*TB=(I+T^*T)B. \tag{5}$$

Так как слагаемые в правой части (4) взаимно ортогональны, то

$$\|h\|^2=\|\{h, 0\}\|^2=\|\{f, Tf\}\|^2+\|\{T^*g, -g\}\|^2=$$
$$=\|f\|^2+\|Tf\|^2+\|T^*g\|^2+\|g\|^2,$$

откуда вытекает, что

$$\|Bh\|^2+\|Ch\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2\leqslant\|h\|^2,$$

и, следовательно,

$$\|B\|\leqslant 1, \quad \|C\|\leqslant 1.$$

Каков бы ни был элемент u, приинадлежащий области определения оператора T^*T, для него

$$((I+T^*T)u, u)=(u, u)+(Tu, Tu)\geqslant(u, u);$$

таким образом, если

$$(I+T^*T)u=0,$$

то

$$u=0,$$

т. е. существует оператор $(I+T^*T)^{-1}$. Согласно (5), он определен всюду и равен B:

$$B=(I+T^*T)^{-1}.$$

Оператор B симметричен и положителен; в самом деле,

$$(Bu, v)=(Bu, (I+T^*T)Bv)=(Bu, Bv)+(Bu, T^*TBv)=$$
$$=(Bu, Bv)+(T^*TBu, Bv)=((I+T^*T)Bu, Bv)=(u, Bv)$$

и

$$(Bu, u)=(Bu, (I+T^*T)Bu)=(Bu, Bu)+(TBu, TBu)\geqslant 0.$$

На этом доказательство теоремы заканчивается.

§ 2. САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

119. Симметричные и самосопряженные операторы. Определения и примеры. В случае ограниченных линейных операторов симметричный оператор определялся соотношением

$$(Tf, g)=(f, Tg).$$

Оно же может служить для определения неограниченного симметричного оператора, если дополнительно потребовать, чтобы f и g принадлежали области $\mathfrak{D}_T$ оператора T. Следует также предположить, что область $\mathfrak{D}_T$ плотна в $\mathfrak{H}$ и, таким образом, T^* существует. Этому определению можно придать такую форму:

Линейный оператор T называется симметричным, если его область плотна в $\mathfrak{H}$ и $T\subseteq T^*$.

Если T — симметричный оператор, то T^{**} также симметричен; в самом деле, из $T\subseteq T^*$ вытекает $T^*\supseteq T^{**}$, откуда следует, что

$$T^{**}\subseteq T^*=(T^*)^{**}=(T^{**})^*.$$

Таким образом, *любой симметричный оператор T имеет замкнутое симметричное расширение, а именно T^{**}.*

В качестве примера рассмотрим линейный оператор

$$Tf(x)=if'(x)$$

в пространстве $L^2(0, 1)$, определенный для абсолютно непрерывных функций $f(x)$, обращающихся в нуль в точках 0 и 1, у ко-