Каков бы ни был элемент u, принадлежащий области определения оператора T^*T, для него

$$((I+T^*T)u,\ u)=(u,\ u)+(Tu,\ Tu)\geqslant(u,\ u);$$

таким образом, если

$$(I+T^*T)u=0,$$

то

$$u=0,$$

т. е. существует оператор $(I+T^*T)^{-1}$. Согласно (5), он определен всюду и равен B:

$$B=(I+T^*T)^{-1}.$$

Оператор B симметричен и положителен; в самом деле,

$$\begin{aligned}(Bu,\ v)&=(Bu,\ (I+T^*T)Bv)=(Bu,\ Bv)+(Bu,\ T^*TBv)=\\&=(Bu,\ Bv)+(T^*TBu,\ Bv)=((I+T^*T)Bu,\ Bv)=(u,\ Bv)\end{aligned}$$

и

$$(Bu,\ u)=(Bu,\ (I+T^*T)Bu)=(Bu,\ Bu)+(TBu,\ TBu)\geqslant 0.$$

На этом доказательство теоремы заканчивается.

§ 2. САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

119. Симметричные и самосопряженные операторы. Определения и примеры. В случае ограниченных линейных операторов симметричный оператор определялся соотношением

$$(Tf,\ g)=(f,\ Tg).$$

Оно же может служить для определения неограниченного симметричного оператора, если дополнительно потребовать, чтобы f и g принадлежали области $\mathfrak{D}_T$ оператора T. Следует также предположить, что область $\mathfrak{D}_T$ плотна в $\mathfrak{H}$ и, таким образом, T^* существует. Этому определению можно придать такую форму:

Линейный оператор T называется симметричным, если его область плотна в $\mathfrak{H}$ и $T\subseteq T^*$.

Если T — симметричный оператор, то T^{**} также симметричен; в самом деле, из $T\subseteq T^*$ вытекает $T^*\supseteq T^{**}$, откуда следует, что

$$T^{**}\subseteq T^*=(T^*)^{**}=(T^{**})^*.$$

Таким образом, *любой симметричный оператор T имеет замкнутое симметричное расширение, а именно T^{**}.*

В качестве примера рассмотрим линейный оператор

$$Tf(x)=if'(x)$$

в пространстве $L^2(0,\ 1)$, определенный для абсолютно непрерывных функций $f(x)$, обращающихся в нуль в точках 0 и 1, у которых производная $f'(x)$ (существующая почти всюду) также принадлежит L^2. Этот оператор, очевидно, симметричен, так как

$$(Tf,\ g)-(f,\ Tg)=i\int_0^1(f'\bar{g}+f\bar{g}')\,dx=i\,[f\bar{g}]_0^1=0.$$

Кроме того, оператор T замкнут. В самом деле, если последовательность функций $\{f_n(x)\}$, принадлежащих $\mathfrak{D}_T$, такова, что

$$f_n(x)\longrightarrow f(x),\qquad if'_n(x)\longrightarrow ih(x)$$

(в смысле сходимости в среднем), то

$$if_n(x)=i\int_0^x f'_n(\xi)\,d\xi\longrightarrow i\int_0^x h(\xi)\,d\xi\quad(=0\ \text{ при }\ x=0\ \text{ и при }\ x=1)$$

в смысле обычной сходимости; отсюда следует, что почти всюду

$$f(x)=\int_0^x h(\xi)\,d\xi.$$

Так как предел в среднем определен только с точностью до множества меры нуль, то $f(x)$ можно задать так, чтобы последнее равенство выполнялось всюду. Тогда $f(x)$ будет принадлежать $\mathfrak{D}_T$ и $Tf(x)=ih(x)$.

Вычислим теперь T^*. Для этого надо отыскать все пары элементов g, g^* из L^2, такие, что

$$(if',\ g)=(f,\ g^*)$$

для всех f из $\mathfrak{D}_T$. Если неопределенный интеграл функции g^* мы обозначим g^{**}, то, проинтегрировав по частям, получим

$$i\int_0^1 f'(\bar{g}+\overline{ig^{**}})\,dx=0. \tag{6}$$

Для того чтобы это уравнение удовлетворялось, достаточно, чтобы функция

$$h(x)=g(x)+ig^{**}(x)$$

была почти всюду постоянна. Это условие вместе с тем необходимо; в этом можно убедиться, выбрав $f(x)$ так, чтобы почти всюду выполнялось равенство

$$f'(x)=h(x)-c,$$

где

$$c=\int_0^1 h(x)\,dx;$$

в самом деле, при этом

$$\int_0^1 |h(x)-c|^2\,dx=\int_0^1 [h(x)-c]\,\overline{h(x)}\,dx-\bar{c}\int_0^1 h(x)\,dx+\bar{c}c=$$

$$=\int_0^1 f'(x)\,\overline{h(x)}\,dx=0,$$

откуда следует, что

$$h(x)=c$$

почти всюду. Изменив, если нужно, значения $h(x)$ на множестве меры нуль, получим для всех x

$$g(x)+ig^{**}(x)=c$$

и, следовательно,

$$g'(x)+ig^{*}(x)=0$$

почти всюду. Итак, область определения оператора T^* состоит из всех абсолютно непрерывных функций $g(x)$, производные которых принадлежат L^2 без каких бы то ни было ограничений в точках 0 и 1; при этом

$$T^*g(x)=ig'(x).$$

Оператор T, который мы только что рассмотрели, является примером замкнутого симметричного оператора, для которого T^* служит *истинным* расширением.

Если в рассмотренном примере краевые условия

$$f(0)=f(1)=0$$

мы заменим более слабым условием

$$f(1)=Cf(0),$$

где C — некоторое заданное число, то получим оператор T_C, также являющийся расширением оператора T. Легко видеть, что T_C — замкнутый линейный оператор. В том случае, когда $|C|=1$, оператор T_C, кроме того, симметричен:

$$(T_Cf,\, g)-(f,\, T_Cg)=i\,[f\bar{g}]_0^1=i\,[Cf(0)\,\overline{Cg(0)}-f(0)\,\overline{g(0)}]=0.$$

Вычислим T_C^*. Сначала рассмотрим случай $C=1$. Пусть g — какой-нибудь элемент из $\mathfrak{D}_{T_1^*}$ и $g^*=T_1^*g$. Функция $f(x)\equiv 1$ принадлежит $\mathfrak{D}_{T_1}$; подставив ее в равенство

$$(if',\, g)=(f,\, g^*),$$

получим

$$\int_0^1 g^*(x)\,dx=0.$$

Мы видим, что неопределенный интеграл $g^{**}(x)$ функции $g^{*}(x)$ удовлетворяет условию $g^{**}(1)=g^{**}(0)$. Интегрируя по частям, мы снова получаем соотношение (6). Следовательно, изменив, если нужно, значения $g(x)$ на множестве меры нуль, мы добьемся того, чтобы функция $g(x)+ig^{**}(x)$ была постоянной, откуда будет следовать, что

$$g(1)=g(0) \quad \text{и} \quad g^{*}(x)=ig'(x).$$

Итак, g принадлежит также $\mathfrak{D}_{T_1}$ и $T_1^{*}g=T_1 g$. Следовательно,

$$T_1^{*}=T_1.$$

Случай $C\neq 1$, $|C|=1$ может быть исследован аналогичным образом. Среди неопределенных интегралов функции $g^{*}(x)$ найдется такой, $g^{**}(x)$, для которого

$$g^{**}(1)=Cg^{**}(0).$$

Для этого интеграла равенство (6) выполняется. В $\mathfrak{D}_{T_C}$ найдется функция $f(x)$, такая, что

$$f'(x)=g(x)+ig^{**}(x).$$

Подставив $f(x)$ в (6), мы получим, что $g(x)+ig^{**}(x)=0$ почти всюду. Изменив, если нужно, $g(x)$ на множестве меры нуль, получим равенство

$$g(x)=-ig^{**}(x),$$

откуда следует, что $g(x)$ принадлежит также $\mathfrak{D}_{T_C}$ и

$$g^{*}(x)=ig'(x).$$

Таким образом, и в этом случае

$$T_C^{*}=T_C.$$

Введем следующее определение:

Линейный оператор, равный своему сопряженному, называется самосопряженным.

Всякий ограниченный симметричный оператор самосопряжен, но, как мы только что видели на примере

$$Tf=if' \quad (f(0)=f(1)=0),$$

неограниченный симметричный оператор может не быть самосопряженным. Тот же пример показывает, что несамосопряженный симметричный оператор может иметь самосопряженные расширения; в нашем примере это — операторы

$$T_C f=if' \quad (f(1)=Cf(0),\ |C|=1).$$

Однако такие расширения существуют не всегда. Существуют несамосопряженные симметричные операторы, которые вместе с тем максимальны, т. е. не имеют собственных симметричных расширений. *Всякий самосопряженный оператор A является максималь-*

ным симметричным оператором, так как если

$$A \subseteq T, \quad T \subseteq T^*,$$

то

$$A = A^* \supseteq T^* \supseteq T \supseteq A$$

и, следовательно,

$$A = T.$$

Имея *ограниченный* линейный оператор T, можно очень легко построить симметричный оператор: достаточно взять произведение T^*T.

Интересно, что *то же построение приводит к симметричному и даже к самосопряженному оператору и в том случае, когда оператор T неограничен, если только он замкнут, а его область плотна в $\mathfrak{H}$.*

В самом деле, мы уже видели, что в этом случае оператор

$$B = (I + T^*T)^{-1}$$

существует, определен всюду, ограничен, симметричен и, следовательно, самосопряжен. Так как

$$T^*T = B^{-1} - I,$$

то остается только доказать следующие предложения:

а) *оператор, обратный самосопряженному оператору A (если он существует), также самосопряжен;*

б) *если A — самосопряженный оператор, то, каково бы ни было действительное число c, оператор $A + cI$ также самосопряжен.*

Предложение б) очевидно. Что касается предложения а), то достаточно установить существование оператора $(A^{-1})^*$, т. е. показать, что область оператора A^{-1} всюду плотна в $\mathfrak{H}$, так как отсюда уже следует, что

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = A^{-1}.$$

Если бы область оператора A^{-1}, состоящая из элементов вида Af, не была плотна в $\mathfrak{H}$, то существовал бы элемент $h \neq 0$, для которого $(Af, h) = 0$, каково бы ни было f из $\mathfrak{D}_A$; тогда h принадлежал бы области оператора $A^* = A$ и для него было бы $Ah = 0$. Так как A^{-1} существует, то отсюда следовало бы, что $h = 0$, но это противоречит предположению.

Вернемся опять к примеру

$$Tf(x) = if'(x),$$

где $f(x)$ подчинены краевым условиям

$$f(0) = f(1) = 0.$$

Мы видели, что этот оператор симметричен, но не самосопряжен:

$$T^*g(x) = ig'(x),$$

но $g(x)$ не подчинены никаким условиям на концах. Очевидно,

$$T^*Tf(x) = -f''(x),$$

где $f(x)$ должны удовлетворять условиям: $f(0) = f(1) = 0$. Оператор T^*T, как мы только что видели, самосопряжен [1]).

120. Спектральное разложение самосопряженного оператора. Возникает вопрос, существует ли для произвольного симметричного оператора спектральное разложение, подобное тому, которое было нами получено в случае ограниченного оператора.

Работы Карлемана [2], относящиеся к интегральным уравнениям с „сингулярным" симметричным ядром, показывают, что полной аналогии в общем случае получить не удается. Э. Шмидт впервые заметил, что для получения спектрального разложения необходимо ограничиться *самосопряженными* операторами [2]). Теорема о спектральном разложении общих самосопряженных операторов, доказанная различными способами И. Нейманом [3]), Стоуном [4]), Риссом [5]) и другими авторами [6]), легла в основу современной теории линейных операторов в гильбертовом пространстве.

Доказательство, принадлежащее Риссу и Лорчу, которое воспроизводится в этом пункте, в значительной мере основано на следующем предложении:

Лемма. *Пусть*

$$\mathfrak{L}_1,\ \mathfrak{L}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{L}_i,\ \ldots$$

— последовательность подпространств гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, попарно ортогональных и в совокупности порождающих все $\mathfrak{H}$. Проекцию произвольного элемента f на подпространство $\mathfrak{L}_i$ обозначим f_i. Пусть

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_i,\ \ldots$$

— последовательность линейных операторов, обладающая тем свойством, что на $\mathfrak{L}_i$ оператор A_i ведет себя как ограниченный самосопряженный оператор, отображающий $\mathfrak{L}_i$ само в себя.

Тогда в $\mathfrak{H}$ существует самосопряженный оператор A, и притом единственный, совпадающий с A_i на каждом $\mathfrak{L}_i$ ($i = 1, 2, \ldots$).

---

1) О дифференциальных операторах см. Г. Вейль [1]; Курант [2]; Фридрихс [1], [2], [3]; Стоун [2] (гл. V, X); Крейн [1] (вторая часть).

2) См. замечание И. Неймана [1] (стр. 62).

3) И. Нейман [1]. Это доказательство воспроизведено нами в п. 121.

4) Стоун [1] (гл. V); в этом доказательстве частично использован метод, принадлежащий Карлеману [2] и примененный им в его теории интегральных уравнений с „сингулярным" симметричным ядром.

5) Рисс [14].

6) См. Купмен и Дуб [1]; Рисс и Лорч [1]; Лендьел [1]; Купер [1]; Лорч [6].

Область определения оператора A состоит из тех элементов f, для которых сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| A_i f_i \|^2$$

и для таких f

$$Af = \sum_{i=1}^{\infty} A_i f_i.$$

Оператор A, так определенный, линеен. Его область $\mathfrak{D}_A$ плотна в $\mathfrak{H}$, так как она содержит все элементы вида $\sum_{i=1}^{n} f_i$. Кроме того, A — симметричный оператор, так как

$$(Af, g) = \sum (A_i f_i, g_i) = \sum (f_i, A_i g_i) = (f, Ag)$$

для любых f и g из $\mathfrak{D}_A$.

Пусть g — какой-нибудь элемент, принадлежащий $\mathfrak{D}_{A^*}$. Тогда, каков бы ни был элемент f из $\mathfrak{D}_A$, справедливо равенство

$$(Af, g) = (f, A^*g),$$

откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} (A_i f_i, g_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (f_i, (A^*g)_i).$$

Если в качестве f выбрать какой-нибудь элемент подпространства $\mathfrak{L}_j$, то получим $f_i = 0$ для $i \neq j$ и предыдущее равенство примет вид

$$(A_j f_j, g_j) = (f_j, (A^*g)_j).$$

Так как A_j самосопряжен в $\mathfrak{L}_j$, то

$$(A^*g)_j = A_j g_j.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| A_j g_j \|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \| (A^*g)_j \|^2 = \| A^*g \|^2;$$

таким образом, g принадлежит $\mathfrak{D}_A$ и

$$Ag = \sum_{j=1}^{\infty} A_j g_j = \sum_{j=1}^{\infty} (A^*g)_j = A^*g.$$

Мы показали, что

$$A^* \subseteq A,$$

а так как A — симметричный оператор, то

$$A^* = A.$$

Остается доказать единственность оператора A. Пусть A' — какой-нибудь самосопряженный оператор, совпадающий с A_i

на $\mathfrak{L}_i$. Так как A' замкнут, то его области определения принадлежат все те f, для которых сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} A' f_i,$$

причем сумма этого ряда равна $A'f$. Но $A'f_i = A_i f_i$ и сходимость ряда ортогональных элементов эквивалентна сходимости ряда из квадратов их норм; поэтому совокупность таких f совпадает с $\mathfrak{D}_A$ и для них

$$A'f = Af.$$

Итак,

$$A' \supseteq A.$$

Будучи самосопряженным, A представляет собой максимальный симметричный оператор, следовательно,

$$A' = A,$$

и лемма полностью доказана.

Ясно, что самосопряженный оператор A, о котором говорится в указанной лемме, будет ограничен лишь в том случае, когда нормы операторов A_i в подпространствах $\mathfrak{L}_i$ равномерно ограничены. Таким образом, при помощи этой леммы мы можем строить неограниченные самосопряженные операторы, исходя из ограниченных самосопряженных операторов. Более существенно, однако, то обстоятельство, что всякий неограниченный самосопряженный оператор может быть построен таким способом. Сейчас мы это докажем и придем таким путем к общей теореме о спектральном разложении.

Возьмем произвольный самосопряженный оператор A, а также операторы

$$B = (I + A^2)^{-1} \quad \text{и} \quad C = AB = A(I + A^2)^{-1},$$

которые мы уже рассматривали в п. 118.

Так как оператор B ограничен, симметричен и

$$O \leqslant B \leqslant I,$$

то для него существует спектральное семейство $\{F_\lambda\}$, заданное на отрезке $[0, 1]$, такое, что

$$B = \int_{-0}^{1} \lambda \, dF_\lambda.$$

Из существования обратного оператора B^{-1} следует, что $\lambda = 0$ является точкой непрерывности функции F_λ, т. е. что $F_0 = O$. Действительно, так как $F_\lambda F_0$ равно O при $\lambda < 0$ и равно F_0 при $\lambda \geqslant 0$, то

$$BF_0 = \int_{-0}^{1} \lambda \, dF_\lambda F_0 = O, \qquad F_0 = B^{-1} BF_0 = O.$$

Рассмотрим проекционные операторы

$$P_n = F_{\frac{1}{n}} - F_{\frac{1}{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

они попарно ортогональны и

$$\sum_n P_n = F_1 - F_0 = I - O = I.$$

Соответствующие подпространства $\mathfrak{L}_n$ также попарно ортогональны и в совокупности порождают все пространство $\mathfrak{H}$.

Покажем, что оператор A преобразует каждое $\mathfrak{L}_n$ само в себя и, как оператор в $\mathfrak{L}_n$, самосопряжен и *ограничен*, или, что то же самое, $P_n \smile A$ и произведение AP_n определено всюду и ограничено.

Возьмем очевидное равенство $A(I + A^2) = (1 + A^2) A$ и умножим его справа и слева на B; так как $(I + A^2) B = I$ и $B(I + A^2) \subseteq I$, то

$$BA \subseteq AB.$$

Отсюда следует, что

$$BC = BAB \overset{\bullet}{\subseteq} ABB = CB$$

и, так как BC определено всюду, то

$$BC = CB.$$

Будучи перестановочен с B, оператор C перестановочен со всеми многочленами от B и с их пределами; следовательно, C перестановочен, в частности, с операторами F и P_n, а следовательно, и с оператором $s_n(B)$, соответствующим функции

$$s_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{при} \quad \frac{1}{n+1} < \lambda \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda \leqslant \frac{1}{n+1} \quad \text{и} \quad \lambda > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Так как произведение функций λ и $s_n(\lambda)$ равно 1 в интервале $\frac{1}{n+1} < \lambda \leqslant \frac{1}{n}$ и равно 0 вне этого интервала, то

$$Bs_n(B) = s_n(B) B = P_n$$

и

$$AP_n = ABs_n(B) = Cs_n(B),$$
$$P_n A = s_n(B) BA \subseteq s_n(B) AB = s_n(B) C.$$

Операторы C и $s_n(B)$ ограничены, симметричны и перестановочны, поэтому $P_n \smile A$ и оператор AP_n всюду определен и ограничен.

Мы получили представление пространства $\mathfrak{H}$ в виде векторной суммы ортогональных подпространств $\mathfrak{L}_n$, в каждом из которых A ведет себя как *ограниченный* самосопряженный оператор.

Спектральное семейство оператора A, рассматриваемого как оператор в подпространстве $\mathfrak{L}_n$, обозначим $\{E_{\lambda,n}\}$. Оно задано на некотором конечном отрезке оси λ, концами которого являются верхняя и нижняя грани оператора A в $\mathfrak{L}_n$. Согласно доказанной выше лемме, в $\mathfrak{H}$ существует самосопряженный оператор E_λ, приводящийся к $E_{\lambda,\,n}$ на каждом $\mathfrak{L}_n$. Легко видеть, что E_λ также является проекционным оператором, обладающим следующими свойствами:

а) $E_\lambda \leqslant E_\mu$ *при* $\lambda < \mu$;

б) $E_{\lambda+0} = E_\lambda$;

в) $E_\lambda \to 0$ *при* $\lambda \to -\infty$ *и* $E_\lambda \to I$ *при* $\lambda \to \infty$.

Таким образом, $\{E_\lambda\}$ представляет собой спектральное семейство, заданное на всей оси $(-\infty, \infty)$, или просто *спектральное семейство*.

Если какой-нибудь ограниченный линейный оператор T перестановочен с A, то он перестановочен также с $B = (I + A^2)^{-1}$, со всеми многочленами от B и с пределами таких многочленов, в частности, с $Bs_n(B) = P_n$. Это означает, что любое $\mathfrak{L}_n$ приводит оператор T. Но в подпространстве $\mathfrak{L}_n$ оператор $E_{\lambda,n}$ является пределом последовательности многочленов от A, следовательно, в $\mathfrak{L}_n$ оператор T перестановочен с $E_{\lambda,n}$. Тогда во всем пространстве $\mathfrak{H}$ оператор T перестановочен с

$$\sum_n E_{\lambda,n} P_n = E_\lambda.$$

Итак,

$$E_\lambda \smile\!\smile A. \tag{7}$$

Наша основная цель состоит в том, чтобы доказать формулу

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda, \tag{8}$$

но так как ни область интегрирования, ни подынтегральная функция не ограничены, то надо предварительно уточнить, в каком смысле следует понимать интеграл такого рода. В следующей главе мы дадим общее определение интеграла такого вида и исследуем его свойства, а пока ограничимся лишь тем, что определим интеграл, входящий в правую часть формулы (8); условимся обозначать его J. Определение будет годиться для произвольного спектрального семейства, т. е. мы будем опираться только на свойства а), б), в) семейства проекционных операторов E_λ. Рассмотрим проекционные операторы

$$E_m - E_{m-1} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

и соответствующие им подпространства $\mathfrak{M}_n$; эти последние, очевидно, попарно ортогональны и в совокупности порождают все пространство $\mathfrak{H}$. Положим

$$J_m = \int_{m-1}^{m} \lambda \, dE_\lambda;$$

J_m представляет собой ограниченный самосопряженный оператор, преобразующий $\mathfrak{M}_m$ само в себя. Опираясь на доказанную выше лемму, *определим интеграл J как самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, совпадающий в каждом подпространстве $\mathfrak{M}_m$ с оператором J_m*; этим свойством, как мы знаем, J *определяется однозначно.*

Если положить $f_m = (E_m - E_{m-1}) f$, то *область определения* оператора J можно описать как совокупность элементов f, для которых сходится ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \| J_m f_m \|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} (J_m^2 f_m, f_m) = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{m-1}^{m} \lambda^2 d \| E_\lambda f_m \|^2$$

или, иначе говоря, сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d \| E_\lambda f \|^2, \tag{9}$$

так как $E_\lambda f_m = E_\lambda f - E_{m-1} f$ в интервале $m-1 \leqslant \lambda \leqslant m$; для таких f

$$Jf = \sum_{-\infty}^{\infty} J_m f_m = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{m-1}^{m} \lambda \, dE_\lambda f_m = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{m-1}^{m} \lambda \, dE_\lambda f.$$

Ясно, что одновременно с f области определения оператора J принадлежат также $E_\mu f$ и при этом

$$J E_\mu f = \sum_{-\infty}^{\infty} J_m (E_\mu f)_m = \sum_{-\infty}^{\infty} J_m E_\mu f_m = E_\mu \sum_{-\infty}^{\infty} J_m f_m = E_m J f,$$

следовательно,

$$E_\mu \smile J. \tag{9a}$$

Легко видеть, что если вместо последовательности целых чисел $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ мы положим в основу определения какую-нибудь другую последовательность действительных чисел с верхним и нижним пределами, соответственно равными ∞ и $-\infty$, то придем к тому же значению интеграла J.

Теперь докажем формулу (8); в силу нашей леммы, достаточно показать, что самосопряженный оператор A и интеграл J, построенный с помощью спектрального семейства этого оператора, совпадают на каждом из взаимно ортогональных подпространств $\mathfrak{L}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Для любого элемента f из $\mathfrak{L}_n$, согласно определению,

$$E_\lambda f = E_{\lambda,n} f.$$

Так как $\{E_{\lambda,n}\}$ является спектральным семейством, заданным на конечном отрезке $[a, b]$, то $E_\lambda f$ постоянно как при $\lambda < a$, так и при $\lambda \geqslant b$, и, следовательно, интеграл (9) для такого f сходится; таким образом, f принадлежит области определения оператора J и

$$Jf = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{m-1}^{m} \lambda\, dE_\lambda f = \int_{a-0}^{b} \lambda\, dE_\lambda f = \int_{a-0}^{b} \lambda\, dE_{\lambda,n} f = Af,$$

в силу определения $\{E_{\lambda,n}\}$ как спектрального семейства, соответствующего оператору A в подпространстве $\mathfrak{L}_n$. Основная формула (8), таким образом, доказана.

Зададим теперь себе такой вопрос: в какой мере формула (8) определяет спектральное семейство $\{E_\lambda\}$?

В п. 107 мы показали, что если оператор A *ограничен*, $mI \leqslant A \leqslant MI$, то ему соответствует единственное спектральное семейство, заданное на конечном отрезке $[m, M]$. Но последнее ограничение в действительности несущественно, так как если спектральное семейство $\{E'_\lambda\}$ таково, что

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d_\lambda E',$$

то непременно

$$E'_\lambda = O \text{ при } \lambda < m \text{ и } E'_\lambda = I \text{ при } \lambda \geqslant M.$$

В самом деле, пусть $\varkappa < m$; каков бы ни был элемент вида $g = E'_\varkappa f$, для него

$$E'_\lambda g = E'_\lambda E'_\varkappa f = E'_\varkappa f \text{ при } \lambda \geqslant \varkappa \text{ и } E'_\varkappa g = g,$$

следовательно,

$$(Ag, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d(E'_\lambda g, g) = \int_{-\infty}^{\varkappa} \lambda\, d(E'_\lambda g, g) \leqslant \varkappa \int_{-\infty}^{\varkappa} d(E'_\lambda g, g) =$$
$$= \varkappa (E'_\varkappa g, g) = \varkappa (g, g).$$

Так как

$$(Ag, g) \geqslant m(g, g),$$

то это возможно лишь при $g = 0$. Итак, $E'_\varkappa = O$. Равенство $E'_\lambda = I$ при $\lambda \geqslant M$ доказывается подобным же образом.

Докажем теперь единственность спектрального семейства в случае *неограниченного* оператора A. Пусть $\{E'_\lambda\}$ — произвольное спектральное семейство, для которого интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE'_\lambda$ также равен A. Тогда [см. (9а)] $E'_\lambda \smile A$ и, так как [см. (7)] $E_\mu \smile\smile A$, то

$$E'_\lambda \smile E_\mu.$$

Поэтому проекционный оператор $Q_n = E_n - E_{n-1}$ перестановочен не только со всеми E_λ, но и со всеми E'_λ. Проекционные операторы E_λ и E'_λ, если рассматривать их как операторы в подпространстве $\mathfrak{D}_n = Q_n\mathfrak{H}$, образуют два спектральных семейства, обладающих тем свойством, что интегралы вида (8) по тому и по другому равны одному и тому же *ограниченному* симметричному оператору AQ_n. Следовательно, эти спектральные семейства совпадают на $\mathfrak{D}_n$, а так как $\mathfrak{D}_n$ попарно ортогональны и в совокупности порождают все $\mathfrak{H}$, то, согласно нашей лемме, E_λ и E'_λ совпадают всюду.

Итак, мы доказали основную теорему о спектральном разложении:

Теорема. *Любой самосопряженный оператор A допускает представление в виде*

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda,$$

где $\{E_\lambda\}$ — спектральное семейство, однозначно определяемое оператором A; операторы E_λ перестановочны с A, а также с любым ограниченным оператором, перестановочным с A.

121. Метод Неймана. Преобразования Кэли. Операторы B и C, игравшие существенную роль в только что проведенном доказательстве, являются, очевидно, симметричными составляющими нормального оператора

$$C + iB = (A + iI)(I + A^2)^{-1} = (A - iI)^{-1}.$$

Этот оператор, его сопряженный

$$C - iB = (A + iI)^{-1}$$

и, вообще, операторы

$$R_z = (A - zI)^{-1}$$

с действительным или комплексным параметром z играют важную роль и в других доказательствах теоремы о разложении.

Существование оператора

$$R_{\pm i} = (A \mp iI)^{-1}$$

следует из соотношений

$$\|(A \mp iI) f\|^2 = (Af, Af) \mp i(f, Af) \pm i(Af, f) + (f, f) = \\ = \|Af\|^2 + \|f\|^2, \quad (10)$$

показывающих, что ни уравнение $(A - iI) f = 0$, ни уравнение $(A + iI) f = 0$ не имеют других решений, кроме $f = 0$, а это условие достаточно для того, чтобы существовали $(A - iI)^{-1}$ и $(A + iI)^{-1}$. Кроме того, из (10) следует, что

$$\|(A \mp iI) f\| \geqslant \|f\|;$$

таким образом,

$$\|g\| \geqslant \|R_{\pm i}\, g\| \qquad (11)$$

для всех элементов g, принадлежащих области оператора R_i или R_{-i}.

Но R_i и R_{-i} определены во всем пространстве $\mathfrak{H}$. В самом деле, мы сейчас покажем, что их области определения а) замкнуты и б) всюду плотны в $\mathfrak{H}$. Первое утверждение является следствием того, что операторы R_i и R_{-i}, в силу (11), непрерывны, а также замкнуты; последнее обусловлено тем, что замкнуты A и $A \mp iI$. Утверждение б) можно, например для R_i, доказать так. Если бы область определения R_i, являющаяся линейным множеством, не была всюду плотна в $\mathfrak{H}$, то существовал бы элемент $h \neq 0$, ей ортогональный, т. е. ортогональный всем элементам вида $(A-iI)f$. Отсюда следовало бы, что h принадлежит области определения оператора $(A-iI)^* = A+iI$ и что $(A+iI)h=0$. Мы пришли к противоречию, так как отсюда вытекало бы, что $h=0$.

Итак, операторы $R_{\pm i}$ определены всюду и ограничены. Таковы же и $R_z = R_{x+iy}$ при $y \neq 0$, так как

$$(A-(x+iy)I)^{-1} = \frac{1}{y}\left(\frac{A-xI}{y} - iI\right)^{-1}.$$

Разумеется, R_z может существовать и быть ограниченным также при некоторых действительных значениях параметра z.

Вернемся к равенствам (10). Они показывают, что

$$\|(A-iI)f\| = \|(A+iI)f\|,$$

т. е. что

$$\|(A-iI)(A+iI)^{-1}g\| = \|g\|.$$

Таким образом, оператор

$$V = (A-iI)(A+iI)^{-1}$$

изометричен. V называется *преобразованием Кэли* оператора A. Он определен на множестве элементов вида

$$g = (A+iI)f, \qquad (12)$$

где f принадлежит области определения оператора A; при этом

$$Vg = (A-iI)f. \qquad (13)$$

Когда f пробегает множество $\mathfrak{D}_A$, g и Vg пробегают все $\mathfrak{H}$, следовательно, V является *унитарным* оператором.

Зная V, нетрудно восстановить A. Складывая и вычитая (12) и (13), получаем

$$(I+V)g = 2Af, \quad (I-V)g = 2if;$$

таким образом, если $(I-V)g=0$, то $f=0$ и, в силу (12), $g=0$; следовательно, существует $(I-V)^{-1}$ и

$$2Af=(I+V)(I-V)^{-1}2if,$$

т. е.

$$A=i(I+V)(I-V)^{-1}. \tag{14}$$

Пусть

$$V=\int_0^{2\pi} e^{i\varphi}\,dF_\varphi \quad (F_0=0,\ F_{2\pi}=I)$$

— спектральное разложение унитарного оператора V (см. п. 109). С помощью (14) отсюда можно получить спектральное разложение оператора A.

Заметим, что функция F_φ непрерывна не только в точке $\varphi=0$, но и в точке $\varphi=2\pi$, так как иначе оператор V имел бы собственное значение, равное 1, и оператор $(I-V)^{-1}$ не существовал бы, в противоречии с тем, что было только что обнаружено.

Возьмем на интервале $(0, 2\pi)$ счетное множество точек φ_m, для которого 0 и 2π, концы интервала, служат предельными точками; например, можно выбрать φ_m так, чтобы было

$$-\operatorname{ctg}\frac{\varphi_m}{2}=m \quad (m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Проекционные операторы

$$P_m=F_{\varphi_m}-F_{\varphi_{m-1}}$$

будут тогда попарно ортогональны и будут справедливы равенства

$$\sum_{-\infty}^{\infty} P_m=\lim_{\varphi\to 2\pi}F_\varphi-\lim_{\varphi\to 0}F_\varphi=I-O=I.$$

Проекционный оператор P_m, будучи перестановочен с V, перестановочен также и с A. Следовательно, подпространство $\mathfrak{L}_m$, соответствующее P_m, приводит операторы V и A. Так как функция $(1-e^{i\varphi})^{-1}$ ограничена в интервале $\varphi_{m-1}\leqslant\varphi\leqslant\varphi_m$, то для f, принадлежащих $\mathfrak{L}_m$, имеем

$$Af=AP_mf=i(I+V)(I-V)^{-1}P_mf=$$
$$=\int_{\varphi_{m-1}}^{\varphi_m} i(1+e^{i\varphi})(1-e^{i\varphi})^{-1}\,dF_\varphi f=\int_{\varphi_{m-1}}^{\varphi_m}\left(-\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)dF_\varphi f,$$

или

$$Af=\int_{m-1}^{m}\lambda\,dE_\lambda f,$$

где обозначено

$$E_\lambda = F_{-2\,\mathrm{arcctg}\,\lambda};$$

$\{E_\lambda\}$ представляет собой, очевидно, спектральное семейство, заданное на интервале $(-\infty, \infty)$.

В предыдущем пункте мы определили интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda$$

как самосопряженный оператор, в каждом из подпространств $\mathfrak{L}_m = (F_{\varphi_m} - F_{\varphi_{m-1}})\,\mathfrak{H} = (E_m - E_{m-1})\,\mathfrak{H}$ приводящийся к ограниченному самосопряженному оператору

$$\int_{m-1}^{m} \lambda\, dE_\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

(в силу леммы п. 120, такой оператор существует и определяется единственным образом). Итак, мы снова пришли к формуле

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda.$$

Именно таким способом И. Нейман [1] впервые доказал теорему о спектральном разложении неограниченного самосопряженного оператора.

122. Полуограниченные самосопряженные операторы. Симметричный оператор S называется *полуограниченным снизу*, если существует действительное число c, такое, что

$$(Sf, f) \geqslant c\,(f, f)$$

для всех f из $\mathfrak{D}_S$; он называется *полуограниченным сверху*, если выполняется противоположное неравенство. Если, в частности,

$$(Sf, f) \geqslant 0,$$

то оператор S называется *положительным* в согласии с определением, принятым для ограниченных операторов.

Всякий полуограниченный симметричный оператор S может быть выражен через некоторый положительный оператор T посредством одной из следующих формул:

$$S = T + cI, \quad S = -T + cI.$$

Поэтому здесь мы рассмотрим только положительные операторы.

Спектральное разложение *положительного самосопряженного* оператора A может быть очень просто получено из разложения ограниченного самосопряженного оператора [1]). Для этого отобра-

[1]) Фридрихс [1], I.

зим полуось $\lambda \geqslant 0$ на конечный отрезок оси μ, например на отрезок $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$, посредством функции

$$\mu = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}.$$

Заметим, что аналогичное отображение

$$\mu = \frac{\lambda - i}{\lambda + i}$$

оси на единичную окружность в комплексной плоскости привело к понятию „преобразования Кэли". Так как теперь рассматривается только полуось $\lambda \geqslant 0$, то нет надобности прибегать к комплексиой плоскости для того, чтобы отобразить ее на ограниченную линию.

Итак, вместо преобразования Кэли возьмем оператор

$$B = (A - I)(A + I)^{-1}.$$

Так как $((A + I) f, f) \geqslant (f, f)$, то оператор

$$C = (A + I)^{-1}$$

существует и $(g, Cg) \geqslant (Cg, Cg)$ для всех g, принадлежащих $\mathfrak{D}_C$. Отсюда следует, что

$$(Cg, g) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \|Cg\| \leqslant \|g\|.$$

Будучи обратным по отношению к некоторому самосопряженному оператору, C самосопряжен [см. п. 119, предложение а)], и так как он ограничен в своей области $\mathfrak{D}_C$, то $\mathfrak{D}_C$ непременно совпадает со всем пространством $\mathfrak{H}$. При этом оператор

$$I - 2C = (A + I) C - 2C = (A - I) C = B$$

тоже самосопряжен и ограничен, и так как $O \leqslant C \leqslant I$, то $\|B\| \leqslant 1$.

Пусть

$$B = \int_{-1-0}^{1} \mu \, dF_\mu$$

— спектральное разложение оператора B. Так как для $I - B = 2C$ существует обратный оператор $\left[\text{именно } \frac{1}{2}(A + I)\right]$, то 1 не является собственным значением оператора B, поэтому функция F_μ непрерывна в точке $\mu = 1$, т. е. $F_{1-0} = F_1 = I$. Следовательно,

$$A = (I + B)(I - B)^{-1} = \int_{1-0}^{1} \frac{1+\mu}{1-\mu} dF_\mu = \int_{-0}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda, \tag{15}$$

где

$$E_\lambda = F_\mu \quad \text{при} \quad \mu = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1};$$

$\{E_\lambda\}$ представляет собой, очевидно, спектральное семейство, заданное на полуоси $\lambda \geqslant 0$. Для того чтобы доказать формулу (15) строго, следует выбрать на интервале $-1 \leqslant \mu < 1$ последовательность точек, сходящуюся к 1, и провести рассуждение, аналогичное тому, которое было проведено в п. 120 и 121. Так как $E_\lambda = F_\mu$ является пределом многочленов относительно B, то E_λ перестановочны с A, а также с любым оператором, перестановочным с A.

§ 3. РАСШИРЕНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

123. Преобразования Кэли. Индексы дефекта. Как мы видели, именно самосопряженные операторы допускают спектральное представление, поэтому бывает важно знать, можно ли заданный симметричный оператор расширить так, чтобы он стал самосопряженным. Можно поставить и более общую задачу: найти всевозможные симметричные расширения заданного симметричного оператора S.

Следуя И. Нейману [1], мы воспользуемся для этой цели преобразованиями Кэли. Так же, как в случае самосопряженного оператора, преобразование Кэли симметричного оператора S определяется формулой

$$V = (S - iI)(S + iI)^{-1};$$

в этом случае V представляет собой *изометричный* оператор, и S можно выразить через V формулой

$$S = i(I + V)(I - V)^{-1}.$$

Взяв в соотношениях (10), (12) и (13) S вместо A, мы убедимся, что, когда S — замкнутый оператор, замкнут и V, и обратно. Так как всякий симметричный оператор S имеет замкнутое расширение S^{**} (замыкание оператора S), то мы ограничимся рассмотрением лишь *замкнутых* симметричных операторов S.

Мы видели, что в том случае, когда S — *самосопряженный* оператор, V представляет собой оператор *унитарный*; покажем теперь, что верно и обратное. Допустим, что V — унитарный оператор, и возьмем какой-нибудь элемент g из $\mathfrak{D}_{S^*}$. Если $g^* = S^*g$, то

$$(Sf, g) = (f, g^*)$$

для всех f из $\mathfrak{D}_S$, и так как эти f имеют вид $f = (I - V)h$, где h пробегает $\mathfrak{D}_V = \mathfrak{H}$, то

$$(i(I + V)h, g) = ((I - V)h, g^*)$$

или

$$i(h, g) + i(Vh, g) = (h, g^*) - (Vh, g^*)$$

для всех элементов h пространства $\mathfrak{H}$. Воспользовавшись тем, что оператор V унитарный, и взяв (Vh, Vg) вместо (h, g) и (Vh, Vg^*)